Einführung in die theoretische Physik

In zwei Bänden

Von

Dr. Clemens Schaefer

a. o. Professor an der Universität Breslau

ERSTER BAND

Mechanik materieller Punkte, Mechanik starrer Körper und Mechanik der Kontinua (Elastizität und Hydrodynamik)

Mit 249 Figuren im Text



Leipzig

Verlag von Veit & Comp.

1914

Vorwort.

Seine Entstehung verdankt das vorliegende Werk einerseits häufigen Anregungen mir befreundeter Fachgenossen, die nach dem Erscheinen meiner kleinen Einführung in die **Maxwell**sche Theorie es mir nahe legten, ein größeres Werk über das Gesamtgebiet der theoretischen Physik zu schreiben; anderseits war auch ich im Laufe meiner zehnjährigen akademischen Tätigkeit durch Unterredungen mit meinen Hörern zu der Überzeugung gelangt, daß ein Buch, das die theoretische Physik etwa in dem Umfange darstellt, wie sie in einem fünf- bis sechssemestrigen Vorlesungskursus bei vier Wochenstunden behandelt werden kann, nicht überflüssig sein dürfte und seinen Platz neben den vorhandenen Werken einnehmen könnte. Ich bin deshalb einer Aufforderung des Herrn Verlegers gerne gefolgt und lege heute den Fachgenossen den ersten Band vor. Er enthält die Mechanik diskreter materieller Punkte, starrer Körper und die Mechanik der Kontinua, d. h. Elastizität und Hydrodynamik. Darin ist die Akustik mitverarbeitet, die ja zum Teil der Punktmechanik, zum Teil der Elastizität oder Hydrodynamik angehört. Der zweite Band soll die Wärmelehre, die Elektrizität und die Optik in moderner Darstellung bringen.

Natürlich kann es sich bei einem solchen Buche im wesentlichen nur um eine Auswahl aus dem ungeheuren Stoffe handeln; da eine allgemeine Einigung darüber unmöglich ist, so kann ich nur hoffen, daß ich im allgemeinen eine akzeptable Mittellinie getroffen habe. Vielleicht darf ich noch hervorheben, daß ich mit besonderer Liebe die Schwingungsprobleme behandelt habe, die einmal zur Vorbereitung auf die elektrischen Wellen im zweiten Bande dienen sollen, und denen anderseits ein großer Teil meiner eigenen wissenschaftlichen Tätigkeit angehört. Hier bot sich auch Gelegenheit, z. B. bei den Saitenschwingungen, die Bedeutung der Integralgleichungen für das Problem der Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener zu zeigen; um dabei und bei ähnlichen Gelegenheiten den physikalischen Kern nicht mit rein

mathematischen Untersuchungen zu belasten, habe ich die Anordnung so getroffen, daß diese Abschnitte beim ersten Studium überschlagen werden können. Überhaupt ist Kenntnis des Inhaltes des XIV. und XV. Kapitels (Schwingungen von Saiten und Membranen sowie Schwingungen von Stäben und Platten) für das Folgende nicht notwendig; sie bilden vielmehr ein Gebiet für sich von wesentlich akustischem Interesse.

Ich möchte noch ein Wort sagen über den Gebrauch der Vektoranalysis. Die dieser angehörenden Begriffe und Formeln habe ich, da ich sie nicht als bekannt voraussetzen konnte, an den Stellen, an denen sie sich zwanglos darboten, entwickelt und dann im folgenden benutzt, ohne jedoch ausschließlich Gebrauch davon zu machen. Vielmehr habe ich in manchen Kapiteln die Koordinatendarstellung bevorzugt. Dies scheint mir in einem Lehrbuche geradezu notwendig zu sein, schon damit der Lernende die wichtigsten Formeln, z. B. die Gleichungen der Elastizität und Hydrodynamik, in beiderlei Gestalt kennen lernt; denn so braucht er sie beim Studium der Literatur.

Es ist kaum notwendig, zu sagen, daß ich bei meiner Darstellung die gesamte mir zugängliche Lehrbuchliteratur zu Rate gezogen habe. Ich möchte hier neben den Lehrbüchern der Hydrodynamik von Lamb und W. Wien namentlich die Monographie über den Kreisel von Klein und Sommerfeld, sowie die Mechanik von Hamel als diejenigen Werke nennen, die mich in vieler Hinsicht beeinflußt haben. Ferner möchte ich noch hier hervorheben, daß ich durch häufige Bezugnahme auf das vortreffliche Tabellenwerk von Jahnke und Emde (Funktionentafeln mit Formeln und Kurven, Leipzig 1909) meine Darstellung entlasten konnte; ich habe um so unbedenklicher auf dieses Werk mich bezogen, als es in der Hand jedes Studierenden der Mathematik und Physik sein sollte.

Zahlreichen Fachgenossen habe ich für ihre liebenswürdige und stets bereite Hilfe zu danken. Vor allem Herrn Professor Dr. Adolf Kneser, mit dem ich nicht nur fast alle Partien des Buches besprechen konnte, sondern der mich mit seinem Rate ganz besonders bei Abfassung der Kapitel XIV und XV unterstützt hat, in denen die Integralgleichungen benutzt werden. Diese hatte er auch die Freundlichkeit, in den Korrekturbogen noch einmal durchzusehen. In den genannten Kapiteln habe ich übrigens ausgiebig die Anregungen verwertet, die ich in einer Vorlesung über die Theorie der Integralgleichungen von Kneser empfangen habe. Herr Professor Dr. Alexander Pflüger in Bonn hat eine ganze Korrektur

gelesen und mir zahlreiche wertvolle Verbesserungsvorschläge, namentlich in pädagogischer Hinsicht, gemacht. Mein Kollege, Herr Privatdozent Dr. Walter Schnee, hat die Mechanik der materiellen Punkte und der starren Körper im Manuskript gelesen, viele Ungenauigkeiten berichtigt, die Darstellung in vielen Punkten verbessert. Von ihm rührt ferner die elegante Darstellung der Sätze über Transformation quadratischer Formen in Nummer 58 her. In gleicher Weise bin ich Herrn Privatdozenten Dr. Fritz Reiche in Berlin für Durchsicht des Manuskriptes der Mechanik der Kontinua verpflichtet, deren Darstellung er durch viele Ratschläge gefördert hat. Eine Schülerin von mir, Fräulein Dr. Stallwitz, stellte mir ihre sorgfältig ausgearbeiteten Vorlesungshefte zur Verfügung, die ich als Grundlage für die erste Niederschrift des Manuskriptes benutzt habe. Herr Dr. Gustav Groß hatte die Freundlichkeit, eine ganze Korrektur zu lesen; Herr cand. phil. Paul Hahn hat mit großem Geschick die Figuren gezeichnet. Ihnen allen gebührt mein aufrichtiger Dank! In nicht geringerem Maße schulde ich diesen auch dem Herrn Verleger, der auf alle meine Wünsche in der bereitwilligsten Weise einging.

Möge der Erfolg die aufgewandte Mühe lohnen!

Breslau, Ostern 1914.

Clemens Schaefer.

Inhalt.

Einleitung.

Erstes Buch.

Mechanik materieller Punkte.

Erstes Kapitel.

Kinematik eines materiellen Punktes.

Zweites Kapitel.

Allgemeine Dynamik eines substantiellen Punktes.

Drittes Kapitel.

Spezielle Bewegungen eines substantiellen Punktes.

Viertes Kapitel.

Allgemeine Dynamik eines Systems materieller Punkte.

Fünftes Kapitel.

Spezielle Dynamik eines Systems materieller Punkte.

Zweites Buch.
Mechanik starrer Körper.

Sechstes Kapitel.
Kinematik starrer Körper.

Siebentes Kapitel.
Allgemeine Dynamik starrer Körper.

Achtes Kapitel.
Spezielle Dynamik starrer Körper.

Drittes Buch.
Mechanik der Kontinua (Elastizitätslehre und Hydrodynamik)

Einleitung.

Neuntes Kapitel.

Kinematik eines Kontinuums.

Zehntes Kapitel.

Allgemeine Dynamik eines Kontinuums: Analyse des Spannungszustandes.

Elftes Kapitel.

Allgemeine Dynamik eines Kontinuums: Zusammenhang zwischen Spannung und Deformation.

Zwölftes Kapitel.

Spezielle Fälle des elastischen Gleichgewichts.

Dreizehntes Kapitel.

Gleichgewicht und Bewegung in einem unendlich ausgedehnten Medium.

Vierzehntes Kapitel.

Schwingungen von Saiten und Membranen.

Fünfzehntes Kapitel.

Schwingungen von Stäben und Platten.

Sechzehntes Kapitel.

Gleichgewicht und kleine Schwingungen von Flüssigkeiten.

Siebzehntes Kapitel.

Wirbelfreie (Potential)-Bewegung einer Flüssigkeit.

Achtzehntes Kapitel.

Wirbelbewegung.

Neunzehntes Kapitel.

Reibung von inkompressiblen Flüssigkeiten.

Einleitung.

1. Aufgabe der Mechanik; ihre Stellung im System der theoretischen Physik.

Die Mechanik ist die Lehre von den Bewegungen materieller Körper und von den Kräften, die jene verursachen. Sie hat die Aufgabe, die Gesamtheit der Bewegungen zu klassifizieren und auf die einfachste Weise zu beschreiben. Sie leistet dies durch die Aufstellung geeigneter Begriffe, die es gestatten, das Typische der verschiedenen Bewegungsformen herauszuschälen und zu formulieren. Unsere heutige Mechanik beruht, wenn auch nicht ausschließlich, so doch im wesentlichen auf einer Anzahl von Axiomen, die man Newton verdankt, die aber zum Teil schon durch Galilei vorbereitet sind. Das System der Newtonschen Mechanik ist eine widerspruchsfreie, in sich logische Lösung des Problems; es kann zwar kein Zweifel bestehen, daß es möglich sein würde, andere Systeme der Mechanik aufzustellen, die ebenso widerspruchsfrei wären und die Erscheinungen ebenfalls darstellten; aber es ist fraglich, ob diese anderen Systeme ebenso einfach sein würden, wie das System Newtons. Es hat deshalb auch bisher kein anderes System das Newtonsche ernstlich in seiner Stellung zu erschüttern vermocht.

Wir stellen die Newtonsche Mechanik an die Spitze unseres Systems der theoretischen Physik. Dazu veranlassen uns mehrere Gründe. Zunächst ein historischer. Die Mechanik ist derjenige Teil der exakten Wissenschaften, der sich am frühesten — zum Teil schon im Altertum — zu hoher Blüte entfaltet und zuerst praktische Früchte gezeitigt hat. Deshalb sind naturgemäß in dieser Disziplin zuerst die grundlegenden Begriffe der theoretischen Physik, z. B. Kraft, Arbeit, Energie usw. entwickelt worden, und von der Mechanik aus haben sie die übrigen Gebiete der Physik erobert und befruchtet.

Neben diesem historischen Gesichtspunkte hat zur dominierenden Stellung der Mechanik lange Zeit folgender grundsätzliche Standpunkt beigetragen: Man sah eine Naturerscheinung (Elektrizität, Licht, Wärme) dann und erst dann als erklärt an, wenn sie auf Mechanik, d. h. auf Bewegungen materieller Körper zurückgeführt war. So hat man z. B. die Wärme erklärt als eine ungeordnete Bewegung der Moleküle der Körper, so faßte man das Licht als eine elastische Wellenbewegung in einem materiellen Medium, dem Lichtäther, auf usw.

Die Erwägungen, die zu diesem grundsätzlichen Standpunkte hinführen, sind etwa folgende gewesen: Die Bewegungen materieller Körper, wie sie in der Mechanik behandelt werden, scheinen — wenigstens dem naiven Menschen — leichter verständlich, als z. B. die Erscheinungen der Elektrizität oder der Wärme. Erklären heißt aber nichts anderes, als weniger Bekanntes auf besser Bekanntes zu reduzieren. So ergab sich aus diesen Überlegungen ganz zwanglos die Forderung, alles auf die Mechanik als das am besten Bekannte zurückzuführen. An der Ausführung dieses großartigen Programms des „mechanischen Weltbildes" hat die Physik sich bis in die jüngste Zeit gemüht, ohne daß es allerdings zu einem befriedigenden Abschluß gelangt wäre. Man neigt heute sogar angesichts der vielen scheinbar unüberwindlichen Schwierigkeiten, die namentlich Elektrizität und Magnetismus dem Versuche, sie ins mechanische Weltbild einzureihen, entgegensetzen, jetzt zu der diametral entgegengesetzten Forderung, alles auf elektromagnetische Grundlage zu stellen. Doch ist bisher das „elektromagnetische Weltbild" auch nur Programm geblieben, und mag auch vielleicht jetzt die Wagschale sich schon mehr zugunsten des letzteren neigen, so kann doch jedenfalls der jetzige Zustand der Wissenschaft keinen Grund dagegen bilden, die Mechanik noch an den Anfang der theoretischen Physik zu stellen.

In dieser Auffassung bestärkt uns eine dritte Erwägung, die pädagogischer Natur ist. Wenn wir die Mechanik in ihrer alten Stellung belassen, so folgen wir damit, wie oben erwähnt, der historischen Entwicklung der Wissenschaft. Bei dieser Anordnung erkennt der Anfänger, für den dieses Buch in erster Linie bestimmt ist, unserer Ansicht nach am leichtesten, wie die Probleme der theoretischen Physik entstanden sind, und so wird in ihm am ersten das „θαυμάζειν", das „Sichwundern" mit anderen Worten, der methodische Zweifel erweckt, der der Lebensnerv jeder Forschung ist.

2. Grundbegriffe: Raum und Zeit in der Mechanik.

Das Objekt der Mechanik ist die Bestimmung der Bewegungen materieller Körper. Bewegung eines Körpers ist aber eine örtliche Veränderung in der Zeit. Wir werden uns daher, ehe wir an die Aufgabe der Mechanik herangehen können, mit Raum und Zeit, oder vielleicht besser gesagt, mit Raummessung und Zeitmessung zu beschäftigen haben.

Die Eigenschaften des Raumes sind aus der Euklidischen Geometrie her bekannt; die Axiome und Lehrsätze derselben werden hier als bekannt vorausgesetzt. Wir müssen vor allen Dingen den Raum durch Längenmaße ausmessen. Dazu bedürfen wir einer Einheit des Längenmaßes. Diese ist natürlich willkürlich und muß durch Übereinkunft festgelegt werden.. Durch internationale Verständigung ist folgendes bestimmt worden: Ein aus Pt bestehender, zu Sèvres bei Paris aufbewahrter Stab

hat in der Nähe der Enden zwei feine Strichmarken; die Distanz derselben bei der Temperatur 0° Celsius wird als Längeneinheit zugrunde gelegt; sie heißt: das Meter. Von diesem Urmaße, dem sogenannten mètre des archives, sind durch eine internationale Kommission Kopien angefertigt worden, von denen mehrere Exemplare im Besitze jedes Kulturstaates sind. Mit ihnen sind alle Maßstäbe, die in der Physik benutzt werden, verglichen. Statt des Meters benutzt man in der Physik übrigens den hundertsten Teil desselben, das Zentimeter, als wissenschaftliche Längeneinheit.

Da man Gründe hat, an der absoluten Konstanz der Länge von Metallstäben zu zweifeln, so hat man neuerdings das Meter mit der Größe von Lichtwellen verglichen. Albert Michelson hat diese Bestimmung ausgeführt und gefunden, daß, wenn man die Wellenlänge λ in trockener Luft bei 15° C der roten Cadmiumlinie benutzt, man hat:

$$1 \text{ m} = 1553164{,}03\,\lambda\,.$$

Bisher sind keine Gründe bekannt geworden, an der Konstanz der Lichtwellenlänge (unter gleichen Bedingungen der das Licht erzeugenden Lichtquelle und im nämlichen Medium) zu zweifeln. Indem man also vorläufig die absolute Konstanz dieser Wellenlänge annimmt, hat man so die Möglichkeit, die Veränderlichkeit des Urmeters zu kontrollieren und in Rechnung zu ziehen.

Neben dem Raume, d. h. den geometrischen Stücken, die Ort und Ortsveränderung bestimmen, müssen wir auch die Zeit als meßbare veränderliche Größe einführen. Auch die hierzu notwendige Einheit des Zeitmaßes ist willkürlich und wird durch Konvention festgesetzt. Zu einer brauchbaren Zeiteinheit gelangt man folgendermaßen: Man beobachtet, daß die Erde relativ zum Fixsternhimmel eine Drehung ausführt; ob dabei die Erde oder der Fixsternhimmel sich bewegt, ist an dieser Stelle ganz gleichgültig; es handelt sich hier nur um die reine Beobachtungstatsache der relativen Veränderung beider Systeme gegeneinander. Deshalb eben können wir — um die Ideen zu fixieren — ohne Schaden sagen, daß die Erde rotiere. Die Rotationsachse ist durch Beobachtung festgestellt als die Verbindungslinie des Erdmittelpunktes mit einem bestimmten Fixstern, dem sogenannten Polarstern. Durch die Rotationsachse und durch einen beliebig herausgegriffenen Fixstern legen wir eine Ebene. Wir wollen sie kurz die „feste“ Ebene nennen. Diese Ebene dreht sich also relativ zur Erde. Eine zweite Ebene werde bestimmt durch die Rotationsachse und einen beliebigen Punkt der Erdoberfläche; dann erhalten wir eine sogenannte Meridianebene, die relativ zur Erde keine Bewegung hat, sich aber gegen die „feste“ Ebene dreht. In dieser relativen Bewegung beider Systeme gegeneinander haben wir einen periodischen Vorgang vor uns, den wir zur Zeitmessung benutzen können. Wir definieren folgendermaßen: Die Zeit soll gemessen werden durch den Winkel zwischen den obigen beiden Ebenen: der Zeiteinheit ent-

spricht also eine Drehung der in der Erde festen Meridianebene um einen bestimmten Winkel gegen die feste Ebene. Die Zeit, die verstreicht, wenn die Meridianebene eine Drehung um 360 Grad gegen die feste Achse gemacht hat, nennt man einen Sterntag. Der 86164ste Teil eines Sterntages wird als Sekunde bezeichnet, und dies ist die in der Physik übliche Zeiteinheit. Natürlich kann man nicht daran denken, stets durch astronomische Beobachtungen die Zeit zu messen. Man stellt sich vielmehr andere Instrumente, sogenannte „Uhren" her, d. h. mechanische Apparate, die eine periodische Bewegung ausführen. Der einfachste Apparat dieser Art ist das Pendel. Man bestimmt einfach die Anzahl der Pendelschwingungen, d. h. der Hin- und Hergänge desselben, die auf die Zeit eines Sterntages fallen. Ein Pendel von solcher Beschaffenheit, daß 86164 Schwingungen auf einen Sterntag entfallen, heißt ein Sekundenpendel. Mit einem solchen oder Apparaten ähnlicher Beschaffenheit werden alle praktischen Zeitmessungen angestellt. Natürlich werden alle Uhren regelmäßig durch astronomische Beobachtungen kontrolliert.

3. Substantielle Punkte, starre Körper, deformierbare Körper.

Die in der Natur vorkommenden materiellen Körper, deren Bewegungen die Mechanik untersucht, sind stets ausgedehnt, d. h. sie erfüllen ein endliches Raumgebiet. Die verschiedenen Teile eines solchen ausgedehnten Körpers können sich sehr verschieden bewegen und zur exakten Angabe der Bewegung des ganzen Körpers gehört offenbar die Angabe der Bewegungen aller seiner Teile. Man erkennt also, daß die Bewegung eines ausgedehnten Körpers im allgemeinen eine sehr komplizierte Erscheinung darstellt, die zu entwirren schwierig ist. Man kann jedoch durch einen Kunstgriff die Schwierigkeit erheblich vermindern. Je kleiner der Körper ist — oder je kleiner der Teil des Körpers ist, den wir ins Auge fassen — um so weniger werden sich die Bewegungen innerhalb des Körpers oder des betrachteten Körperteiles voneinander unterscheiden. In Gedanken können wir den Körper oder Körperteil sogar unendlich klein werden lassen, dann haben wir es schließlich nur mit der Bewegung eines unendlich kleinen Bereiches zu tun, den man kurz als „materiellen" oder „substantiellen" Punkt bezeichnet. Ein solcher ist natürlich nicht mit einem geometrischen Punkte zu verwechseln, denn er besitzt vor allem eine Ausdehnung, wenn auch eine sehr kleine, während die geometrischen Punkte ausdehnungslose Gebilde sind. Die Bewegungen solcher materiellen Punkte sind die denkbar einfachsten, die in der Mechanik möglich sind, weil die Komplikation der endlichen räumlichen Ausdehnung bei ihnen beseitigt ist. Deshalb ist es zweckmäßig, zuerst die Mechanik eines solchen zu entwickeln. Übrigens kann man manchmal auch einen ausgedehnten Körper so behandeln, als ob er ein materieller Punkt wäre, wenn es eben nur auf die

Betrachtung der Bewegung eines Punktes ankommt; z. B. bei der Bewegung der Gestirne am Himmel genügt es, diejenige des Mittelpunktes jedes Körpers zu kennen, und deshalb reicht für dieses Problem die Mechanik materieller Körper aus.

Ferner kann man sagen, daß jeder endlich ausgedehnte Körper als aus materiellen Punkten zusammengesetzt gedacht werden kann. Denn man kann den Körper durch drei Scharen von aufeinander senkrecht stehenden Ebenen in kleine Würfel, sogenannte Körperelemente, teilen; die Bewegung eines solchen Elementarwürfels wird aber wegen seiner minimalen Ausdehnung durch die Betrachtung eines Punktes desselben mit ausreichender Genauigkeit dargestellt, und man kann daher in jedem Elemente einen Punkt, etwa den Mittelpunkt, markieren. Jeder dieser Punkte bleibt bei der Bewegung an seinem Elemente haften, ist also das, was wir oben als materiellen Punkt bezeichnet haben. Die Bewegung des gesamten Körpers ist also dann bestimmt, wenn die Bewegung aller dieser so gewonnenen materiellen Punkte bestimmt ist, und in diesem Sinne kann man den endlich ausgedehnten Körper als aus materiellen Punkten bestehend ansehen.

Diese Auffassung leitet nun über zu dem Begriff des starren Körpers. Zwei materielle Punkte heißen starr miteinander verbunden, wenn ihre Entfernung bei allen möglichen Bewegungen derselben sich nicht ändert. Ebenso nennen wir einen Körper starr, wenn seine sämtlichen materiellen Punkte bei der Bewegung ihre gegenseitigen Entfernungen nicht ändern. Viele der in der Natur vorkommenden Körper lassen sich mit großer Annäherung als starr betrachten, wenigstens, wenn es nicht auf die äußere Genauigkeit ankommt. Deshalb wird sich an die Mechanik diskreter materieller Punkte anschließen die Mechanik starrer Körper.

Im Gegensatz zu den starren Körpern stehen diejenigen, deren materiellen Punkte ihren gegenseitigen Abstand während der Bewegung verändern, oder, wie wir kurz sagen wollen, die ihre Gestalt oder ihr Volumen verändern. Solche Körper nennen wir deformierbare oder elastische Körper. Streng genommen gehören alle in der Natur vorkommenden Körper zu dieser Kategorie, und deshalb ist es notwendig, über die Mechanik des starren Körpers hinauszugehen und ihr eine Mechanik deformierbarer Körper anzuschließen.

4. Einteilung der Mechanik.

Man kann die Mechanik in verschiedener Weise einteilen, je nach den Gesichtspunkten, die man verfolgt. Eine solche Einteilung haben wir in der vorigen Nummer angegeben. Eine andere Einteilung ist die folgende: Solange man nur die Bewegungen als solche betrachtet, d. h. die aufeinanderfolgenden Lagen eines Körpers zu verschiedenen Zeiten,

ohne Rücksicht darauf, wie diese Bewegungen entstehen, hat man es mit einer rein geometrischen Betrachtung zu tun. Diesen Teil der Mechanik nennt man Kinematik. Sie nimmt zu den drei Raumkoordinaten nur noch die Zeitkoordinate hinzu. Als ihre Aufgabe kann bezeichnet werden die Untersuchung und Klassifizierung aller denkbaren Bewegungen. Sobald man wirklich vorkommende Bewegungen in dieser Weise betrachtet, nennt man die Kinematik auch wohl Phoronomie; doch werden beide Bezeichnungen vielfach ohne Unterschied benutzt. Der Teil der Mechanik ferner, der die Bewegungen in Verbindung mit den sie hervorbringenden Ursachen, den Kräften, untersucht, heißt die Dynamik, von der die Statik, die Lehre vom Gleichgewicht der Körper unter dem Einfluß von Kräften, ein spezieller Fall ist. Die allgemeine Dynamik stellt die allgemeinen Bewegungsgesetze auf und liefert die allgemeinen Prinzipien, nach denen diese Bewegungsgleichungen behandelt werden müssen, während die spezielle Dynamik die besonderen Probleme behandelt.

So ergibt sich denn für die drei Mechaniken des materiellen Punktes, des starren Körpers und des deformierbaren Körpers die Haupteinteilung in die jeweilige Kinematik und die jeweilige Dynamik.

Erstes Buch.

Mechanik materieller Punkte.

Erstes Kapitel.

Kinematik eines materiellen Punktes.

5. Lage eines materiellen Punktes; Koordinatensysteme; Bezugssysteme.

Unter der Lage eines substantiellen Punktes verstehen wir die Angabe des Raumpunktes, mit dem er koinzidiert. Was ist notwendig, um eine derartige Bestimmung auszuführen? Denken wir uns, der ganze Raum sei leer, mit Ausnahme eben des einen materiellen Punktes, dessen Lage festgestellt werden soll. Der leere Raum ist unendlich groß, d. h. ohne Begrenzung, und ferner ist sowohl jeder Raumpunkt dem anderen gleichwertig und durch nichts unterschieden, als auch sämtliche durch den Punkt gehenden Richtungen. Man drückt diese Eigenschaften des Raumes dadurch aus, daß man sagt, der Raum sei „homogen" und „isotrop". In Verbindung mit der Unendlichkeit des Raumes machen diese beiden Eigenschaften des leeren Raumes es aber unmöglich, einen Raumpunkt zu individualisieren; denn diese Eigenschaften schließen eben die Möglichkeit dazu aus. Also kann man im leeren Raum auch nicht die Lage eines materiellen Punktes angeben: eine „absolute" Lagenbestimmung ist unmöglich. Man muß vielmehr außer dem zu bestimmenden materiellen Punkte noch das Vorhandensein irgend eines materiellen Körpers hinzunehmen, in bezug auf den oder relativ zu dem die Lage des substantiellen Punktes bestimmt werden kann, indem man die Entfernungen des letzteren von einigen oder allen Punkten des materiellen Körpers angibt. Es ist also eine „relative" Lagenbestimmung, und nur eine solche, möglich. Den materiellen Körper, relativ zu dem die Lagen eines materiellen Punktes bestimmt werden, nennen wir den „Bezugskörper".

Als Bezugskörper wollen wir stets starre Körper nehmen. Wir greifen ferner einen Punkt 0 desselben heraus, und legen durch denselben drei zueinander senkrechte Gerade, die wir als die x-, y- und z-Achsen eines kartesischen Koordinatensystemes nehmen wollen. Die Achsen

sind also Linien, die dem starren Körper angehören, also nach einer in Nr. 3 gemachten Bemerkung als aus substantiellen Punkten des Körpers bestehend angesehen werden können, und daher als „substantielle Linien" bezeichnet werden. Als Koordinatensystem wählen wir ein sogenanntes rechtshändiges Koordinatensystem. Bei einem solchen sind die positiven Achsenrichtungen folgendermaßen bestimmt: Zwei positive Achsenrichtungen können beliebig gewählt werden. Es seien dies etwa die x- und y-Richtungen; man denke sich nun einen menschlichen Körper auf die $x\,y$-Ebene im Koordinatenanfangspunkt so gestellt, daß die positive x-Richtung zu seiner Rechten, und die positive y-Richtung seine Blickrichtung ist. Dann nehmen wir die Richtung von seinen Füßen zum Kopfe als positive z-Richtung an. Diesen Festsetzungen entspricht das Bild der Fig. 1.

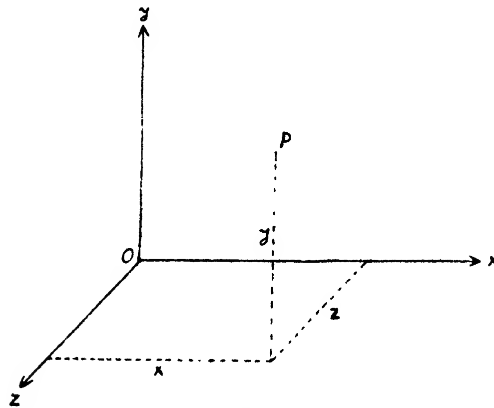


Fig. 1.

Man kann Daumen, Zeige- und Mittelfinger der rechten Hand leicht so stellen, daß sie zueinander senkrecht stehen. Dann entspricht der Daumenrichtung die positive x-Richtung, dem Zeigefinger die positive y-Richtung, dem Mittelfinger die positive z-Richtung. Das gilt aber nur für die rechte Hand, daher der Name: rechtshändiges System. Das linkshändige System geht aus dem obigen durch Umkehrung einer Achse daraus hervor, ist also ein Spiegelbild des rechtshändigen.

Die relative Lage, oder wie wir in Zukunft, da es sich nur um solche handelt, einfacher sagen werden, die Lage eines materiellen Punktes P ist nun nach den Lehren der Geometrie vollkommen bestimmt durch die Angabe der drei senkrechten Abstände von den Koordinatenachsen (Fig. 1). Statt dieser drei kartesischen Koordinaten x, y, z kann man natürlich die Lage des Punktes auch durch drei beliebige eindeutige Funktionen der x, y, z bestimmen, wie es z. B. Polarkoordinaten sind.

Für die Kinematik, die ja nur denkbare Bewegungen geometrisch zu untersuchen hat, ist die Wahl des Bezugskörpers offenbar gleichgültig,

ebenso wie die Wahl des Koordinatensystems in der Geometrie die geometrischen Eigenschaften der zu untersuchenden Gebilde nicht beeinflußt. Kein Bezugskörper ist vor dem anderen in irgend einer Weise grundsätzlich ausgezeichnet. Würde umgekehrt ein Bezugssystem eine ausgezeichnete Rolle spielen, so könnte man die Lage relativ zu diesem — obwohl es natürlich auch eine relative Bestimmung ist — im gewissen Sinne als „absolute" bezeichnen, weil eben diese Bestimmung dann vor allen anderen einen Vorrang hätte. In der Kinematik ist dies nicht der Fall, wohl aber, wie wir später sehen werden, in der Dynamik. Dort gibt es ausgezeichnete Koordinatensysteme und also im obigen Sinne absolute Bestimmungen.

6. Bewegung eines substantiellen Punktes; Eigenschaften der in der Mechanik vorkommenden Funktionen.

Wir betrachten nun die Lagen eines Massenpunktes (relativ zu einem beliebigen Bezugskörper), wie sie zeitlich aufeinander folgen. Zu jeder Zeit, die wir an der Uhr ablesen, können wir drei Abmessungen $x\, y\, z$ angeben, die seine Lage zur Zeit t bestimmen. Mit anderen Worten: x, y, z sind Funktionen der Zeit t:

$$(1) \qquad x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

Diese drei Funktionen der Gleichung (1) stellen uns die sämtlichen Lagen des Punktes dar, wenn wir der Zeit t alle möglichen Werte beilegen. Sie stellen also den Inbegriff sämtlicher Lagen oder die Bewegung des Punktes dar; die Gleichungen (1) werden deshalb als die „Bewegungsgleichungen der Kinematik" bezeichnet. Die Bewegung eines substantiellen Punktes ist also bestimmt, wenn seine Koordinaten als Funktionen der Zeit bekannt sind. Während der Bewegung beschreibt der materielle Punkt (relativ zu dem im starren Bezugskörper befestigten Koordinatensystem) eine Raumkurve. Diese wird durch (1) unter Vermittlung des Parameters t dargestellt; Gleichung (1) ist die Gleichung der Bahn in sog. Parameterdarstellung. Sind die Gleichungen (1) so beschaffen, daß zwischen je zweien von ihnen t eliminiert werden kann, z. B. aus der ersten und zweiten, dann aus der zweiten und dritten, so liefert das erste Gleichungspaar einen funktionalen Zusammenhang zwischen den Variabeln x und y, das zweite Paar zwischen y und z, den wir in der Form schreiben können:

$$(2) \qquad \begin{cases} f_1(x\,y) = 0, \\ f_2(y\,z) = 0. \end{cases}$$

Die Gleichungen $f_1 = 0$ und $f_2 = 0$ stellen jede eine Oberfläche dar, also beide gemeinsam die Schnittlinie derselben, welche eben die gesuchte Kurve ist. Diese Raumkurve nennen wir die „Bahnkurve" oder die „Bahn" des substantiellen Punktes.

Die Funktionen (1) könnten vom rein mathematischen Standpunkte ganz willkürliche sein; aber wir wollen diese Willkür von vornherein einschränken, um eine einfache mathematische Darstellung der Mechanik möglich zu machen.

Wir nehmen deshalb zunächst an, daß diese Funktionen stetig sind. Die Zulassung unstetiger Funktionen würde auch physikalisch Schwierigkeiten mit sich bringen. Denn dann müßten wir z. B. den Fall zulassen, daß die Bahnkurve eines substantiellen Punktes zu einer bestimmten Zeit in zwei Stücke zerrissen sein könnte, so daß der substantielle Punkt gleichzeitig an zwei verschiedenen Stellen des Raumes wäre (Fig. 2).

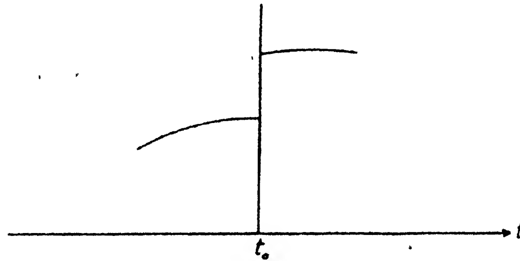


Fig. 2.

Damit aber würde jedes Mittel fehlen, sich der Identität des substantiellen Punktes zu vergewissern.

Weitere Einschränkungen für die Funktionen (1) werden die im folgenden zu entwickelnden Begriffe der Geschwindigkeit und der Beschleunigung liefern; wir wollen jedoch der Übersichtlichkeit halber bereits hier alle Eigenschaften dieser Funktionen zusammenstellen: Wir werden von den Funktionen (1) außer der schon besprochenen Stetigkeit noch verlangen, daß sie beliebig hohe stetige Differentialquotienten nach der Zeit besitzen.

7. Der Begriff der Geschwindigkeit.

Um den Begriff der Geschwindigkeit zu erhalten, wollen wir von einem möglichst einfachen Falle ausgehen: Ein substantieller Punkt bewege sich auf einer geradlinigen Bahn derartig, daß er in gleichen Zeitabschnitten gleiche Strecken zurücklegt (Fig. 3). Eine solche Bewegung heißt „gleichförmig".

Zur Zeit t_1 sei er im Punkte 1, im Zeitmomente t_2 in 2, und so fort. Die zeitlichen Differenzen t_2-t_1, t_3-t_2, t_4-t_3 . . . t_n-t_{n-1} sollen gleich groß sein; dann sind der Voraussetzung gemäß die Strecken s_2-s_1, s_3-s_2, ... s_n-s_{n-1}, die in diesen Zeiten zurückgelegt werden, ebenfalls gleich. Dabei werden die Strecken s von einem beliebigen Anfangspunkte 0 aus gemessen, wie es die Fig. 3 angibt.

Hier ist es leicht, eine Definition für die Geschwindigkeit zu geben, die sich überdies mit dem gewöhnlichen Sprachgebrauch deckt: wir nennen nämlich die Strecke, die der Punkt in der Zeit-

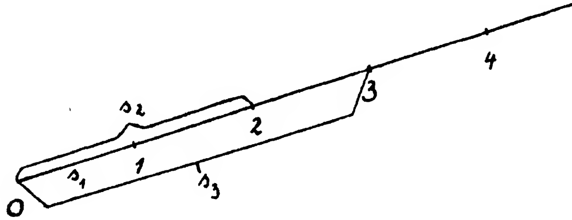


Fig. 3.

einheit zurücklegt, seine Geschwindigkeit. Bezeichnen wir also die Größe, oder wie wir lieber sagen wollen, den „Betrag" der Geschwindigkeit durch c (celeritas), so ist demgemäß:

(3) $$c = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{s_3 - s_2}{t_3 - t_2} = \ldots \frac{s_n - s_{n-1}}{t_n - t_{n-1}}.$$

Bezeichnen wir ferner die seit Beginn der gleichförmigen Bewegung des substantiellen Punktes verflossene Zeit durch t, die gesamte zurückgelegte Strecke durch s, so können wir auch schreiben:

(3 a) $$c = \frac{s}{t}.$$

In Worten: Bei einer gleichförmigen geradlinigen Bewegung erhält man den Betrag der Geschwindigkeit als den Quotienten aus der zurückgelegten Strecke s und der während der Durcheilung von s verflossenen Zeit t. Die Geschwindigkeit hat einen konstanten Wert; wie groß oder wie klein daher s und t genommen werden, ist offenbar gleichgültig.

Aber diese Definition versagt bereits, wenn der substantielle Punkt auf geradliniger Bahn in gleichen Zeiträumen verschieden große Wege zurücklegt (Fig. 4).

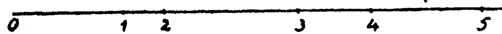


Fig. 4.

Die zur Zurücklegung der Strecken $s_2 - s_1$, $s_3 - s_2$, $s_4 - s_3$, ... $s_n - s_{n-1}$ erforderlichen Zeiten seien gleich.

Bilden wir nun wie oben einen Quotienten, etwa $\frac{s_4 - s_3}{t_4 - t_3}$, so stellt dieser offenbar nur einen Durchschnittswert der Geschwindigkeit dar, die sogenannte „mittlere Geschwindigkeit" in dem betreffenden Zeitintervalle. D. h. wenn ich dem substantiellen Punkte zur Zeit t_3 im Punkte 3

die konstante Geschwindigkeit $\frac{s_4 - s_3}{t_4 - t_3}$ erteilen würde, so durcheilte er die Strecke $s_4 - s_3$ gleichförmig derart, daß er zur Zeit t_4 im Raumpunkte 4 eintreffen würde. Anfang und Ende der Bewegung werden also richtig durch die mittlere Geschwindigkeit dargestellt; aber über die Lage des substantiellen Punktes zu den Zwischenzeiten sagt sie nichts aus, und das wird doch gerade von uns verlangt, daß wir in jedem Zeitmomente die Lage des sich bewegenden materiellen Punktes angeben können.

Um hier weiter zu kommen, überlege man folgendes: Die Größe der mittleren Geschwindigkeit hängt offenbar von der Größe des gewählten Zeitintervalles ab und die wirkliche Bewegung wird durch sie um so weniger genau dargestellt, je größer das Zeitintervall ist. Man sieht dies leicht am Beispiele eines Eisenbahnzuges ein. Wenn ich sage: Zwischen Köln und Berlin, d. h. in einem Zeitintervalle von 9 Stunden, hat der Zug eine mittlere Geschwindigkeit von 70 km pro Stunde, so sagt diese Angabe offenbar weniger aus über die wirkliche Bewegung — obwohl der Wert der mittleren Geschwindigkeit völlig exakt ist —, als wenn ich die mittleren Geschwindigkeiten des Zuges für die erste Stunde, für die zweite, und so fort einzeln angebe. Denn im ersten Fall stimmen i. A. nur Anfangs- und Endlage mit der wirklichen Bewegung überein, im zweiten Falle dagegen noch die Zwischenlagen zu Beginn jeder neuen Stunde. Noch genauere Ergebnisse würden wir bekommen, wenn für jede Minute die mittlere Geschwindigkeit angegeben würde, usw.

Durch diesen Gedankengang gelangen wir zu einer brauchbaren Definition der Geschwindigkeit; die mittlere Geschwindigkeit wird ja den Bewegungsvorgang um so genauer darstellen, je kleiner das Zeitintervall ist, für das dieselbe gebildet wird. Nennen wir Δs eine kleine Strecke, Δt die zur Zurücklegung derselben erforderliche Zeit, so ist $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ die mittlere Geschwindigkeit im Intervalle Δt. Lassen wir nun Δt immer kleiner und kleiner werden, so wird auch Δs immer kleiner und kleiner werden, und der Quotient $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ wird sich einer bestimmten Grenze nähern, die in der Sprache der Differentialrechnung der erste Differential-Quotient von s nach t genannt wird:

$$\lim_{\Delta t = 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}.$$

Dieser Grenzwert, dessen Existenz wir postulieren müssen, ist zwar Funktion von t, hängt aber nicht mehr von der Größe des Zeitintervalls dt ab. Deshalb ist es zweckmäßig, $\frac{ds}{dt}$ als den Betrag c der Geschwindigkeit im „Zeitpunkte t“ zu bezeichnen. Wir erhalten also jetzt:

$$c = \frac{ds}{dt}, \tag{4}$$

welche Definition auch auf den ersten Fall der gleichförmigen Geschwindigkeit paßt, da dann

$$\frac{ds}{dt} = \text{const.} = \frac{s}{t}$$

ist.

Es muß besonders hervorgehoben werden, daß Gleichung (4) zunächst nur abgeleitet ist unter der Voraussetzung, daß die Bewegung geradlinig ist. Wenn man jedoch die Reihe der Schlüsse prüft, durch die wir zur Gleichung (4) gelangt sind, so findet man, daß von der Voraussetzung der Geradlinigkeit in Wirklichkeit kein Gebrauch gemacht wurde. Die Gleichung (4) gilt daher auch für jede krummlinige Bewegung, d.h. ganz allgemein.

Diese Erweiterung des Gültigkeitsbereiches von (4) führt uns nun selbst zu der Erkenntnis, daß durch die Gleichung (4), die den Betrag der Geschwindigkeit in jedem Falle richtig angibt, die Geschwindigkeit selbst doch nicht ausreichend charakterisiert werden kann. Denn offenbar gehört zur völligen Bestimmtheit derselben auch die Angabe der Richtung der Geschwindigkeit.

Diese Ergänzung ist leicht anzugeben. Denn da die Geschwindigkeit nach (4) der in der unendlich kleinen Zeit dt zurückgelegte Weg ds dividiert durch diese Zeit, ist („Weg pro Zeiteinheit"), so ist klar, daß die Richtung der Geschwindigkeit mit derjenigen des Bahnelementes ds zusammenfällt. Als positive Richtung des letzteren nehmen wir zweckmäßig diejenige, in der dasselbe von dem materiellen Punkte durcheilt wird. Wir können also sagen: Die Geschwindigkeit ist tangential zur Bahn gerichtet, weshalb man häufig auch $\frac{ds}{dt}$ als „Bahngeschwindigkeit" bezeichnet. Die Richtung von ds und daher die Bahngeschwindigkeit wird nach den Regeln der Geometrie bestimmt durch die Angabe der drei Winkel, die ds mit den Koordinatenachsen bildet und die wir durch (sx), (sy), (sz) bezeichnen wollen. Natürlich sind nur zwei von ihnen unabhängig, da die Relation besteht:

$$\cos^2(sx) + \cos^2(sy) + \cos^2(sz) = 1\,. \tag{5}$$

Durch die Angabe des Betrages $c = \frac{ds}{dt}$ und durch zwei der obigen Winkel ist daher die Geschwindigkeit charakterisiert; sie bedarf also der Angabe dreier unabhängiger Stücke.

8. Komponentendarstellung der Geschwindigkeit.

Die Darstellung der Geschwindigkeit durch ihren Betrag und durch zwei Winkel ist unsymmetrisch, insofern, als die drei Daten von verschiedener Natur sind. Es ist daher wünschenswert, auch eine symmetrische Darstellung zu erhalten. Diese gewinnen wir folgendermaßen: Statt das Bahnelement durch seinen Betrag ds und zwei Winkel zu be-

stimmen, können wir es offenbar auch durch seine drei Projektionen auf die Koordinatenachsen eindeutig und vollständig festlegen. Denn wenn wir die Projektionen der Reihe nach mit dx, dy, dz bezeichnen, so können wir daraus wieder den Betrag und die Winkel gewinnen. Denn es ist nach dem pythagoräischen Lehrsatze: $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, also der Betrag:

$$ds = +\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \tag{6}$$

und ferner sind die Kosinusse der Winkel, die sogenannten Richtungskosinusse:

$$\cos(sx) = \frac{dx}{ds}, \quad \cos(sy) = \frac{dy}{ds}, \quad \cos(sz) = \frac{dz}{ds}. \tag{7}$$

Diese Darstellung durch die drei Projektionen ist völlig symmetrisch und läßt sich auf die Geschwindigkeit übertragen. Wir wollen also die Geschwindigkeit auf die drei Achsen projizieren. Die Projektionen seien u, v, w. Dann ist offenbar:

$$u = \frac{ds}{dt}\cos(sx); \quad v = \frac{ds}{dt}\cos(sy); \quad w = \frac{ds}{dt}\cos(sz), \tag{8}$$

oder unter Berücksichtigung von (7)

$$u = \frac{ds}{dt}\,\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt}; \quad v = \frac{dy}{dt}; \quad w = \frac{dz}{dt}. \tag{9}$$

Es läßt sich nun genau wie für das Bahnelement zeigen, daß durch Angabe der Projektionen $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ die Geschwindigkeit völlig bestimmt ist. Denn zunächst folgt durch Quadrieren und Addieren der Projektionen unter Rücksicht auf (6):

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2.$$

Also ist der Betrag c der Geschwindigkeit:

$$c = \frac{ds}{dt} = +\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = +\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}, \tag{10}$$

(wobei die Wurzel stets mit dem Pluszeichen zu nehmen ist) und die Richtungskosinusse sind offenbar, wenn die Winkel mit (cx), $(cy,)$ (cz) bezeichnet werden:

$$\cos(cx) = \frac{dx/dt}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}} = \frac{u}{c}; \quad \cos(cy) = \frac{v}{c}; \quad \cos(cz) = \frac{w}{c}, \tag{11}$$

wodurch die Geschwindigkeit vollkommen bestimmt ist.

Die Größen

$$\left\{\begin{aligned} u &= \frac{dx}{dt}, \\ v &= \frac{dy}{dt}, \\ w &= \frac{dz}{dt} \end{aligned}\right. \tag{12}$$

nennt man die „rechtwinkeligen Komponenten" der Geschwindigkeit. Dieser Darstellung werden wir uns vorzugsweise bedienen.

In dem speziellen Falle, daß die Bewegung eben ist, kann man die Ebene derselben etwa mit der xy-Ebene zusammenfallen lassen; dann wird $z = w = 0$, und wir erhalten für die ebene Bewegung die Komponentendarstellung:

(12a) $$\begin{cases} u = \dfrac{dx}{dt}, \\ v = \dfrac{dy}{dt}, \end{cases}$$

Daraus der Betrag c der Geschwindigkeit:

(10a) $$c = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{u^2 + v^2},$$

und für die Richtungskosinusse:

(11a) $$\cos(cx) = \frac{u}{c}, \quad \cos(cy) = \frac{v}{c},$$

wobei offenbar $(cx) + (cy) = \pi/2$ ist.

Die Darstellung der Geschwindigkeit durch die Komponenten (12) liefert gleichzeitig die Rechtfertigung dafür, daß wir in Nr. 6 von den Funktionen (1) verlangt haben, daß sie erste Differentialquotienten nach der Zeit besitzen sollen, die selbst stetige Funktionen von t sein müssen. Denn wäre die erste Bedingung nicht erfüllt, so existieren ja die Größen $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ gar nicht, also auch kein als Geschwindigkeit zu bezeichnender Grenzwert $\frac{ds}{dt}$. Auch die Unstetigkeit von $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ würde zu ähnlichen Unzuträglichkeiten führen, wie wir sie in Nr. 6 besprochen haben.

9. Vektoren und Skalare; Vektoraddition.

Größen, wie die Geschwindigkeit oder das Bahnelement, die zu ihrer vollständigen Charakterisierung der Angabe von drei unabhängigen Stücken bedürfen, d.h. bei denen außer dem Betrage noch die Richtung anzugeben ist, nennt man „gerichtete Größen" oder „Vektoren".

Der letztere Name kommt daher, daß der Fahrstrahl oder Radiusvektor, d. h. die von einem festen Punkte O nach einem variablen Punkte P gezogene Gerade (Fig. 5) der einfachste Repräsentant der Klasse der gerichteten Größen ist.

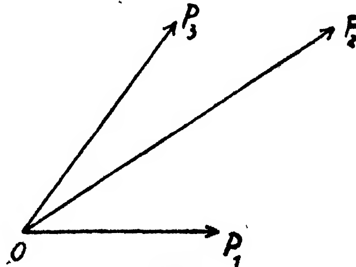


Fig. 5.

Im Gegensatz dazu nennt man diejenigen Größen, die durch Angabe ihres Betrages bereits völlig bestimmt sind, Skalare, weil

ihr Betrag in gewissen Einheiten, d. h. an einer gewissen Skala abgemessen wird.

Die Größen, mit denen man in der Algebra und Analysis zu tun hat, sind Skalare, und dafür gelten die allgemeinen Rechenregeln, die wir dort benutzen, z. B. die Gesetze der Addition und Multiplikation.

Um die Vektoreigenschaft einer Größe zu charakterisieren, bezeichnen wir sie mit fettgedruckten deutschen Buchstaben; also werden wir eine Geschwindigkeit, wenn wir sie der Größe und Richtung nach charakterisieren wollen, durch $\mathfrak{c}$ bezeichnen, während c oder $|\mathfrak{c}|$ lediglich den Betrag der Geschwindigkeit bedeuten sollen. So verfahren wir allgemein: $\mathfrak{A}$ bedeutet einen Vektor vom bestimmten Betrage und bestimmter Richtung, $|\mathfrak{A}| = A$ lediglich seinen Betrag. Geometrisch können wir einen Vektor durch eine gerade Linie darstellen, deren durch einen Pfeil markierte positive Richtung mit der Richtung des Vektors übereinstimmt, wie dies in Figur 5 bereits ausgeführt ist, während die Länge der Linie den Betrag des Vektors angibt. Zwei Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind also nur dann gleich, wenn Betrag und Richtung übereinstimmen, und diese gleichzeitige Aussage machen wir, wenn wir die Vektorgleichung hinschreiben:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B}\,. \tag{13}$$

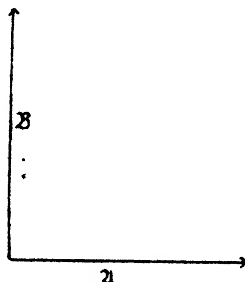


Fig. 6.

Z. B. sind die Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ der Fig. 6 nicht gleich, obwohl ihr Betrag derselbe ist: dagegen gilt dafür:

$$\left\{ \begin{array}{l} |\mathfrak{A}| = |\mathfrak{B}| \quad \text{oder} \\ A = B\,. \end{array} \right. \tag{14}$$

Ein Vektor $\mathfrak{A}$ umfaßt also in einem Symbol drei unabhängige Größen (Betrag und zwei Winkel). Diese Zusammenfassung ist bequem, weil sie eine kurze Ausdrucksweise erlaubt. Ähnliche Zusammenfassungen hat man in der Mathematik schon bei den komplexen Größen eingeführt: Statt mit einer Zahl wird in der Theorie dieser komplexen Größen mit einem Zahlenpaar gerechnet. Dabei müssen die Rechenoperationen, z. B. die Summation zweier Zahlenpaare, erst neu definiert werden, was man natürlich zweckmäßig so macht, daß sie als Spezialfälle die Rechenoperationen für die einzelnen Zahlen enthalten. Z. B.: Was ist die Summe zweier komplexer Zahlen $z_1 = a_1 + b_1 i$ und $z_2 = a_2 + b_2 i$?

Man definiert die Summe als diejenige komplexe Zahl $z = a + b\,i$, für die gleichzeitig ist:

$$\left\{ \begin{array}{l} a = a_1 + a_2\,, \\ b = b_1 + b_2\,, \end{array} \right. \tag{15}$$

und diese beiden Aussagen können in der einen Gleichung zwischen Zahlenpaaren zusammengefaßt werden:

$$z = z_1 + z_2\,,$$

oder ausführlich

(16) $$a + b\,i = a_1 + b_1\,i + a_2 + b_2\,i = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\,i\,.$$

Ganz analog müssen wir verfahren, wenn wir mit Vektoren rechnen wollen, die ja Zahlentripel sind.

Was die Summe zweier Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ist, kann nur durch Definition festgesetzt werden. Wir können nun $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ dadurch gegeben denken, daß ihre rechtwinkeligen Komponenten, d. h. die Projektionen auf die Achsen gegeben sind; diese bezeichnen wir durch die angefügten Indizes x, y oder z, also sind z. B. die Komponenten von $\mathfrak{A}$:

$$\mathfrak{A}_x,\ \mathfrak{A}_y,\ \mathfrak{A}_z.$$

Wir wollen nun definieren: Unter der Summe zweier Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ wollen wir einen Vektor $\mathfrak{R}$ verstehen, dessen Komponenten mit denjenigen von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ folgendermaßen zusammenhängen:

(17) $$\begin{cases} \mathfrak{R}_x = \mathfrak{A}_x + \mathfrak{B}_x, \\ \mathfrak{R}_y = \mathfrak{A}_y + \mathfrak{B}_y, \\ \mathfrak{R}_z = \mathfrak{A}_z + \mathfrak{B}_z. \end{cases}$$

Sind diese drei Gleichungen gleichzeitig erfüllt, so schreiben wir:

(18) $$\mathfrak{R} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}\,,$$

indem wir in der einen Gleichung (18) zwischen Vektoren, d. h. Zahlentripeln, die drei Gleichungen (17) zwischen einzelnen Zahlen zusammenfassen. Ebenso wie eine Gleichung zwischen komplexen Größen stets zwei Gleichungen zwischen reellen Größen äquivalent ist, so ist eine Vektorgleichung äquivalent drei Gleichungen zwischen ungerichteten Größen.

Durch die Gleichung (17) ist der neue Vektor $\mathfrak{R}$, die Summe von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ oder der „resultierende" Vektor völlig bestimmt. Denn da $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, d. h. die sechs Komponenten $\mathfrak{A}_x \ldots \mathfrak{B}_x \ldots \mathfrak{B}_z$ gegeben sind, bedarf es nur der Ausführung der in (17) geforderten Additionen, um die Größen $\mathfrak{R}_x$, $\mathfrak{R}_y$, $\mathfrak{R}_z$ zu erhalten, wodurch nach dem Früheren $\mathfrak{R}$ selbst nach Größe und Richtung bestimmt ist. Denn es ist offenbar der Betrag von $\mathfrak{R}$:

(19) $$|\mathfrak{R}| = R = +\sqrt{\mathfrak{R}_x^2 + \mathfrak{R}_y^2 + \mathfrak{R}_z^2} = +\sqrt{(\mathfrak{A}_x + \mathfrak{B}_x)^2 + (\mathfrak{A}_y + \mathfrak{B}_y)^2 + (\mathfrak{A}_z + \mathfrak{B}_z)^2}\,,$$

und die Richtungskosinusse sind:

(20) $$\cos(\mathfrak{R}\,x) = \frac{\mathfrak{R}_x}{R}\,, \qquad \cos(\mathfrak{R}\,y) = \frac{\mathfrak{R}_y}{R}\,, \qquad \cos(\mathfrak{R}\,z) = \frac{\mathfrak{R}_z}{R}\,.$$

Analytisch ist damit alles vollkommen erledigt. Wir wollen aber des Folgenden wegen den Vorgang der Addition zweier Vektoren noch geometrisch deuten. Wir behaupten: Wenn man den Vektor $\mathfrak{B}$ parallel mit sich selbst so verschiebt, daß sein Anfangspunkt auf den Endpunkt von $\mathfrak{A}$ fällt, so stellt die Verbindungslinie

vom Anfangspunkte von $\mathfrak{A}$ nach dem Endpunkte von $\mathfrak{B}$ der Größe und Richtung nach den Vektor $\mathfrak{R} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ dar (Fig. 7).

In der Fig. 7 stellen OP bzw. OP' der Größe und Richtung nach die beiden gegebenen Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ vor. Durch den Endpunkt P von $\mathfrak{A}$ ziehen wir die Gerade PP'' der Größe und Richtung nach gleich OP', also identisch mit dem Vektor $\mathfrak{B}$; das ist die Ausführung der vorhin geforderten Konstruktion. Dann wird behauptet, daß OP'' der

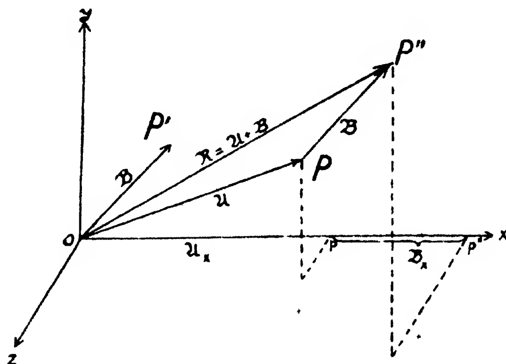


Fig. 7.

Größe und Richtung nach $\mathfrak{R} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ darstellt. In der Tat: Bilden wir z. B. die Projektionen von OP und PP'', d. h. von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, auf die x-Achse. Das liefert die Strecken $Op = \mathfrak{A}_x$ und $pp'' = \mathfrak{B}_x$. Ferner ist offenbar die ganze Strecke Op'' gleich der Projektion der Geraden OP''. Nun besteht offenbar die Relation:

$$Op'' = Op + pp'',$$

oder, wenn wir die Projektion von OP'' auf die x-Achse durch $(OP'')_x$ bezeichnen:

$$(OP'')_x = \mathfrak{A}_x + \mathfrak{B}_x .$$

Folglich ist nach den Gleichungen (17) $(OP'')_x$ die x-Komponente der Summe von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$. Genau dieselbe Überlegung gilt für die y- und z-Achse. Man erhält dort: $(OP'')_y = y$-Komponente und $(OP'')_z =$ z-Komponente der Summe von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$; also ist endlich (OP'') die Summe von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, d. h. gleich $\mathfrak{R}$. Es möge bemerkt werden, daß mittels derselben Konstruktion bekanntlich auch die Summe zweier komplexer Zahlen geometrisch gebildet werden kann.

Nachdem dies einmal festgestellt ist, ist es leicht, mehr als zwei Vektoren zu addieren. Die Summe oder die Resultierende $\mathfrak{R}$ der Vektoren $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \mathfrak{E} \ldots$ ist derjenige Vektor, der die folgenden Bedingungen erfüllt, die ganz analog sind (17):

$$(21)\quad \begin{cases} \mathfrak{R}_x = \mathfrak{A}_x + \mathfrak{B}_x + \mathfrak{C}_x + \mathfrak{D}_x + \cdots \\ \mathfrak{R}_y = \mathfrak{A}_y + \mathfrak{B}_y + \mathfrak{C}_y + \mathfrak{D}_y + \cdots \\ \mathfrak{R}_z = \mathfrak{A}_z + \mathfrak{B}_z + \mathfrak{C}_z + \mathfrak{D}_z + \cdots \end{cases}$$

Dadurch ist genau wie vorhin der Vektor $\mathfrak{R}$ der Größe und Richtung nach bestimmt. Für den Betrag folgt nämlich:

$$(22)\quad \begin{cases} |\mathfrak{R}| = R = +\sqrt{\mathfrak{R}_x^2 + \mathfrak{R}_y^2 + \mathfrak{R}_z^2} = \\ \sqrt{(\mathfrak{A}_x + \mathfrak{B}_x + \ldots)^2 + (\mathfrak{A}_y + \mathfrak{B}_y + \ldots)^2 + (\mathfrak{A}_z + \mathfrak{B}_z + \ldots)^2}. \end{cases}$$

und für die Richtungskosinusse:

$$(23)\quad \cos(\mathfrak{R}\,x) = \frac{\mathfrak{A}_x + \mathfrak{B}_x + \ldots}{R}, \qquad \cos(\mathfrak{R}\,y) = \frac{\mathfrak{R}_y}{R}, \qquad \cos(\mathfrak{R}\,z) = \frac{\mathfrak{R}_z}{R}.$$

Geometrisch läßt sich diese Summation in der Weise ausführen, daß man zuerst zwei Vektoren ($\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$) nach der vorhin geschilderten Weise vereinigt, dann $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{C}$ usf. Das liefert, wenn man die Zwischenkonstruktion fortläßt, wie man sich leicht überzeugt, folgende Konstruktionsregel: Man setzt die Vektoren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ in beliebiger Reihenfolge aneinander (wie es vorhin mit zweien ge-

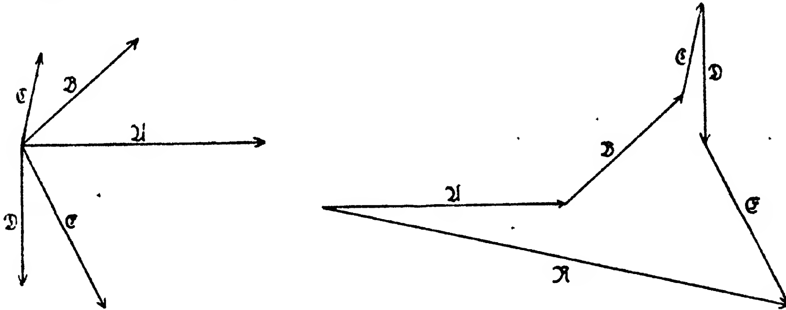


Fig. 8.

schehen ist); die Verbindungslinie vom Anfangspunkt des ersten bis zum Endpunkte des letzten Vektors, die das entstandene Polygon schließt, ist der Größe und Richtung nach der gesuchte Vektor $\mathfrak{R} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \ldots$

In Fig. 8 ist in dieser Weise die Addition von fünf Vektoren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ ausgeführt.

In dem Spezialfalle, daß das Polygon geschlossen ist, d. h. der Endpunkt des letzten Vektors mit dem Anfangspunkt des ersten zusammenfällt, ist die Resultante oder die Summe gleich Null.

Die Subtraktion zweier Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ läßt sich in analoger Weise definieren; sie läßt sich stets auf eine Addition zurückführen. Es sei z. B. gefordert, einen Vektor $\mathfrak{R}$ zu bestimmen, derart, daß

$$(24)\quad \mathfrak{R} = \mathfrak{A} - \mathfrak{B}.$$

Nun ist $-\mathfrak{B}$ ein Vektor, der denselben Betrag, aber die umgekehrte Richtung wie $+\mathfrak{B}$ hat. Statt also $+\mathfrak{B}$ zu subtrahieren, kann man $-\mathfrak{B}$ addieren. Man kann ja (24) so schreiben:

(24a) $$\mathfrak{R} = \mathfrak{A} + (-\mathfrak{B}) .$$

Sind also die Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gegeben, so bildet man zunächst $-\mathfrak{B}$, und addiert $\mathfrak{A}$ und $-\mathfrak{B}$ nach den bereits besprochenen Regeln. Eine derartige Konstruktion ist in Fig. 9 durchgeführt, in die gleichzeitig zum Vergleich die Summe $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ eingetragen ist.

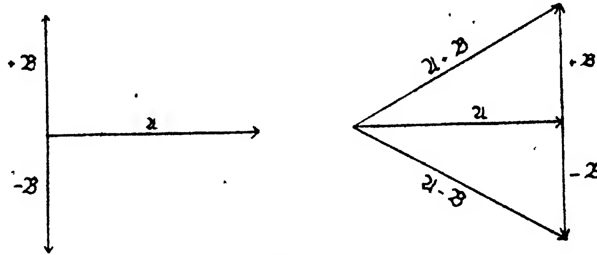


Fig. 9.

Wir wollen nun die Regeln der Vektoraddition anwenden auf den Fall, daß wir zwei oder mehrere, sagen wir n gleiche Vektoren zu addieren haben. Es soll also $\mathfrak{R}$ so gefunden werden, daß:

(25) $$\mathfrak{R} = \mathfrak{A} + \mathfrak{A} + \ldots = n \cdot \mathfrak{A}$$

ist. Wenn man die Konstruktion ausführt, so sieht man, daß $\mathfrak{R}$ in diesem Falle ein Vektor von derselben Richtung wie $\mathfrak{A}$, aber von n-mal größerem Betrage ist. In Fig. 10 ist dies Resultat für $n = 3$ veranschaulicht.

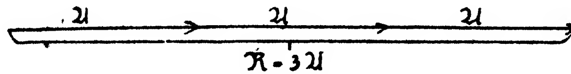


Fig. 10.

Man sieht daraus, daß Vektoren gleicher Richtung addiert werden wie Skalare; die Vektoraddition artet in diesem Falle in die algebraische Addition aus.

10. Zusammensetzung und Zerlegung von Geschwindigkeiten.

Wir wollen uns denken, an einem substantiellen Punkte seien mehrere Geschwindigkeiten wirksam. Dann entsteht die Aufgabe, die resultierende Geschwindigkeit oder die Summe der Einzelgeschwindigkeiten zu bestimmen. Zunächst ist hervorzuheben, daß ein substantieller Punkt natürlich in Wirklichkeit nur *eine* Geschwindigkeit besitzt; aber es

kann unter Umständen vorteilhaft sein, zu fingieren, diese eine Geschwindigkeit sei die Summe oder Resultante mehrerer Komponenten, die wir dann gleichzeitig an dem substantiellen Punkte wirkend denken müssen. Ein Beispiel dafür bietet die Darstellung der Geschwindigkeit $\mathfrak{c}$ durch ihre drei rechtwinkligen Komponenten $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ oder in Vektorschreibweise $\mathfrak{c}_x$, $\mathfrak{c}_y$, $\mathfrak{c}_z$, die wir in Nr. (8) besprochen haben. Die wirklich vorhandene Geschwindigkeit kann als die Vektorsumme der drei Geschwindigkeiten $\mathfrak{c}_x$, $\mathfrak{c}_y$, $\mathfrak{c}_z$ aufgefaßt werden, und in diesem Sinne kann man natürlich auch sagen, der betrachtete substantielle Punkt habe gleichzeitig die drei Geschwindigkeiten $\mathfrak{c}_x$, $\mathfrak{c}_y$, $\mathfrak{c}_z$. Eine solche Ausdrucksweise ist ein mathematischer Kunstgriff, der von großer praktischer Bedeutung ist. Eignen wir uns dieselbe an, so haben wir das Problem vor uns, mehrere an einem Körper angreifende Geschwindigkeiten zu ihrer Summe zu vereinen, oder umgekehrt, die Geschwindigkeit eines substantiellen Punktes in Komponenten zu zerlegen.

Da die Geschwindigkeit ein Vektor ist, so geschieht die Zusammensetzung von Geschwindigkeiten nach den Regeln der Vektoraddition, die wir in Nr. 9 gelernt haben. Danach verstehen wir unter der Summe $\mathfrak{c}$ mehrerer Geschwindigkeiten $\mathfrak{c}'\mathfrak{c}''\mathfrak{c}'''\ldots$ denjenigen Vektor, der die Bedingungen erfüllt:

$$(26)\qquad \begin{cases} \mathfrak{c}_x = \mathfrak{c}_x' + \mathfrak{c}_x'' + \mathfrak{c}_x''' + \ldots \\ \mathfrak{c}_y = \mathfrak{c}_y' + \mathfrak{c}_y'' + \mathfrak{c}_y''' + \ldots \\ \mathfrak{c}_z = \mathfrak{c}_z' + \mathfrak{c}_z'' + \mathfrak{c}_z''' + \ldots \end{cases}$$

oder, wenn die rechtwinkeligen Komponenten von $\mathfrak{c}$ usw. durch u, v, w usw. bezeichnet werden:

$$(27)\qquad \begin{cases} u = u' + u'' + u''' + \ldots = \Sigma u', \\ v = v' + v'' + v''' + \ldots = \Sigma v', \\ w = w' + w'' + w''' + \ldots = \Sigma w'. \end{cases}$$

Der Betrag c der resultierenden Geschwindigkeit ist also:

$$(28)\qquad c = |\mathfrak{c}| = +\sqrt{u^2 + v^2 + w^2} = +\sqrt{(\Sigma u')^2 + (\Sigma v')^2 + (\Sigma w')^2}.$$

und die Richtungskosinusse sind:

$$(29)\qquad \cos(\mathfrak{c}\,x) = \frac{\Sigma u'}{c}, \quad \cos(\mathfrak{c}\,y) = \frac{\Sigma v'}{c}, \quad \cos(\mathfrak{c}\,z) = \frac{\Sigma w'}{c}.$$

Sind speziell zwei Geschwindigkeiten $\mathfrak{c}'$ und $\mathfrak{c}''$ zusammenzusetzen, so haben wir:

$$u = u' + u'',$$
$$v = v' + v'',$$
$$w = w' + w'',$$

also ist der Betrag der resultierenden Geschwindigkeit zu berechnen aus der Gleichung:

$$c^2 = (u'^2 + u''^2) + (v'^2 + v''^2) + (w'^2 + w''^2) + 2(u'u'' + v'v'' + w'w''),$$

oder

$$c^2 = c'^2 + c''^2 + 2\,c'c''\cos\vartheta\,, \tag{30}$$

wenn wir mit $c'c''$ die Beträge der Geschwindigkeiten $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{c}''$ und mit ϑ den Winkel zwischen $\mathfrak{c}'$ und $\mathfrak{c}''$ bezeichnen (Fig. 11).

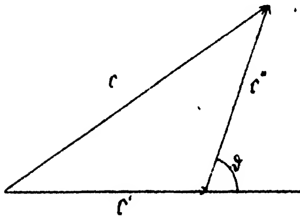


Fig. 11.

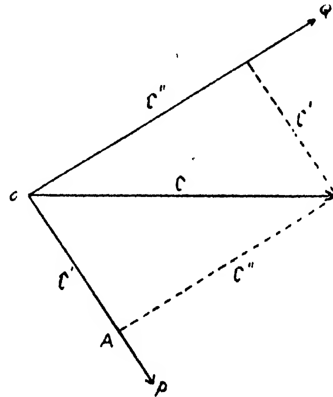


Fig. 12.

Denn der Ausdruck $\frac{u'u'' + v'v'' + w'w''}{c'c''}$ ist gleich dem Kosinus des Winkels ϑ. Die Richtigkeit der Gleichung (30) kann man übrigens sofort aus der Fig. 11 erkennen.

Umgekehrt kann verlangt werden, eine Geschwindigkeit $\mathfrak{c}$ in zwei Komponenten $\mathfrak{c}', \mathfrak{c}''$ von gegebener Richtung zu zerlegen. Z. B. soll $\mathfrak{c}$ nach den Richtungen OP und OQ in Fig. 12 zerlegt werden:

Die Aufgabe ist natürlich nur lösbar, wenn OP und OQ mit $\mathfrak{c}$ in derselben Ebene liegen. In diesem Falle erhält man die Lösung sofort, indem man durch den Endpunkt von $\mathfrak{c}$ Parallelen zu OP und OQ zieht. Dann stellen offenbar die durch die Parallelen auf OP und OQ abgeschnittenen Stücke $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{OB}$ der Größe und Richtung nach die gesuchten Komponenten dar.

11. Verhalten der Geschwindigkeit bei Änderung des Koordinatensystems.

Sehr wichtig ist die Frage, wie die Geschwindigkeitskomponenten sich ändern, wenn man von einem Koordinatensysteme $(x\,y\,z)$ zu einem anderen $(\xi\,\eta\,\zeta)$ übergeht.

Wir wollen zunächst annehmen, die Achsen $(\xi\,\eta\,\zeta)$ seien den Achsen $(x\,y\,z)$ parallel, aber der Anfangspunkt von $(\xi\,\eta\,\zeta)$ falle nicht zusammen

mit demjenigen von $(x\,y\,z)$, sondern habe im System $(x\,y\,z)$ die Koordinaten a, b, c (Fig. 13).

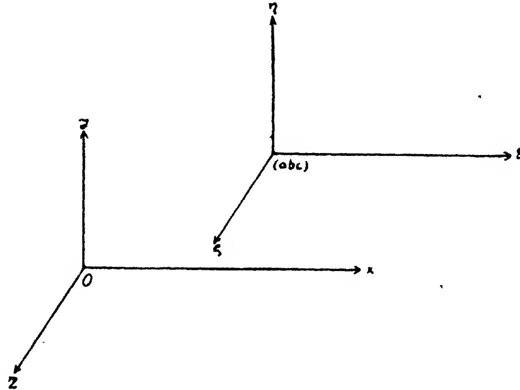


Fig. 13.

Dann bestehen offenbar folgende Gleichungen:

$$(31) \qquad \begin{cases} x = a + \xi, \\ y = b + \eta, \\ z = c + \zeta. \end{cases}$$

Differentiieren wir nach t, so folgt, da a, b, c Konstanten sind:

$$(32) \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{d\xi}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{d\eta}{dt}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{d\zeta}{dt}.$$

Darin sind die linken Seiten die Geschwindigkeitskomponenten im System $(x\,y\,z)$, die rechten Seiten diejenigen im System $(\xi\,\eta\,\zeta)$. Da sie gleich sind, so folgt der Satz, daß eine Parallelverschiebung des Koordinatensystems die Geschwindigkeitskomponenten nicht ändert.

Nun wollen wir zweitens den Fall nehmen, daß das System $(\xi\,\eta\,\zeta)$ zwar den nämlichen Anfangspunkt mit $(x\,y\,z)$ hat, daß aber die ξ-, η-, ζ-Richtungen gegen die x-, y-, z-Richtungen gedreht sind (Fig. 14).

Dann bestehen, wie aus der analytischen Geometrie bekannt ist, folgende Relationen zwischen $(\xi\,\eta\,\zeta)$ und $(x\;y\;z)$:

$$(33) \qquad \begin{cases} \xi = x\cos\alpha_1 + y\cos\beta_1 + z\cos\gamma_1, \\ \eta = x\cos\alpha_2 + y\cos\beta_2 + z\cos\gamma_2, \\ \zeta = x\cos\alpha_3 + y\cos\beta_3 + z\cos\gamma_3. \end{cases}$$

Dabei sind α_1, β_1, γ_1 die Winkel, welche die ξ-Achse mit den respektiven Achsen des $x\,y\,z$-Systems bildet, und analoge Bedeutung haben die übrigen Winkel. Löst man die Gleichungen nach $x\,y\,z$ auf, so folgt:

$$(34)\quad \begin{cases} x = \xi \cos \alpha_1 + \eta \cos \alpha_2 + \zeta \cos \alpha_3 , \\ y = \xi \cos \beta_1 + \eta \cos \beta_2 + \zeta \cos \beta_3 . \\ z = \xi \cos \gamma_1 + \eta \cos \gamma_2 + \zeta \cos \gamma_3 . \end{cases}$$

Die Differentiation von (33) ergibt nun:

$$(35)\quad \begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = \frac{dx}{dt} \cos\alpha_1 + \frac{dy}{dt} \cos\beta_1 + \frac{dz}{dt} \cos\gamma_1 , \\ \frac{d\eta}{dt} = \frac{dx}{dt} \cos\alpha_2 + \frac{dy}{dt} \cos\beta_2 + \frac{dz}{dt} \cos\gamma_2 , \\ \frac{d\zeta}{dt} = \frac{dx}{dt} \cos\alpha_3 + \frac{dy}{dt} \cos\beta_3 + \frac{dz}{dt} \cos\gamma_3 . \end{cases}$$

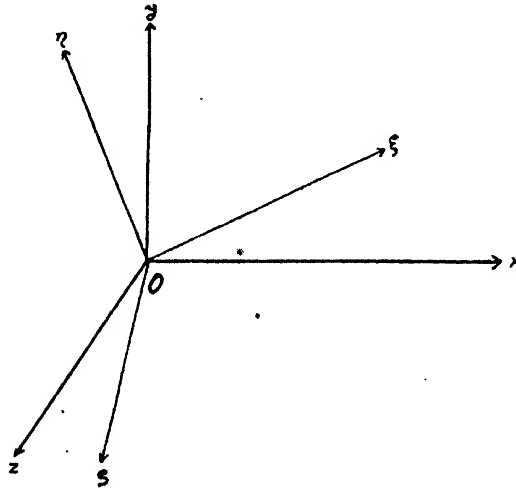


Fig. 14.

Diese Gleichungen drücken die Komponenten der Geschwindigkeit nach den neuen Achsen, nämlich $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$, aus durch die Koeffizienten der Koordinatentransformation (33) und die Komponenten der Geschwindigkeit im alten System. Man erkennt, daß **bei einer Drehung des Koordinatensystems die Geschwindigkeitskomponenten sich gerade so transformieren wie die Koordinaten.**

Wir wollen nun den Spezialfall betrachten, daß die ζ-Achse mit der z-Achse zusammenfällt; dann ist in (33) zu setzen:

$$\gamma_3 = 0, \; \alpha_3 = \beta_3 = \gamma_1 = \gamma_2 = \pi/_2 ,$$

und wir erhalten die speziellen Transformationsgleichungen, die einer Drehung um die z-Achse entsprechen:

$$(36)\quad \begin{cases} \xi = x\cos\alpha_1 + y\cos\beta_1\,, \\ \eta = x\cos\alpha_2 + y\cos\beta_2\,, \\ \zeta = z\,. \end{cases}$$

Ferner ist offenbar nach Fig. 15:

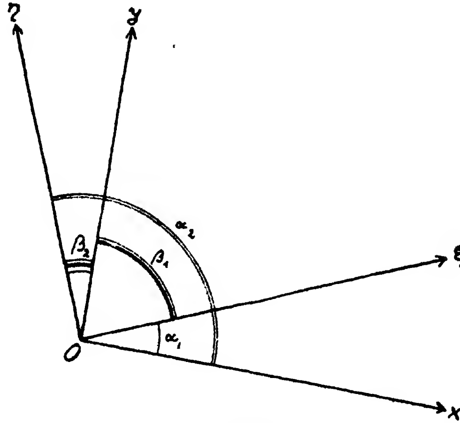


Fig. 15.

$$(37)\quad \begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 = \pi/_2\,, \\ \alpha_2 = \pi/_2 + \alpha_1\,, \\ \beta_2 = \pi/_2 - \beta_1\,. \end{cases}$$

Damit werden die Transformationsgleichungen (36):

$$(38)\quad \begin{cases} \xi = x\cos\alpha_1 + y\sin\alpha_1\,, \\ \eta = -x\sin\alpha_1 + y\cos\alpha_1\,, \\ \zeta = z \end{cases}$$

und dann folgt für die neuen Geschwindigkeitskomponenten $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$:

$$(39)\quad \begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = \frac{dx}{dt}\cos\alpha_1 + \frac{dy}{dt}\sin\alpha_1\,, \\ \frac{d\eta}{dt} = -\frac{dx}{dt}\sin\alpha_1 + \frac{dy}{dt}\cos\alpha_1\,, \\ \frac{d\zeta}{dt} = \frac{dz}{dt}\,. \end{cases}$$

Ein wichtiger Fall, in dem wir diese Formeln anwenden können, ist derjenige, daß die Bewegung eine e b e n e ist. Nehmen wir die dadurch bestimmte Ebene zur Ebene der $(x\,y)$ bzw. der $(\xi\,\eta)$, so können wir $z = \zeta = \frac{dz}{dt} = \frac{d\zeta}{dt} = 0$ setzen, und die beiden ersten Gleichungen (39) geben dann die Transformation für die ebene Geschwindigkeit an.

Wir haben hier das Problem erledigt, wie die Geschwindigkeitskomponenten sich transformieren, wenn das Koordinatensystem einmal eine Parallelverschiebung, einmal eine Drehung erfährt. Dabei waren die Koeffizienten der Transformationsgleichungen (31) und (33) als unabhängig von der Zeit vorausgesetzt, d. h. das alte und das neue System waren relativ zueinander in Ruhe. Wir werden später den Fall untersuchen (Nr. 20), daß das System $(\xi\,\eta\,\zeta)$ sich parallel dem System $(x\,y\,z)$ mit einer bestimmten Geschwindigkeit verschiebt und daß zweitens das System $(\xi\,\eta\,\zeta)$ gegen das System $(x\,y\,z)$ mit bestimmter Winkelgeschwindigkeit rotiert. Das kommt darauf hinaus, daß die Koeffizienten der Transformationsgleichungen dann als Funktionen der Zeit zu behandeln sind.

12. Darstellung der Geschwindigkeit in Polarkoordinaten.

Von den Überlegungen der vorhergehenden Nummer wollen wir eine Anwendung machen, um die Geschwindigkeitskomponenten in Polarkoordinaten zu finden.

Zunächst wollen wir den Fall der ebenen Bewegung in der xy-Ebene behandeln. Dann haben wir (Fig. 16) folgende Anordnung:

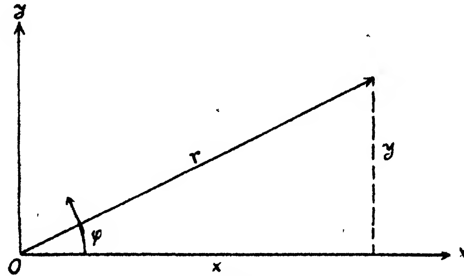


Fig. 16.

Der Punkt $(x\,y)$ wird bestimmt durch den Radiusvektor r und den Winkel φ. Die Richtungen von r und φ sind senkrecht zueinander, wie in Fig. 16 angedeutet ist. Die Transformationsgleichungen sind:

$$(40) \qquad \begin{cases} x = r\cos\varphi\,, \\ y = r\sin\varphi\,. \end{cases}$$

Durch Differentiation folgt:

$$(41) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dr}{dt}\cos\varphi - r\,\dfrac{d\varphi}{dt}\cdot\sin\varphi\,, \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dr}{dt}\sin\varphi + r\,\dfrac{d\varphi}{dt}\cdot\cos\varphi\,, \end{cases}$$

oder, wenn man nach $\frac{dr}{dt}$ und $r\,\frac{d\varphi}{dt}$ auflöst:

$$
(42) \qquad \begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = \dfrac{dx}{dt}\cos\varphi + \dfrac{dy}{dt}\sin\varphi, \\ r\dfrac{d\varphi}{dt} = -\dfrac{dx}{dt}\sin\varphi + \dfrac{dy}{dt}\cos\varphi. \end{cases}
$$

Das sind zwei Gleichungen von derselben Form, wie die beiden ersten Gleichungen (39), nur daß rechts statt α_1 hier φ tritt. Also können wir $\frac{dr}{dt}$ und $r\frac{d\varphi}{dt}$ analog wie $\frac{d\xi}{dt}$ und $\frac{d\eta}{dt}$ als die Geschwindigkeitskomponenten in unserem neuen System (r, φ) betrachten, und zwar ist offenbar $\frac{dr}{dt}$ die Geschwindigkeit parallel dem Radiusvektor, die sogenannte „Radialgeschwindigkeit" $\mathfrak{c}_r$, und $r\frac{d\varphi}{dt}$ die sogenannte „Transversalgeschwindigkeit" $\mathfrak{c}_\varphi$, die senkrecht zur ersten in der Richtung wachsender φ (Fig. 16) gerichtet ist, was auch leicht direkt nach (41) zu verifizieren ist. Wir erhalten also für die Komponenten der ebenen Geschwindigkeit in Polarkoordinaten:

$$
(43) \qquad \begin{cases} \mathfrak{c}_r = \dfrac{dr}{dt}, \\ \mathfrak{c}_\varphi = r\dfrac{d\varphi}{dt}. \end{cases}
$$

Die Art der Zerlegung von $\mathfrak{c}$, das ja parallel der Bahnkurve s gerichtet ist, wird durch Fig. 17 veranschaulicht.

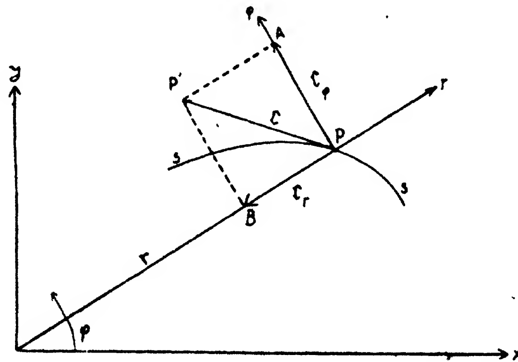


Fig. 17.

In dieser Figur stellt PP' der Größe und Richtung nach $\mathfrak{c}$ vor, das tangential zu s im Punkte P gerichtet ist; Pr und $P\varphi$ sind die positiven Richtungen von r und φ, und $\overrightarrow{PA}$ folglich der Größe und Richtung nach $\mathfrak{c}_\varphi$, $\overrightarrow{PB}$ ebenso $\mathfrak{c}_r$. Man hätte die Zerlegung (43) natürlich auch direkt, ohne Bezugnahme auf die Resultate der vorhergehenden Nummer erhalten können. Denn eine unendlich kleine Bewegung eines Punktes

(r, φ) kann man sich stets darstellen durch die beiden Komponenten dr (bei konstantem φ, also **radiale** Bewegung), und $r\,d\varphi$ (bei konstantem r, also **transversale** Bewegung auf einem Kreisbogen, senkrecht zur ersten). Denkt man sich diese Verrückungen in der Zeit dt ausgeführt, so hat man sofort die Komponenten $\frac{dr}{dt}$ und $r\,\frac{d\varphi}{dt}$, die mit (43) übereinstimmen.

Wir wollen nun zur Darstellung der Geschwindigkeit in räumlichen Polarkoordinaten (r, φ, ϑ) übergehen (Fig. 18).

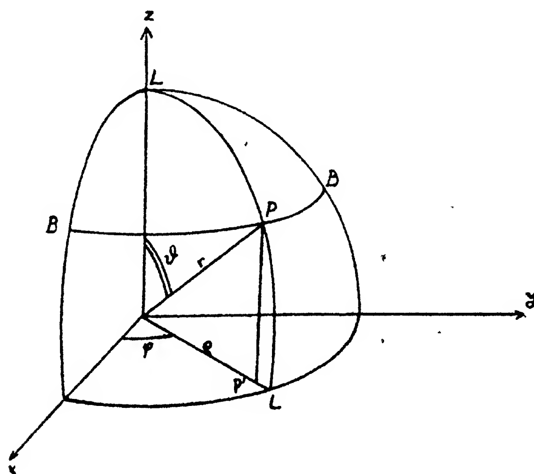


Fig. 18.

Wir charakterisieren die Lage des Punktes $P\,(xyz)$ erstens durch Angabe seiner Entfernung r vom Anfangspunkte 0. Dadurch wird eine Kugelfläche bestimmt, von der ein Oktant in Fig. 18 gezeichnet ist. Ferner ziehen wir durch P eine Ebene, parallel der xy-Ebene, die die Kugel in der Kurve BB schneidet, die ein Teil eines sogenannten Breitenkreises ist. Und endlich können wir durch P und die Projektion $\varrho = OP'$ von r auf die xy-Ebene eine Ebene legen, die die Kugel in der Kurve LL schneidet: das ist ein sogenannter Meridiankreis. Unter φ verstehen wir den Winkel zwischen x-Achse und Meridianebene; also ist nach Fig. 18:

$$x = \varrho \cos \varphi ,$$
$$y = \varrho \sin \varphi .$$

Man nennt φ die „**geographische Länge**" oder das „**Azimut**".

Ferner ist ϑ der Winkel zwischen r und z, der in der Meridianebene liegt; man nennt ϑ die „**Zenitdistanz**"; sie ist offenbar das Komplement der sogenannten „**geographischen Breite**". Daher ist:

$$z = r\cos\vartheta\,,$$
$$\varrho = r\sin\vartheta\,.$$

Also ist schließlich:

$$(44)\qquad \begin{cases} x = r\sin\vartheta\cos\varphi\,, \\ y = r\sin\vartheta\sin\varphi\,, \\ z = r\cos\vartheta\,. \end{cases}$$

Dabei ist stets:

$$0 \leqq \vartheta \leqq \pi\,,$$
$$0 \leqq \varphi \leqq 2\pi\,.$$

Der Punkt P kann nun drei zueinander senkrechte Verrückungen erleiden, aus denen jede Verschiebung zusammengesetzt gedacht werden kann:

1. längs des Radius (φ und ϑ konstant);
2. auf einem Breitenkreise (r und ϑ konstant);
3. auf einem Meridiankreise (r und φ konstant).

Eine unendlich kleine Verrückung längs des Radius wird gemessen durch dr; eine Länge auf dem Meridiankreise durch $r\vartheta$, also eine unendlich kleine Verrückung durch $r\,d\vartheta$. Endlich ist der Radius eines Breitenkreises offenbar gleich $\varrho = r\sin\vartheta$, also eine Länge auf demselben wird gemessen durch $r\sin\vartheta\cdot\varphi$, und daher eine unendlich kleine Verrückung auf dem Breitenkreise durch $r\sin\vartheta\cdot d\varphi$. Denken wir diese drei unendlich kleinen Verschiebungen in der Zeit dt gemacht, so haben wir die drei Geschwindigkeitskomponenten:

$$(45)\qquad \begin{cases} \mathfrak{c}_r = \dfrac{dr}{dt} & \text{(Radialgeschwindigkeit);} \\ \mathfrak{c}_\vartheta = r\dfrac{d\vartheta}{dt} & \text{(Meridiankreisgeschwindigkeit);} \\ \mathfrak{c}_\varphi = r\sin\vartheta\dfrac{d\varphi}{dt} & \text{(Breitenkreisgeschwindigkeit).} \end{cases}$$

13. Der Begriff der Beschleunigung.

Wir wollen eine geradlinige Bewegung eines substantiellen Punktes betrachten; der Betrag seiner Geschwindigkeit — um ihre Richtung brauchen wir uns hier nicht zu kümmern, da sie sich nicht ändert — sei mit der Zeit veränderlich, und zwar der Einfachheit halber zunächst eine lineare Funktion der Zeit; also:

$$c = at + b\,.$$

Wir können aus dieser Gleichung die Zunahme (oder Abnahme, wenn a negativ ist; da wir aber Abnahmen stets als negative Zunahmen rechnen, brauchen wir das in Zukunft nicht mehr besonders hervorzuheben) der Geschwindigkeit in der Zeiteinheit bestimmen. Dazu be-

trachten wir den Wert von c zu zwei beliebigen Zeiten t_1 und t_2, die wir durch die entsprechenden Indizes charakterisieren wollen; also:

$$c_1 = a\,t_1 + b;$$

$$c_2 = a\,t_2 + b;$$

durch Subtraktion folgt:

$$c_2 - c_1 = a\,(t_2 - t_1)\,,$$

also für die Geschwindigkeitsänderung pro Zeiteinheit:

$$a = \frac{c_2 - c_1}{t_2 - t_1}\,.$$

Wie groß bei diesem Verfahren die Zeitdifferenz $t_2 - t_1$ genommen wird, ist offenbar gleichgültig, weil eben die Größe a eine Konstante ist. Wir nennen die Zunahme der Geschwindigkeit pro Zeiteinheit die Beschleunigung des materiellen Punktes, und wollen sie auch in Zukunft durch den Buchstaben a (acceleratio) bezeichnen.

Die in der letzten Gleichung enthaltene Bestimmung von a läßt sich aber nicht mehr anwenden, wenn c eine beliebige Funktion der Zeit ist. Es sei also etwa:

(46) $$c = f\,(t)\,.$$

Hier kann man aber die ähnlichen Erwägungen anstellen wie bei der Bildung des Begriffes der Geschwindigkeit, sobald der Körper keine konstante Geschwindigkeit besitzt. Wir werden so dazu geführt, als Betrag der Beschleunigung in diesem allgemeineren Falle die Grenze anzusehen, der der Ausdruck $\frac{\Delta c}{\Delta t}$ zustrebt, wenn Δt sich der 0 nähert. Also haben wir jetzt für den Betrag der Beschleunigung, dem wir aus später hervortretenden Gründen noch den Index t anfügen wollen:

(47) $$a_t = \lim_{\Delta t = 0} \frac{\Delta c}{\Delta t} = \frac{d\,c}{d\,t}\,,$$

welche Definition die frühere als Spezialfall umschließt, wie es sein muß. In Verbindung mit Gleichung (4) folgt weiter:

(48) $$a_t = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2 s}{d\,t^2}\,.$$

In Worten also: Der Betrag der Beschleunigung bei einer geradlinigen Bewegung ist gleich dem zweiten Differentialquotienten des Weges nach der Zeit; und offenbar stimmt ihre Richtung überein mit derjenigen der Geschwindigkeit bzw. des Bahnelementes. Das deutet der Index t in Gleichung (47) und (48) an.

Indessen ist auch dieser Wert im allgemeinsten Falle noch nicht ausreichend, denn wir haben bisher eine geradlinige Bahn vorausgesetzt, konnten also nur Änderungen im Betrage des Vektors der Geschwindig-

keit berücksichtigen. Aber da zwei Geschwindigkeiten auch schon dann als ungleich betrachtet werden müssen, wenn (bei gleichem Betrage) ihre Richtungen verschieden sind — hier macht sich der Vektorcharakter der Geschwindigkeit bemerkbar —, so müssen wir auch sagen, daß bei einer krummlinigen Bahn, wenn sie auch mit konstantem Geschwindigkeitsbetrage durchlaufen wird, eine Geschwindigkeitsänderung auftritt. Es tritt dann eine neue Komponente der Beschleunigung zutage, die sich zu der obigen hinzufügt.

Sehr leicht wäre die Bestimmung dieser zweiten Komponente mit Hilfe der Vektorrechnung zu machen. Aber da wir dieselbe hier nicht benutzen wollen, müssen wir uns nach einer anderen Methode umsehen. Wir können nun jede Geschwindigkeit, auch die eines Massenpunktes x auf einer beliebigen krummlinigen Bahn, in ihre drei rechtwinkeligen Komponenten zerlegen, die die Werte $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ besitzen. Jede dieser Geschwindigkeiten kann ihre Richtung nicht ändern, da sie dauernd ein und derselben Achse parallel ist. Also können wir auf die Geschwindigkeitskomponenten unbedenklich die Gleichung (48) anwenden; die drei erhaltenen Werte sind dann die Komponenten der Gesamtbeschleunigung, die wir, um ihren Vektorcharakter auszudrücken, durch $\mathfrak{a}$ bezeichnen. Also ist:

$$(49)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{a}_x &= \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{du}{dt} = \frac{d\mathfrak{c}_x}{dt}, \\ \mathfrak{a}_y &= \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{d\mathfrak{c}_y}{dt}, \\ \mathfrak{a}_z &= \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dw}{dt} = \frac{d\mathfrak{c}_z}{dt}. \end{aligned}\right.$$

Diese Beschleunigungskomponenten charakterisieren die Beschleunigung vollkommen; der Betrag $a = |\mathfrak{a}|$ ist offenbar:

$$(50)\qquad a = \mathfrak{a} = +\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2},$$

und die Richtungscosinusse sind:

$$(51)\qquad \cos(\mathfrak{a}\,x) = \frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{a}, \quad \cos(\mathfrak{a}\,y) = \frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{a}, \quad \cos(\mathfrak{a}\,z) = \frac{\frac{d^2z}{dt^2}}{a}.$$

Die gestellte Aufgabe, die Beschleunigung allgemein zu bestimmen, kann daher als gelöst angesehen werden, und es bedarf nur noch der Inbezugsetzung mit dem Ausdruck (48), den man offenbar schreiben kann:

$$(48\text{a})\qquad a_t = \frac{d}{dt}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}.$$

Der Vergleich von (48a) und (50) zeigt übrigens deutlich die Richtigkeit der Behauptung, daß der absolute Betrag von $\mathfrak{a}_t$ nach Gleichung (48)

nicht der allgemeine Ausdruck für $|\mathfrak{a}|$ sein kann, da (50) und (48) im allgemeinen nicht übereinstimmen.

Um den Anschluß an die Form der Gleichung (48) zu finden, in der ja von Koordinaten nicht die Rede ist, schreiben wir die Gleichungen (8) für die Geschwindigkeitskomponenten noch einmal hin:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{ds}{dt}\cos(s\,x); \quad \frac{dy}{dt} = \frac{ds}{dt}\cos(s\,y); \quad \frac{dz}{dt} = \frac{ds}{dt}\cos(s\,z).$$

Dabei ist nach (7):

$$\cos(s\,x) = \frac{dx}{ds}, \quad \cos(s\,y) = \frac{dy}{ds}, \quad \cos(s\,z) = \frac{dz}{ds};$$

also können die Geschwindigkeitskomponenten geschrieben werden:

$$(52) \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{ds}{dt}\,\frac{dx}{ds}; \quad \frac{dy}{dt} = \frac{ds}{dt}\,\frac{dy}{ds}; \quad \frac{dz}{dt} = \frac{ds}{dt}\,\frac{dz}{ds}.$$

Differentiieren wir nach t, so liefert die erste von diesen Gleichungen der Reihe nach:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2s}{dt^2}\,\frac{dx}{ds} + \frac{ds}{dt}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{ds}\right) = \frac{d^2s}{dt^2}\,\frac{dx}{ds} + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{d}{ds}\left(\frac{dx}{ds}\right).$$

also erhalten wir:

$$(53) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{d^2s}{dt^2}\,\dfrac{dx}{ds} + \left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2 \dfrac{d^2x}{ds^2}, \\[2ex] \dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{d^2s}{dt^2}\,\dfrac{dy}{ds} + \left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2 \dfrac{d^2y}{ds^2}, \\[2ex] \dfrac{d^2z}{dt^2} = \dfrac{d^2s}{dt^2}\,\dfrac{dz}{ds} + \left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2 \dfrac{d^2z}{ds^2}. \end{cases}$$

Quadrieren und addieren wir diese Gleichungen, so erhalten wir links das Quadrat des Betrages der Gesamtbeschleunigung, a^2; rechts steht, da $\dfrac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{ds^2} = 1$ ist:

$$\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{ds}{dt}\right)^4 \left\{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2\right\}$$
$$+ 2\,\frac{d^2s}{dt^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \left[\frac{dx}{ds}\,\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds}\,\frac{d^2y}{ds^2} + \frac{dz}{ds}\,\frac{d^2z}{ds^2}\right].$$

Das letzte Glied kann offenbar geschrieben werden:

$$\frac{d^2s}{dt^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{d}{ds}\left[\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2\right],$$

und das hat den Wert 0, da die eckige Klammer den konstanten Wert 1 besitzt. Also folgt schließlich der Betrag a der Gesamtbeschleunigung:

$$(54) \qquad a = |\mathfrak{a}| = +\sqrt{\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{ds}{dt}\right)^4 \left[\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2\right]}.$$

Darin aber ist, wie die analytische Geometrie lehrt, die eckige Klammer

gleich dem reziproken Quadrate des Krümmungsradius R der Bahnkurve; also ist endlich:

$$(55)\qquad a = |\mathfrak{a}| = +\sqrt{\left(\frac{d^2 s}{d t^2}\right)^2 + \frac{1}{R^2}\left(\frac{d s}{d t}\right)^4}.$$

Diese Gleichung lehrt, daß $\mathfrak{a}$ aus zwei zueinander senkrechten Komponenten besteht, einer tangentialen $\frac{d^2 s}{d t^2}$, einer normalen $\frac{1}{R}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$, von der wir gleich noch zeigen werden, daß sie stets nach der konkaven Seite der Bahn gerichtet ist. Nehmen wir die Richtung des Krümmungsradius als positiv vom Zentrum nach außen hin, so ist also, wenn die beiden Komponenten durch $\mathfrak{a}_t$ und $\mathfrak{a}_n$ (n bedeutet normal) bezeichnet werden:

$$(56)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{a}_t &= \frac{d^2 s}{d t^2}, \\ \mathfrak{a}_n &= -\frac{1}{R}\left(\frac{d s}{d t}\right)^2. \end{aligned}\right.$$

Wir wollen diese Untersuchung noch durch einige vektoranalytische Betrachtungen ergänzen, die uns gleichzeitig zeigen werden, daß die Normalkomponente $\mathfrak{a}_n$ nach dem Krümmungszentrum hin gerichtet ist.

In Fig. 19 sei S die Bahnkurve, P und P' zwei unendlich benachbarte Punkte derselben. Das Stück ds der Kurve zwischen P und P' kann als eben betrachtet werden.

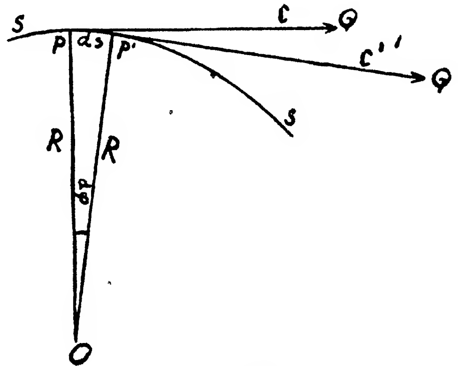


Fig. 19.

In P und P' errichten wir die Tangenten und tragen auf ihnen die Strecken PQ und $P'Q'$ ab, die der Größe und Richtung nach die Geschwindigkeiten $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c}' = \mathfrak{c} + d\mathfrak{c}$ in diesen beiden Bahnpunkten darstellen mögen. Durch beide Tangenten läßt sich eine Ebene, die sogenannte Schmiegungsebene der Kurve legen, die auch den Krümmungsmittelpunkt in sich enthält, der bekanntlich der Schnittpunkt O der beiden in P und P' errichteten Normalen ist. OP und OP' stellen dann den Krümmungsradius R dar; der Winkel zwischen den Normalen sei $d\varphi$, derselbe Winkel existiert natürlich auch zwischen den Tangenten, also den Geschwindigkeiten $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c} + d\mathfrak{c}$. Wir wollen in einer besonderen Zeichnung (Fig. 20) $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c}' = \mathfrak{c} + d\mathfrak{c}$ konstruieren: sie schließen nach dem Obigen den Winkel $d\varphi$, den sogenannten „Kontingenz-

winkel“ ein. In Fig. 20 sind die beiden Geschwindigkeiten so aufgetragen, wie sie der Fig. 19 entsprechen. Die Bahnkurve ist also in Fig. 20 ebenfalls nach unten hin konkav zu denken.

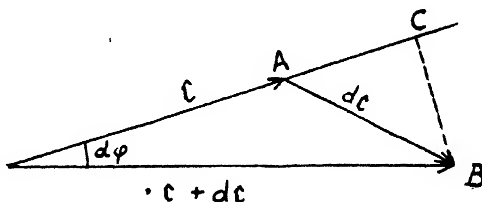


Fig. 20.

$\overrightarrow{PA}$ und $\overrightarrow{PB}$ mögen der Größe und Richtung nach $\mathfrak{c}$ bzw. $\mathfrak{c} + d\,\mathfrak{c}$ darstellen; dann stellt $\overrightarrow{AB}$ offenbar ihre vektorielle Differenz $d\mathfrak{c}$ der Größe und Richtung nach dar; $\frac{d\,\mathfrak{c}}{d\,t}$ ist also als die vektorielle Beschleunigung zu bezeichnen. Diese ist parallel $\overrightarrow{AB}$, nur von anderer Größe. Wir können also sagen, daß $\overrightarrow{AB}$ proportional der Beschleunigung $\mathfrak{a}$ ist; bilden wir nun die Komponenten parallel und senkrecht zur Richtung von $\mathfrak{c}$, so erhalten wir die Strecken $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{CB}$. Die erste ist parallel $\mathfrak{c}$, also tangential zur Bahnkurve, ist daher proportional $\mathfrak{a}_t$; die zweite ist normal zur Bahnkurve, und zwar, wie die Figur ergibt, zum Krümmungszentrum hin gerichtet; sie ist also proportional $\mathfrak{a}_n$. Damit haben wir unsere obige Behauptung betreffs der Richtung von $\mathfrak{a}_n$ bewiesen; sie wird wegen dieser Eigenschaft auch als „zentripetale“ Beschleunigung bezeichnet. Man kann beiden Komponenten noch eine etwas andere Gestalt geben, indem man beachtet, daß nach Fig. 19 $PP' = ds$ offenbar gleich $R d\varphi$ ist; also ist nach (56):

$$\text{(56a)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{a}_t &= \frac{d}{d\,t}\left(R\frac{d\varphi}{d\,t}\right), \\ \mathfrak{a}_n &= -R\left(\frac{d\varphi}{d\,t}\right)^2. \end{aligned} \right.$$

Endlich läßt sich noch ein Satz über die Ebene, in der die Beschleunigung liegt, aus Fig. 19 und Fig. 20 ableiten. Offenbar liegt $d\,\mathfrak{c}$ in derselben Ebene wie $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c} + d\,\mathfrak{c}$. Das ist aber nach Fig. 19 die Schmiegungsebene. Daher der Satz: Die Beschleunigung liegt in der Schmiegungsebene der Bahnkurve, was schon Leonhard Euler erkannte.

Im Vorhergehenden haben wir die Beschleunigungskomponenten in einem Koordinatensysteme (R, φ) ausgedrückt. Dabei war jedoch der Koordinatenanfangspunkt nicht willkürlich, sondern dieser war identisch mit dem Krümmungszentrum. Dieses ist durch die Kurve bestimmt, und daher nennt man dieses spezielle

Koordinatensystem das „natürliche Koordinatensystem der Kurve“. Diese Art der Zerlegung ist in Fig. 21 dargestellt.

Die Existenz einer Beschleunigung erfordert, wie das Vorhergehende ergibt, die Existenz der Größen (49), nämlich $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$. Daher rechtfertigt sich hier die Forderung der Nr. 6, daß die Funktionen (1) zweite Differentialquotienten nach der Zeit haben müssen, die wir der Einfachheit halber auch als stetig annehmen.

14. Verhalten der Beschleunigung bei Änderung des Koordinatensystems.

Wir hatten in Nr. 11 die Frage behandelt, wie sich die Geschwindigkeitskomponenten ändern, wenn man das Koordinatensystem ändert. Die Änderung des letzteren bestand einmal in einer Parallelverschiebung, das zweite Mal in einer Drehung. Das analoge Problem liegt für die Beschleunigung vor. Es sei, wie in Nr. 11 das ursprüngliche System durch (x, y, z), das zweite System durch (ξ, η, ζ) bezeichnet; dann sind die Beschleunigungskomponenten im ersten $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$, im zweiten $\frac{d^2\xi}{dt^2}, \frac{d^2\eta}{dt^2}, \frac{d^2\zeta}{dt^2}$.

Für eine Parallelverschiebung gelten die Gleichungen (31) mit derselben Bezeichnung wie dort:

$$(31) \qquad \left\{ \begin{aligned} \xi &= x - a, \\ \eta &= y - b, \\ \zeta &= z - c. \end{aligned} \right.$$

Durch zweimaliges Differentiieren nach t ergibt sich

$$(57) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} &= \frac{d^2x}{dt^2}, \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} &= \frac{d^2y}{dt^2}, \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} &= \frac{d^2z}{dt^2}, \end{aligned} \right.$$

d. h. die Beschleunigungskomponenten bleiben bei einer Parallelverschiebung des Koordinatensystems ungeändert, wie die Geschwindigkeitskomponenten.

Für den Fall der Drehung haben wir die Gleichungen (33):

$$(33) \qquad \left\{ \begin{aligned} \xi &= x\cos\alpha_1 + y\cos\beta_1 + z\cos\gamma_1, \\ \eta &= x\cos\alpha_2 + y\cos\beta_2 + z\cos\gamma_2, \\ \zeta &= x\cos\alpha_3 + y\cos\beta_3 + z\cos\gamma_3. \end{aligned} \right.$$

Durch deren zweimalige Differentiation nach t folgt:

$$(58)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\xi}{dt^2} = \dfrac{d^2x}{dt^2}\cos\alpha_1 + \dfrac{d^2y}{dt^2}\cos\beta_1 + \dfrac{d^2z}{dt^2}\cos\gamma_1, \\ \dfrac{d^2\eta}{dt^2} = \dfrac{d^2x}{dt^2}\cos\alpha_2 + \dfrac{d^2y}{dt^2}\cos\beta_2 + \dfrac{d^2z}{dt^2}\cos\gamma_2, \\ \dfrac{d^2\zeta}{dt^2} = \dfrac{d^2x}{dt^2}\cos\alpha_3 + \dfrac{d^2y}{dt^2}\cos\beta_3 + \dfrac{d^2z}{dt^2}\cos\gamma_3, \end{cases}$$

d.h. bei einer Drehung des Koordinatensystems transformieren sich die Beschleunigungskomponenten wie die Koordinaten; sie verhalten sich also genau so wie die Geschwindigkeitskomponenten.

Dies gilt für jeden Vektor $\mathfrak{A}$, da die Länge der ihn darstellenden Strecke durch eine Drehung des Koordinatensystems nicht beeinflußt wird; also hat man:

$$(59)\qquad \mathfrak{A}_\xi = \mathfrak{A}_x\cos\alpha_1 + \mathfrak{A}_y\cos\beta_1 + \mathfrak{A}_z\cos\gamma_1 \quad \text{usw.}$$

Diese Formeln gelten offenbar nur so lange, als die Koeffizienten der Koordinatentransformation in (31) und (33) von der Zeit unabhängig sind; sind sie umgekehrt Funktionen der Zeit — dieses Problem wird in Nr. 20 behandelt werden —, so ergeben sich andere Resultate.

15. Ebene Beschleunigung in Polarkoordinaten.

In Nr. 12 hatten wir die ebenen Geschwindigkeitskomponenten in einem ebenen Polarkoordinatensystem (r, φ) ausgedrückt. Das analoge wollen wir jetzt für die Beschleunigungskomponenten der ebenen Bewegung durchführen.

Nach Gleichung (41) ist:

$$(41)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dr}{dt}\cos\varphi - r\dfrac{d\varphi}{dt}\sin\varphi, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dr}{dt}\sin\varphi + r\dfrac{d\varphi}{dt}\cos\varphi. \end{cases}$$

Dabei sind $\frac{dr}{dt}$ und $r\frac{d\varphi}{dt}$ die „Radial-" bzw. „Transversalkomponente" der Geschwindigkeit. Differentiieren wir (41) noch einmal nach t, so daß links die kartesischen Beschleunigungskomponenten auftreten, so folgt:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2}\cos\varphi - \frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\sin\varphi - \frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\sin\varphi - r\frac{d^2\varphi}{dt^2}\sin\varphi - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\cos\varphi,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2}\sin\varphi + \frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\cos\varphi + \frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\cos\varphi + r\frac{d^2\varphi}{dt^2}\cos\varphi - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\sin\varphi,$$

oder anders geordnet:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]\cos\varphi - \left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + r\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right]\sin\varphi,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]\sin\varphi + \left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + r\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right]\cos\varphi.$$

Diese Gleichungen stimmen der Form nach mit (41) völlig überein, und daraus läßt sich leicht zeigen, daß die Größe $\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$ die Radialkomponente, die Größe $2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + r\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ die Transversalkomponente der Beschleunigung darstellt.

Bezeichnet man diese Komponenten durch $\mathfrak{a}_r$ und $\mathfrak{a}_\varphi$, so haben wir die Lösung der gesuchten Aufgabe in den Gleichungen:

$$(60)\qquad \begin{cases} \mathfrak{a}_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2, \\ \mathfrak{a}_\varphi = 2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + r\frac{d^2\varphi}{dt^2}. \end{cases}$$

In Nr. 13 haben wir eine andere Zerlegung der Beschleunigung vorgenommen, nämlich nach dem natürlichen Koordinatensystem der Kurve, das ein zeitlich bewegtes Koordinatensystem darstellt. Unter gewissen Umständen sind die Gleichungen (56a) als

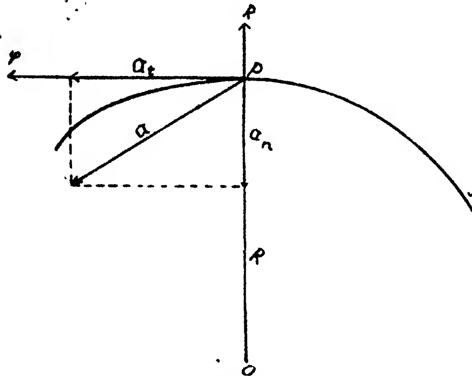


Fig. 21.

Spezialfälle in den Gleichungen (60) enthalten. In der Tat: Ist die Bahn eben, ferner der Krümmungsradius R von t unabhängig und hat der Krümmungsmittelpunkt eine feste Lage im Raume, d. h. beschreibt der Punkt eine Kreisbahn, so erhalten wir, unter Ersetzung von r durch R, aus (60):

$$(61)\qquad \begin{cases} \mathfrak{a}_r = \mathfrak{a}_n = -R\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2, \\ \mathfrak{a}_\varphi = \mathfrak{a}_t = R\frac{d^2\varphi}{dt^2}, \end{cases}$$

in Übereinstimmung mit (56a), wie es sein muß. Die Radialbeschleunigung $\mathfrak{a}_r$ wird dann identisch mit der Normalbeschleunigung $\mathfrak{a}$

und die Transversalbeschleunigung $\mathfrak{a}_\varphi$ geht über in die Tangentialbeschleunigung $\mathfrak{a}_t$.

Die beiden Zerlegungen (56a) und (60) sind also im allgemeinen vollkommen voneinander verschieden und dürfen nicht miteinander verwechselt werden; Fig. 21 zeigt die Zerlegung nach dem natürlichen Koordinatensystem der Kurve, Fig. 22 ebenso diejenige nach einem beliebigen Polarkoordinatensystem; sie sind ohne nähere Erklärung verständlich.

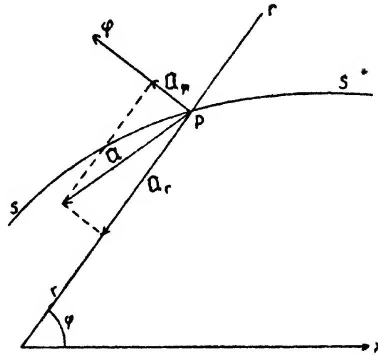


Fig. 22.

16. Bestimmung der Bewegung aus der Geschwindigkeit oder der Beschleunigung.

Die Bewegung eines substantiellen Punktes ist bestimmt, wenn seine drei Koordinaten, z. B. die kartesischen Koordinaten x, y, z als Funktionen der Zeit bestimmt sind. Es ist daher die meistens vorliegende Aufgabe der Kinematik, entweder aus der (durch Beobachtung oder Theorie gegebenen) Geschwindigkeit oder Beschleunigung diese Funktionen (1) zu bestimmen.

Wir wollen zunächst annehmen, die Komponenten der Geschwindigkeit u, v, w seien gegeben; diese werden im allgemeinen Funktionen von x, y, z und t sein:

$$(62)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f_1(x, y, z, t), \\ \frac{dy}{dt} &= f_2(x, y, z, t), \\ \frac{dz}{dt} &= f_3(x, y, z, t). \end{aligned}\right.$$

Das ist ein System von simultanen Differentialgleichungen erster Ordnung, deren Lösung eine rein mathematische Aufgabe ist. Sehr einfach gestaltet sich dieselbe, wenn die Geschwindigkeitskomponenten lediglich Funktionen der Zeit sind (worunter als Spezialfall natürlich der einer konstanten Geschwindigkeit enthalten ist). Dann lauten die Gleichungen (62):

$$(62a)\qquad \frac{dx}{dt} = f_1(t); \quad \frac{dy}{dt} = f_2(t); \quad \frac{dz}{dt} = f_3(t),$$

und man erhält, da die Variabeln getrennt sind, durch einfache Quadraturen:

$$(63)\quad x = \int_0^t f_1(t)\,dt + A; \quad y = \int_0^t f_2(t)\,dt + B; \quad z = \int_0^t f_3(t)\,dt + C,$$

welche Gleichungen schon das Verlangte leisten. A, B, C sind Integrationskonstanten. Ihre physikalische Bedeutung ist folgende: Die Gleichungen (63) gelten für alle Werte von t, auch für $t = 0$. Für diesen Zeitwert wollen wir die Koordinaten durch x_0, y_0, z_0 bezeichnen. Dann ergeben die Gleichungen (63) offenbar:

$$(64)\qquad x_0 = A; \quad y_0 = B; \quad z_0 = C.$$

Also:

$$(65)\qquad \begin{cases} x = x_0 + \int_0^t f_1(t)\,dt = x_0 + F_1(t), \\ y = y_0 + \int_0^t f_2(t)\,dt = y_0 + F_2(t), \\ z = z_0 + \int_0^t f_3(t)\,dt = z_0 + F_3(t). \end{cases}$$

Man erkennt aus (65), daß durch Angabe der Geschwindigkeitskomponente die Bewegung noch nicht vollkommen bestimmt ist; vielmehr müssen drei Integrationskonstanten x_0, y_0, z_0 noch besonders gegeben sein. Diese Konstanten bestimmen die sogenannte „Anfangslage". Wir erhalten also den Satz: Durch Angabe der Geschwindigkeitskomponenten und der Anfangslage ist die Bewegung bestimmt.

Natürlich brauchen es nicht die kartesischen Komponenten von $\mathfrak{c}$ zu sein, die gegeben sind, sondern man sieht leicht, daß es die Komponenten in einem beliebigen Koordinatensystem sein können, z. B. in einem räumlichen Polarkoordinatensystem. Dann müßten nach (45) gegeben sein — wie wir der Einfachheit halber gleich annehmen wollen, als Funktionen der Zeit allein — die Größen:

$$(66)\qquad \begin{cases} \frac{dr}{dt} = f_1(t), \\ r\frac{d\vartheta}{dt} = f_2(t), \\ r\sin\vartheta\frac{d\varphi}{dt} = f_3(t) \end{cases}$$

und die Anfangslage, die durch die drei Werte r_0, ϑ_0, φ_0 charakterisiert ist. Die Integration der Gleichung (1) liefert:

$$(67\text{a}) \qquad r = \int_0^t f_1(t)\,dt + r_0 = F_1(t) + r_0 .$$

Damit gibt die zweite Gleichung (66):

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{f_2(t)}{F_1(t) + r_0},$$

deren Integration ihrerseits liefert:

$$(67\text{b}) \qquad \vartheta = \int_0^t \frac{f_2(t)}{F_1(t) + r_0}\,dt + \vartheta_0 = F_2(t) + \vartheta_0 .$$

Mit (67a) und (67b) wird die dritte Gleichung (66):

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{f_3(t)}{(F_1(t) + r_0)\sin(F_2(t) + \vartheta_0)},$$

und die Integration gibt:

$$(67\text{c}) \qquad \varphi = \int_0^t \frac{f_3(t)\,dt}{\{F_1(t) + r_0\}\sin\{F_2(t) + \vartheta_0\}} + \varphi_0 = F_3(t) + \varphi_0 .$$

Durch (67a) bis (67c) ist offenbar die Bewegung wieder vollkommen bestimmt.

In vielen Fällen sind es aber nicht die Geschwindigkeitskomponenten, sondern diejenigen der Beschleunigung, die gegeben sind, und zwar im allgemeinen als Funktionen der sieben Variabeln $x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, t$:

$$(68) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = f_1\left(x, y, z, \dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}, \dfrac{dz}{dt}, t\right), \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = f_2\left(x, y, z, \dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}, \dfrac{dz}{dt}, t\right), \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = f_3\left(x, y, z, \dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}, \dfrac{dz}{dt}, t\right). \end{cases}$$

Dies ist ein System dreier simultaner Differentialgleichungen zweiter Ordnung, das auf sechs Differentialgleichungen erster Ordnung zurückgeführt werden kann. Man erkennt daraus, daß die jetzt vorliegende Aufgabe der Integration komplizierter ist als vorher, wo die Geschwindigkeitskomponenten gegeben waren. Wir wollen der Einfachheit halber nur den Fall behandeln, daß die Beschleunigungskomponenten Funktionen der Zeit (oder Konstante) sind. Wir setzen also:

$$(69) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = f_1(t), \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = f_2(t), \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = f_3(t). \end{cases}$$

Eine einmalige Integration ergibt:

$$\frac{dx}{dt} = \int_0^t f_1(t)\,dt + A',$$

$$\frac{dy}{dt} = \int_0^t f_2(t)\,dt + B',$$

$$\frac{dz}{dt} = \int_0^t f_3(t)\,dt + C',$$

welche Gleichungen die Geschwindigkeitskomponenten liefern, wenn die Integrationskonstanten A', B', C' bekannt sind. Ihre physikalische Bedeutung, die man durch die nämliche Überlegung erkennt, wie vorher, ist die der Geschwindigkeitskomponenten zur Zeit $t = 0$, die wir durch u_0, v_0, w_0 bezeichnen und „Anfangsgeschwindigkeit" nennen wollen; also ist mit leicht verständlicher Abkürzung:

$$(70) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= F_1(t) + u_0\,. \\ \frac{dy}{dt} &= F_2(t) + v_0\,. \\ \frac{dz}{dt} &= F_3(t) + w_0\,, \end{aligned} \right.$$

Damit haben wir wieder das Problem der Gleichung (62a) vor uns; die Bestimmung der Bewegung aus den Geschwindigkeitskomponenten, die als Funktionen der Zeit t gegeben sind. Eine nochmalige Integration nach t liefert also nach dem früheren die Bewegungsgleichungen:

$$(71) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= \Phi_1(t) + u_0 t + x_0\,, \\ y &= \Phi_2(t) + v_0 t + y_0\,, \\ z &= \Phi_3(t) + w_0 t + z_0\,. \end{aligned} \right.$$

wobei die $\Phi(t)$ Abkürzungen für die Integrale $\int_0^t F(t)\,dt$ sind. Man erkennt also den Satz: die Bewegung ist bestimmt, wenn außer den Beschleunigungskomponenten noch die Anfangsgeschwindigkeit und die Anfangslage gegeben sind.

Das Integral (71) enthält mithin sechs willkürliche Konstanten, die den Differentialgleichungen (69) fremd sind. Das ist ein wichtiger Zug in dem Verhältnis der Differentialgleichung zu ihren Integralen. Die sechs Konstanten spezialisieren die Bewegung, deren allgemeine, von jedem speziellen Fall losgelöste Formulierung wir in der Differentialgleichung haben. Während also die Integrale der Differentialgleichungen durch passende Bestimmung der disponiblen Konstanten die Möglichkeit bieten, einen bestimmten Spezialfall zu individualisieren, enthalten die Differentialgleichungen gewissermaßen nur das Typische, allen Spezialfällen Gemeinsame.

17. Beispiele: Freier Fall; Wurfbewegung.

Wir wollen die gewonnenen Resultate an zwei wichtigen Beispielen illustrieren. Galilei hat durch seine berühmten Versuche gezeigt, daß alle Körper gleich schnell zur Erde fallen, und daß sie eine konstante Beschleunigung $g = 981$ cm in der Sekunde erhalten. Wir können auf dem fallenden Körper einen Punkt markieren, dessen Bewegung wir allein verfolgen, z. B. wenn wir Kugeln fallen lassen, etwa den geometrischen Mittelpunkt. Dann haben wir es mit der Bewegung eines substantiellen Punktes zu tun. Woher die Beschleunigung kommt, gehört nicht in die Kinematik, das wird später in der Dynamik erörtert werden.

Nehmen wir ein Koordinatensystem, das in der Erde fest ist, dessen xy-Ebene horizontal, dessen z-Achse vertikal nach oben gerichtet ist, und dessen Anfangspunkt auf der Erdoberfläche liegt, so haben wir nach Galilei also folgende Gleichungen:

(72) $$\frac{d^2 x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = -g.$$

Die Integrale sind offenbar:

(73) $$\begin{cases} x = u_0 t + x_0, \\ y = v_0 t + y_0, \\ z = -\frac{1}{2} g t^2 + w_0 t + z_0, \end{cases}$$

und nun können, je nach den Werten von $x_0, y_0, z_0, u_0, v_0, w_0$ verschiedene Bewegungen eintreten.

1. Freier Fall: Die Anfangsgeschwindigkeit sei $u_0 = v_0 = w_0 = 0$; ferner sei die Anfangslage gegeben durch $x_0 = y_0 = 0$, dagegen $z_0 = h$; d. h. der Körper wird zur Zeit $t = 0$ in der Höhe h losgelassen. Dann haben wir nach (73):

(74) $$x = 0, \quad y = 0, \quad z = -\frac{1}{2} g t^2 + h.$$

Man erkennt aus (74) folgendes: Durch Differentiation nach t folgt die Geschwindigkeit:

(75) $$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0, \quad \frac{dz}{dt} = -gt,$$

d. h. sie ist entgegengesetzt der positiven z-Achse gerichtet und proportional der Zeit; die Bewegung ist also geradlinig. Wendet man ferner (74) auf zwei Zeiten $t = 0$ und $t = t$ an, so folgt:

$$z_0 = h,$$
$$z = -\frac{1}{2} g t^2 + h,$$

also durch Subtraktion, da $z_0 - z = s$ die durchlaufene Strecke ist:

(76) $$s = \frac{1}{2} g t^2,$$

d. h. die Fallräume sind proportional dem Quadrate der Zeit. Das sind die aus der Experimentalphysik bekannten „Fallgesetze", die Galilei in

der Tat bestätigt fand; sie gelten stets, wenn eine konstante Beschleunigung vorhanden ist und die nämlichen Anfangsbedingungen vorliegen; sie sind also von viel allgemeinerer Bedeutung, als das spezielle Beispiel des freien Falles.

2. Vertikaler Wurf. Die Anfangsgeschwindigkeit sei gegeben durch $u_0 = v_0 = 0$, $w_0 \neq 0$; die Anfangslage durch $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, d. h. also: dem substantiellen Punkte wird zur Zeit $t = 0$ im Koordinatenanfangspunkte eine parallel der positiven z-Achse gerichtete konstante Geschwindigkeit w_0 erteilt.

Dann haben wir nach (73):

$$(77) \qquad x = 0, \quad y = 0, \quad z = -\tfrac{1}{2} g t^2 + w_0 t.$$

Die Bewegung ist also geradlinig und parallel der z-Achse gerichtet. Durch Differentiation von (77) folgt für die Geschwindigkeit:

$$(78) \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0, \quad \frac{dz}{dt} = -g t + w_0.$$

Die Richtung der Geschwindigkeit ist also zunächst die der positiven z-Achse, nämlich solange $-g t + w_0 > 0$ ist, sie wird 0, wenn dieser Ausdruck verschwindet und sie ist nach unten gerichtet, wenn $-gt + w_0 = 0$ ist Die Gleichung

$$-g t + w_0 = 0$$

liefert also die Zeit $t = w_0/g$, während der der Körper in die Höhe steigt („Steigzeit"). Setzt man diesen Wert in (77) ein, so erhält man die Höhe h, bis zu der der Punkt überhaupt steigen kann:

$$(79) \qquad h = -\tfrac{1}{2} g \cdot \frac{w_0^2}{g^2} + \frac{w_0^2}{g} = \frac{w_0^2}{2g}.$$

Hat der Punkt diese Höhe erreicht, so beginnt er von dieser Höhe herab eine freie Fallbewegung, da dann alles genau so liegt, wie im ersten Beispiele, nur daß die dortige Zeit $t = 0$ hier der Zeit $t = w_0/g$ entspricht.

3. Horizontaler Wurf. Die Anfangsgeschwindigkeit sei:

$$u_0 = 0, \quad v_0 \neq 0, \quad w_0 = 0.$$

Die Anfangslage:

$$x_0 = y_0 = 0, \quad z_0 = h;$$

d. h. dem Punkt wird in der Höhe h die konstante horizontale Geschwindigkeit v_0 erteilt: „er wird horizontal geworfen". Dann liefert (73):

$$(80) \qquad x = 0, \quad y = v_0 t, \quad z = -\tfrac{1}{2} g t^2 + h.$$

Da bei der Bewegung x dauernd seinen Wert beibehält, so liegt die Bahnkurve ganz in der yz-Ebene; durch Elimination von t aus den zwei letzten Gleichungen (80) folgt daher für die Bahngleichung:

$$z - h = -\tfrac{1}{2} g \frac{y^2}{v_0^2}$$

oder

$$(81) \qquad y^2 = -\frac{2 v_0^2}{g}(z - h);$$

das ist aber eine Parabel mit der z-Achse als Achse und dem Punkte $z = h$ als Scheitelpunkt (Fig. 23).

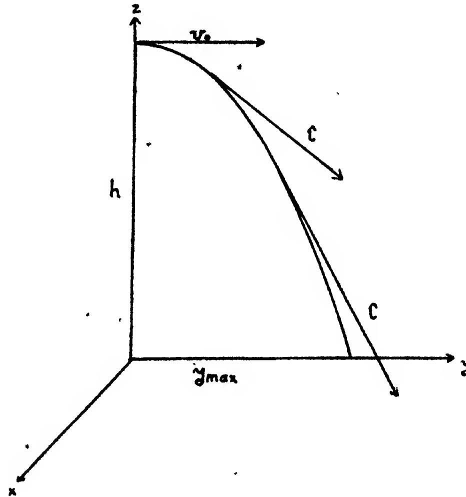


Fig. 23.

Durch Differentiation von (81) nach t folgt für die Geschwindigkeit:

$$(82) \qquad \frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{dy}{dt} = v_0, \quad \frac{dz}{dt} = -gt,$$

aus der man ersieht, daß zu der ursprünglich horizontal gerichteten Geschwindigkeit v_0 eine vertikal nach unten gerichtete Komponente $-gt$ hinzukommt, die der Zeit proportional ist. Der Gesamtbetrag der Geschwindigkeit c ist also:

$$(83) \qquad c = + \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}.$$

Ihre Richtung ist natürlich stets tangential zur Kurve gerichtet. In Fig. 23 sind für zwei Punkte der Bahn die Geschwindigkeiten nach Größe und Richtung durch gerichtete Strecken eingezeichnet.

Die „Wurfweite“, d. h. die horizontale Strecke, die der Körper bis zum Aufschlagen auf den Erdboden durchfliegt, erhält man folgendermaßen: Die Bewegung hört auf, wenn der substantielle Punkt auf den Erdboden aufschlägt. Das ist der Fall, wenn gemäß der dritten Gleichung (80) $z = -\frac{1}{2} g t^2 + h = 0$ ist. Daraus folgt die Zeitdauer vom Beginn bis zum Ende der Bewegung: $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$. Setzt man diesen Wert in die

zweite Gleichung (80) ein, so folgt der maximale Wert $y_{max.}$, d. h. die Wurfweite:

(84) $$y_{max.} = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

4. Schiefer Wurf. Die Anfangsgeschwindigkeiten seien: $u_0 = 0$, $v_0 \neq 0$, $w_0 \neq 0$; die Anfangslage sei: $x_0 = y_0 = z_0 = 0$; d. h. zur Zeit $t = 0$ wird dem substantiellen Punkte eine Geschwindigkeit $\mathfrak{c}_0$ erteilt, deren Betrag $c_0 = \sqrt{v_0^2 + w_0^2}$ ist, und deren Neigung α gegen die Horizontale sich aus der Gleichung bestimmt (Fig. 24): $\operatorname{tang} \alpha = \frac{w_0}{v_0}$.

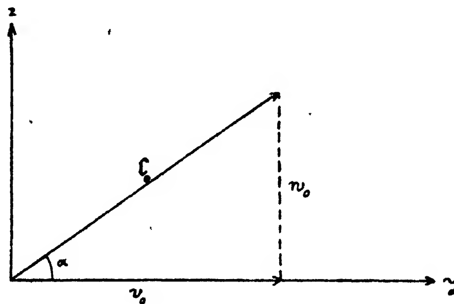


Fig. 24.

M. a. W.: Der Körper wird unter dem Winkel α mit einer bestimmten Geschwindigkeit c_0 aufwärts geworfen. Dann liefert (73):

(85) $$x = 0, \quad y = v_0 t, \quad z = -\tfrac{1}{2} g t^2 + w_0 t.$$

Da x unverändert bleibt, liegt die Bahn offenbar wieder in der yz-Ebene; die Elimination von t aus den beiden letzten Gleichungen (85) ergibt dann für die Gleichung der Bahnkurve:

(86) $$z = -\tfrac{1}{2} g \frac{y^2}{v_0^2} + \frac{w_0}{v_0} y.$$

Das ist wiederum die Gleichung einer Parabel, die aber eine andere, nachher zu besprechende Lage relativ zum Koordinatensystem hat, wie im vorigen Fall.

Durch Differentiation von (85) folgt für die Geschwindigkeit:

(87) $$\frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{dy}{dt} = v_0, \quad \frac{dz}{dt} = -gt + w_0.$$

Während also die horizontale Komponente der Geschwindigkeit unverändert weiter besteht, ist zunächst die vertikale Komponente $\frac{dz}{dt} > 0$, d. h. nach oben gerichtet, wird dann zur Zeit $t = \frac{w_0}{g}$ zu Null, und kehrt dann ihr Vorzeichen um, ist also nach unten gerichtet. Der Körper steigt

also bis zur Zeit $t = \frac{w_0}{g}$, zu der er seine maximale Höhe erreicht, und fällt dann herab, bis nach der dritten Gleichung (85) $z = -\frac{1}{2}gt^2 + w_0 t = 0$ geworden ist; dann schlägt der Körper auf den Boden auf, die Bewegung ist zu Ende. Diese letzte Gleichung zeigt, daß dies der Fall ist zur Zeit $t = \frac{2w_0}{g_0}$. Wie hoch steigt der Körper? Die maximale Höhe $z_{\text{max.}}$ erhalten wir, wenn wir die „Steigzeit" $t = \frac{w_0}{g}$ in die dritte Gleichung (85) einsetzen. Das liefert:

$$z_{\text{max.}} = -\frac{1}{2}g\frac{w_0^2}{g^2} + \frac{w_0^2}{g} = \frac{w_0^2}{2g},$$

oder, da nach Fig. 24 $w_0 = c_0 \sin \alpha$ ist:

(87) $$z_{\text{max.}} = \frac{c_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Wie groß ist die „Wurfweite" $y_{\text{max.}}$? Diese erhält man, wenn man die „Wurfzeit" $t = \frac{2w_0}{g}$ in die zweite Gleichung (85) einsetzt. Das liefert:

$$y_{\text{max.}} = \frac{2v_0 w_0}{g},$$

oder, da nach Fig. 24 $v_0 = c_0 \cos \alpha$ ist:

(88) $$y_{\text{max.}} = \frac{c_0^2}{g} \sin 2\alpha.$$

Die maximale Wurfweite erzielt man demnach unter einem Winkel $\alpha = \pi/4$ und gleich große Wurfweiten unter Winkeln, die nach oben und

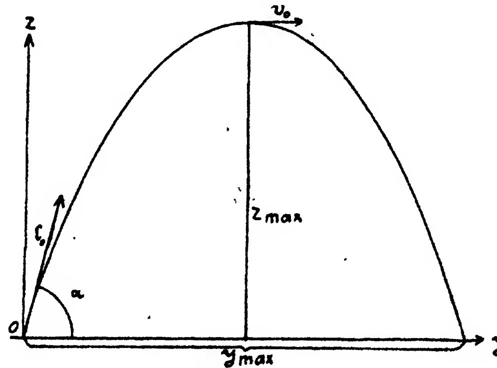


Fig. 25.

unten gleich weit von $\pi/4$ abstehen, da $\sin 2(\pi/4 - \beta) = \sin 2(\pi/4 + \beta)$ ist (Flachschuß und Steilschuß). Wir haben also folgendes Bild der Bahn kurve (Fig. 25).

Danach hat der Scheitel der Parabel die Koordinaten $z_{\text{max.}}$, $\frac{1}{2}y_{\text{max.}}$, die Achse derselben ist eine Parallele zur z-Achse im Abstande $\frac{1}{2}y_{\text{max.}}$. Damit ist alles vollkommen bestimmt.

18. Beispiele: Planetenbewegung.

Manchmal sind weder die drei Geschwindigkeitskomponenten, noch die drei Beschleunigungskomponenten von vornherein gegeben, sondern drei andere unabhängige Daten, z. B. die Bahngleichung und zwei rein kinematische Gesetze der betreffenden Bewegung. Dann liegt die Aufgabe vor, aus diesen Daten z. B. die Beschleunigung nach Größe und Richtung zu bestimmen. Diese Problemstellung lag historisch vor bei der sogenannten Planetenbewegung. Newton waren gegeben die drei Keplerschen Gesetze, die dieser aus den sorgfältigen Messungen Tycho de Brahes abgeleitet hatte. Newton bestimmte aus diesen Größe und Richtung der Beschleunigung.

Die Keplerschen Gesetze — rein kinematischer Natur — lauten folgendermaßen:

1. Die Planeten bewegen sich in Ellipsen, in deren einem Brennpunkte die Sonne steht.

2. Der Radiusvektor beschreibt in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume.

3. Die Quadrate der Umlaufszeiten verhalten sich wie die Kuben der großen Halbachsen.

Aus dem ersten Gesetze folgt zunächst, daß die Bahn in einer Ebene liegt, die wir deshalb zweckmäßig zur $x\,y$-Ebene wählen. Zum Koordi-

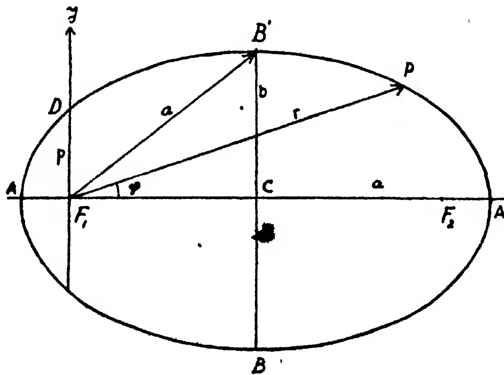


Fig. 26.

natenanfangspunkt wählen wir den Brennpunkt F_1, in dem die Sonne steht. Neben dem kartesischen Koordinatensystem $(x\,y)$ benutzen wir ein Polarkoordinatensystem (r, φ).

Bezeichnet p eine gewisse Konstante, e die numerische Exzentrizität, so lautet bekanntlich die Polargleichung einer Ellipse (Fig. 26):

(89)
$$r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}.$$

Die Bedeutung von p ist leicht ersichtlich. Setzen wir nämlich $\varphi = \pi/2$, so wird $r_{\frac{\pi}{2}} = p$. Das ist in Fig. 26 die Strecke $\overline{F_1 D}$, die auch so bezeichnet ist.

Das zweite Gesetz sagt dann folgendes aus: Lassen wir den Radiusvektor r sich um den Winkel $d\varphi$ drehen, so liegt zwischen beiden Vektoren ein Stück der Ellipsenfläche dF, dessen Größe offenbar $\frac{1}{2} r^2 d\varphi$ ist. Nun soll das Verhältnis dF zur Zeit dt, in der dieses Flächenstück vom Radiusvektor überstrichen wird, gleich einer Konstanten sein; also ist:

(90) $$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = C,$$

und das ist die mathematische Formulierung des zweiten Keplerschen Gesetzes. Durch Differentiation nach t folgt:

(91) $$2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + r\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0.$$

Das ist aber der zweiten Gleichung (60) zufolge nichts anderes als die transversale Komponente $\mathfrak{a}_\varphi$ der Beschleunigung. Wir finden also: Die Transversalbeschleunigung ist gleich 0; es existiert nur die Komponente in Richtung des Radiusvektors, also nur eine Radialbeschleunigung. Diese hat nach der ersten Gleichung (60) den Wert:

$$\mathfrak{a}_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2,$$

und diese gilt es, aus (89) und (90) zu berechnen. Da in (89) r als Funktion von φ und nicht als Funktion von t gegeben ist, so ist es zweckmäßig, mit Hilfe von (90) Differentiationen nach t auf solche nach φ zurückzuführen. Gleichung (90) kann geschrieben werden:

(92) $$\frac{1}{dt} = \frac{C}{r^2}\frac{1}{d\varphi},$$

und diese leistet das Verlangte. Wir erhalten also zunächst:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{C}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}$$

und durch nochmalige Anwendung von (92):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\right) = \frac{C}{r^2}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{C}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}\right),$$

was ausgerechnet ergibt:

(93) $$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{C^2}{r^4}\frac{d^2 r}{d\varphi^2} - \frac{2C^2}{r^5}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2.$$

Ferner ist nach (90):

(94) $$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{C^2}{r^4},$$

also erhalten wir für $\mathfrak{a}_r$:

$$\mathfrak{a}_r = \frac{d^2 r}{d t^2} - r\left(\frac{d\varphi}{d t}\right)^2 = \frac{C^2}{r^3}\left\{\frac{1}{r}\frac{d^2 r}{d\varphi^2} - \frac{2}{r^2}\left(\frac{d r}{d\varphi}\right)^2 - 1\right\}.$$

Durch Differentiation der Polargleichung (89) findet man $\frac{dr}{d\varphi}$ und $\frac{d^2r}{d\varphi^2}$, so daß schließlich wird:

$$\mathfrak{a}_r = \frac{C^2}{p r^2}\{-r e \cos\varphi + p\},$$

worin nach (89) der Klammerausdruck den Wert $-r$ hat. Also folgt endgültig:

$$\mathfrak{a}_r = -\frac{C^2}{p}\frac{1}{r^2}. \tag{95}$$

d.h. die Radialbeschleunigung ist umgekehrt gerichtet wie r, also stets auf die Sonne zu, und umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung von der letzteren.

Der Faktor C^2/p hängt nun von den Konstanten der Bewegung jedes einzelnen Planeten ab; man sollte also vermuten, daß er für alle einen verschiedenen Wert habe. Doch jetzt greift das dritte bisher noch nicht benutzte Gesetz ein; bezeichnen wir die große Halbachse der Ellipse mit a, die Umlaufszeit mit T, so soll nach dem dritten Keplerschen Gesetze sein:

$$\frac{a^3}{T^2} = B, \tag{96}$$

wo B eine dem ganzen Planetensystem gemeinsame Konstante ist.

Nach dem zweiten Gesetze (Gleichung 90) ist:

$$dt = \frac{2r^2}{2C}d\varphi = \frac{2}{C}dF.$$

Integrieren wir dies von 0 bis T, so beschreibt der Bedeutung von T gemäß der Radiusvektor die ganze Fläche der Ellipse: also wenn b die kleine Halbachse ist, so folgt:

$$T = \frac{2}{C}\int_0^{2\pi}\frac{r^2}{2}\,d\varphi = \frac{2}{C}\,a b \pi. \tag{97}$$

Damit schreibt sich das dritte Gesetz nach (96):

$$B = \frac{a^3 C^2}{4 a^2 b^2 \pi^2} = \frac{C^2 a}{4 b^2 \pi^2}. \tag{98}$$

Nun ist aber die Ellipse eine Kurve, für deren Punkte die Summe der Entfernung von den Brennpunkten konstant, nämlich gleich der doppelten großen Halbachse, also $= 2a$ ist. Es ist also in Fig. 26 $\overline{F_1D} + \overline{DF_2} = 2a$ also da $\overline{F_1D} = p$, so ist $\overline{DF_2} = 2a - p$. Ebenso ist $\overline{F_1B'} + \overline{F_2B'} = 2a$ also wegen der Symmetrie $\overline{F_1B'} = a$, und nach Definition $\overline{CB'} = b$ also ist im rechtwinkligen Dreieck $F_1B'C$ die Seite $\overline{F_1C} = \sqrt{a^2 - b^2}$

und $\overline{F_1F_2} = 2\sqrt{a^2-b^2}$. Demnach haben wir ein rechtwinkliges Dreieck DF_1F_2 (Fig. 27) mit folgenden Seitenlängen:

$$\overline{DF_1} = p; \quad DF_2 = 2a - p'^2; \quad \overline{F_1F_2} = 2\sqrt{a^2-b^2}.$$

Also ist

$$p^2 + 4a^2 - 4b^2 = 4a^2 + p^2 - 4ap,$$

oder

(99) $$p = \frac{b^2}{a}.$$

Damit ergibt sich aus (98):

$$B = \frac{C^2}{4\pi^2 p},$$

und folglich:

(100) $\frac{C^2}{p} = 4\pi^2 B =$ einer für alle Planeten gemeinsamen Konstante.

Damit wird die Beschleunigung $\mathfrak{a}_r$ nach (95):

(101) $$\mathfrak{a}_r = -\frac{4\pi^2 B}{r^2} = -\frac{k'}{r^2},$$

wo $k' = 4\pi^2 B$ zur Abkürzung gesetzt ist.

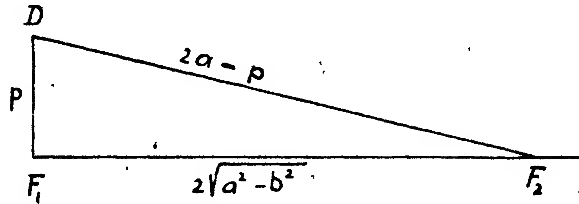


Fig. 27.

Damit ist das gestellte Problem völlig erledigt.

Zerlegt man $\mathfrak{a}_r$ in seine kartesischen Komponenten, so folgt:

(102) $$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = \mathfrak{a}_r \cos(rx) = -\frac{k'}{r^2}\frac{x}{r} = -\frac{k'x}{r^3}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} = \mathfrak{a}_r \cos(ry) = -\frac{k'}{r^2}\frac{y}{r} = -\frac{k'y}{r^3}, \end{cases}$$

aus denen rückwärts durch Integration die Keplerschen Gesetze gewonnen werden können. Damit werden wir uns später bei dem sogen. Zweikörperproblem beschäftigen (Nr. 61).

19. Periodische und harmonische Bewegung.

Wir wollen jetzt die Eigenschaften der sogenannten periodischen Bewegung untersuchen. Unter einer solchen versteht man eine Bewegung, deren einzelne Phasen sich in bestimmten Zeitabschnitten wiederholen.

Nehmen wir den denkbar einfachsten Fall, daß während der ganzen Bewegung $y = z = 0$ bleiben, so daß nur x sich ändert, so muß also x gleich einer beliebigen periodischen Funktion der Zeit sein:

$$x = \text{period. Funktion von } t, \quad y = z = 0\,.$$

Der einfachste Fall einer solchen Bewegung wird erhalten, wenn wir als periodische Funktion einen Kosinus oder Sinus wählen. Dann haben wir also etwa:

(103) $$x = A \cos(at + \delta), \quad y = z = 0\,,$$

oder auch

(103a) $$x = A \sin(at + \delta), \quad y = z = 0\,.$$

Eine derartige spezielle periodische Bewegung nennt man eine **harmonische**. Von beiden Typen (103) und (103a) braucht nur der eine betrachtet zu werden; denn man kann (103a) offenbar schreiben:

(103b) $$x = A \cos(at + \delta - \pi/2), \quad y = z = 0\,,$$

und dann erhält man eine Gleichung von der Form (103), in der offenbar nur der Anfangspunkt der Zeit anders gewählt ist.

Wir wollen jetzt die Bewegung (103) untersuchen. x ist ein Maximum, nämlich $= A$, wenn der Kosinus $= 1$, d. h. wenn ist:

$$at + \delta = 0, \ 2\pi, \ \ldots \ 2k\pi \ (k = 0, 1, 2, \ldots a),$$

also wenn:

(104) $$t = -\frac{\delta}{a}, \quad \frac{2\pi - \delta}{a}, \quad \frac{4\pi - \delta}{a}, \ldots \quad \frac{2k\pi - \delta}{a}.$$

Umgekehrt ist x ein Minimum, nämlich $-A$, wenn der Kosinus $= -1$ ist, d. h. wenn

$$at + \delta = \pi, \ 3\pi, \ 5\pi, \ \ldots \ (2k + 1)\pi \quad (k = 1, 2, \ldots a),$$

d. h. wenn:

(105) $$t = \frac{\pi - \delta}{a}, \quad \frac{3\pi - \delta}{a}, \ldots \quad \frac{(2k + 1)\pi - \delta}{a} \quad \text{ist.}$$

Die aufeinanderfolgenden Zeiten (104) und (105) haben gleiche Differenzen, nämlich $\frac{2\pi}{a}$; nach Ablauf von $\frac{2\pi}{a}$ Sekunden ist der **nämliche Zustand der Bewegung wieder hergestellt**. Man nennt deshalb diese Zeit T die „Periode" oder, da die periodische Bewegung auch als „Schwingung" bezeichnet wird, die „Schwingungsdauer":

(106) $$T = \frac{2\pi}{a}; \quad a = \frac{2\pi}{T}.$$

Den reziproken Wert von T nennen wir die Schwingungszahl n:

(107) $$n = \frac{1}{T} = \frac{a}{2\pi}; \quad a = 2\pi n\,.$$

Man kann daher jede harmonische Schwingung (103) in folgende Gestalt bringen:

(108) $$x = A\cos(2\pi n t + \delta) = A\cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \delta\right).$$

Die Größe A, die das Maximum von x darstellt, nennt man die „Amplitude" der Schwingung, das Argument $(2\pi n t + \delta)$ die „Phase" zur Zeit t; ebenso x die „Elongation" zur Zeit t. Durch geeignete Wahl des Zeitanfangspunktes kann man es offenbar stets erreichen, daß die Phasenkonstante δ gleich 0 wird; dann haben wir einfacher:

(108a) $$x = A\cos 2\pi n t = A\cos\frac{2\pi t}{T},$$

die wir den weiteren Betrachtungen zugrunde legen wollen. Zur Zeit $t = 0$ ist $x = A$, d. h. der betrachtete materielle Punkt in der positiven x-Richtung bis zur Entfernung A vom Koordinatenanfangspunkte ver-

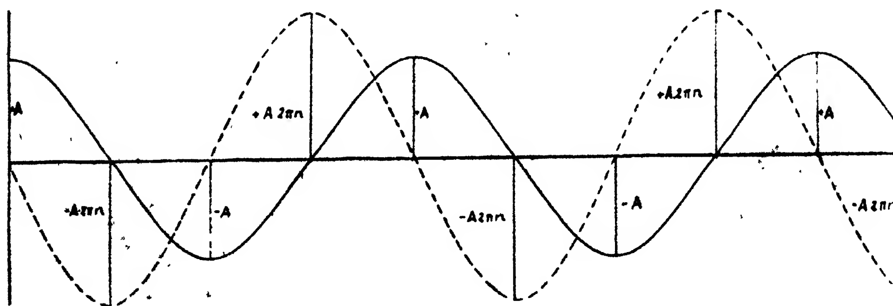


Fig. 28.

schoben; zur Zeit $t = T/4$, d. h. nach $^1/_4$ Periode, ist $x = 0$, d. h. der substantielle Punkt ist im Koordinatenanfangspunkte: wieder nach $^1/_4$ Periode $(t = T/2)$ ist $x = -A$, d. h. der Punkt befindet sich wieder im Anstande A vom Koordinatenanfangspunkte, aber auf der negativen Seite der x-Achse, und wieder nach $^1/_4$ Periode $(t = 3\,T/4)$ ist $x = 0$, d. h. der substantielle Punkt wieder im Koordinatenanfangspunkte. Nach Verlauf einer weiteren $^1/_4$ Periode $(t = T/4\,T = T)$ ist $x = A$, wo es auch zur Zeit $t = 0$ war, und die ganze Bewegung beginnt von neuem. Der Punkt „schwingt" also mit der Amplitude A auf der x-Achse hin und her, und zwar um den Koordinatenanfangspunkt als Anfangs- oder „Ruhelage". Daher rechtfertigt sich auch die bereits oben eingeführte Bezeichnung der periodischen Bewegung als einer Schwingung; die hier betrachtete Schwingung nennt man speziell eine „geradlinige". Trägt man die Zeit als Abszisse, die Elongation x als Ordinate auf, so haben wir das Bild der ausgezeichneten Kurve der Fig. 28.

Wir wollen nun die Geschwindigkeit der durch (108a) dargestellten Schwingung bestimmen. Wir haben:

$$(109)\qquad \frac{dx}{dt} = -A\,2\pi n \cdot \sin 2\pi n t, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = 0.$$

d. h. die Geschwindigkeit ist ebenfalls eine periodische Funktion der Zeit, die durch die gestrichelte Kurve in Fig. 28 dargestellt ist. Man erkennt im besonderen folgendes: Die Geschwindigkeit ist $= 0$, wenn die Elongation, absolut genommen, ein Maximum ist; umgekehrt hat die Geschwindigkeit, absolut genommen, ihre maximalen Werte, wenn die Elongation 0 ist. Wir können im Hinblick auf Fig. 28 offenbar sagen, daß die Geschwindigkeit der harmonischen Bewegung wieder eine Schwingung von der Periode T darstellt, die gegen die Bewegung selbst um eine Viertelperiode $(T/4)$ verschoben ist, und eine andere Amplitude, nämlich $A\,2\pi n$ besitzt. Denn durch Verschieben der gestrichelten Kurve um eine Viertelperiode nach rechts gelangen die Stellen der Maxima und Minima, sowie die Nullstellen beider Kurven zur Deckung.

Ganz ähnlich verhält sich die Beschleunigung. Diese hat, wie durch Differentiation von (109) hervorgeht, den Wert:

$$(110)\qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -A\,4\pi^2 n^2 \cos 2\pi n t, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2z}{dt^2} = 0.$$

und diese Gleichung läßt sich mit Rücksicht auf (108a) schreiben:

$$(111)\qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -4\pi^2 n^2 x, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2z}{dt^2} = 0.$$

In dieser Form erkennt man sofort, daß die Beschleunigung ebenfalls eine periodische Funktion der Zeit ist, die abgesehen vom Vorzeichen und dem konstanten Faktor $4\pi^2 n^2$ gleich x selbst ist. Zu den Zeiten, zu denen x ein Maximum oder Minimum passiert, passiert infolge des Minuszeichens die Beschleunigung umgekehrt ein Minimum oder Maximum. Die Beschleunigung ist also gegen die Bewegung um eine halbe, gegen die Geschwindigkeit um eine Viertelperiode in der Zeit verschoben. Die Gleichung (111) können wir nun so formulieren, daß die Beschleunigung eines substantiellen Punktes, der eine harmonische Bewegung ausführt, proportional dem jeweiligen Abstande x von der Ruhelage und auf diese zugerichtet ist; diese letztere Behauptung ergibt sich aus der Beachtung des Minuszeichens. Eine derartige Bewegung eines substantiellen Punktes kann man realisieren, indem man ihn an einer sogenannten elastischen Feder oder einem Gummifaden befestigt. Zieht man ihn aus der Ruhelage heraus und läßt ihn dann los, so vollführt er eine harmonische Bewegung um die Ruhelage.

Wir wollen nun zwei zueinander senkrechte geradlinige Schwingungen von derselben Periode zusammensetzen. Es sei z. B.:

$$(112)\qquad \begin{cases} x = A\cos 2\pi n t, \\ y = B\cos(2\pi n t + \delta). \end{cases}$$

Der größeren Allgemeinheit halber haben wir die zweite Schwingung in der Zeit gegen die erste um die Konstante δ verschoben und eine andere Amplitude B gewählt. Die zweite Gleichung kann geschrieben werden:

$$(113)\qquad y = B\cos 2\pi n t \,.\, \cos\delta - B\sin 2\pi n t \,.\, \sin\delta\,,$$

und aus der ersten folgt:

$$\cos 2\pi n t = \frac{x}{A}, \qquad \sin 2\pi n t = \pm\sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}.$$

Das liefert in (113) eingesetzt:

$$y = \frac{Bx}{A}\cos\delta \mp B\sin\delta\sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}.$$

was umgeformt geschrieben werden kann:

$$(114)\qquad A^2 y^2 - 2AB\cos\delta \,.\, xy + B^2 x^2 = A^2 B^2 \sin^2\delta.$$

Diese Gleichung stellt die Bahnkurve dar, die ein Punkt unter der gemeinsamen Wirkung zweier zueinander senkrechter harmonischer Bewegungen von gleicher Amplitude ausführt. Diese ist eine Kurve zweiter

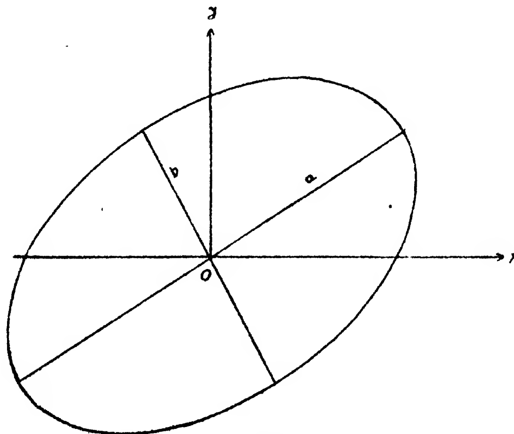


Fig. 29.

Ordnung, also, da sie ganz im Endlichen verlaufen muß, offenbar eine **Ellipse**. Wir erhalten als das Resultat: **Durch Zusammensetzung zweier rechtwinkliger geradliniger Schwingungen von gleicher Periode erhält man im Anfang eine Bewegung auf einer Ellipse**, deren Achsen aber i. A. nicht mit den Koordinatenachsen zusammenfallen (Fig. 29).

In speziellen Fällen kann die Ellipse in eine gerade Linie oder einen Kreis ausarten. Ist nämlich die zeitliche Verschiebung der beiden Schwingungen, die sogen. Phasendifferenz $\delta = 0$ oder $= \pi$, so wird (114):

$$A^2 y^2 \mp 2A\,B\,xy + B^2 x^2 = (A\,y \mp B\,x)^2 = 0\,,$$

d. h.

(115) $$A\,y \mp B\,x = 0\,.$$

Das ist eine gerade Linie durch den Anfangspunkt, und zwar entweder durch den ersten und dritten, oder durch den zweiten und vierten Quadranten; die Neigung α derselben gegen die Abszissenachse ist offenbar durch die Gleichung bestimmt $\operatorname{tg}\alpha = \pm\, B/A$.

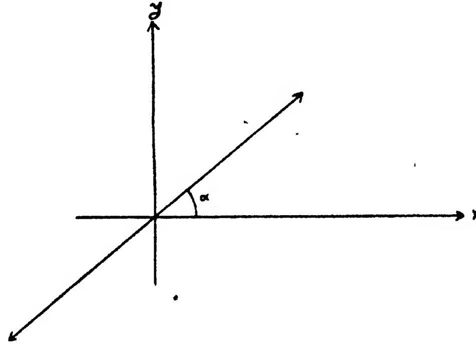


Fig. 30.

Nehmen wir ferner die Phasendifferenz $\delta = \pm\,\pi/2$, so wird (114):

$$A^2 y^2 + B^2 x^2 = A^2 B^2,$$

oder

(116) $$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1\,,$$

und das ist eine Ellipse, die auf die Koordinatenachsen als Hauptachsen bezogen ist (Fig. 31). Das doppelte Vorzeichen von δ bedeutet eine Durcheilung der Ellipse im Sinne, einmal entgegen dem Sinne des Uhrzeigers.

Nehmen wir endlich in (116) noch die Amplituden der beiden Schwingungen gleich ($A = B$), so ist:

(117) $$x^2 + y^2 = A^2,$$

d. h.: dann ist die Bahn ein Kreis.

Für diesen speziellen Fall wollen wir die Geschwindigkeit und die Beschleunigung berechnen.

Die gegebenen Gleichungen (112) gehen hier über in ($A = B = A$, $\delta = \pm\,\pi/2$):

$$(118)\qquad \begin{cases} x = \quad A\cos 2\pi n t, \\ y = \pm A \sin 2\pi n t. \end{cases}$$

Das doppelte Vorzeichen von δ bedeutet, wie man sich wiederum leicht überzeugt, daß je nach dem Vorzeichen der Phasendifferenz der Kreis

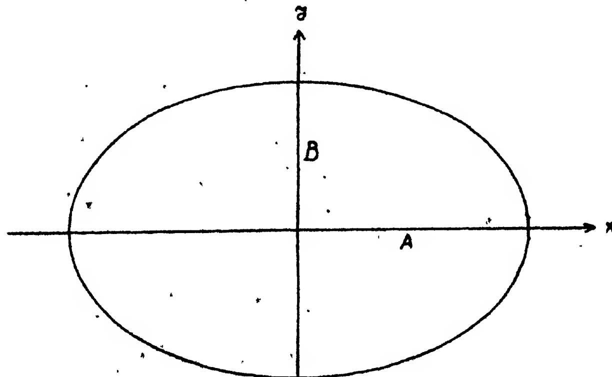


Fig. 31.

einmal im Sinne des Uhrzeigers, das andere Mal entgegen dem Sinne des Uhrzeigers durchlaufen wird. Durch Differentation nach t folgt:

$$(119)\qquad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \mp A\, 2\pi n \cdot \sin 2\pi n t = \mp 2\pi n \cdot y \mid y, \\ \frac{dy}{dt} = \pm A\, 2\pi n \cdot \cos 2\pi n t = \pm 2\pi n \cdot x \mid x. \end{cases}$$

Erweitert man diese Gleichung mit x und y, wie angedeutet, und subtrahiert, so ist:

$$y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt} = \pm 2\pi n (x^2 + y^2),$$

oder in Rücksicht auf (117):

$$y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt} = \pm 2\pi n A^2,$$

woraus durch Differentation nach t folgt:

$$(120)\qquad y\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2y}{dt^2} = 0.$$

Etwas anders geschrieben lautet diese Gleichung:

$$(121)\qquad \frac{\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)}{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)} = \frac{y}{x}.$$

d. h. die Richtung der Beschleunigung fällt mit der des Radiusvektors zusammen und ist ihm offenbar entgegengesetzt gerichtet. Ferner folgt durch Quadrieren und Addieren von (119):

$$|\mathfrak{c}|^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 4\pi^2 n^2 (x^2 + y^2) = 4\pi^2 n^2 A^2,$$

also:

(122) $$|\mathfrak{c}| = c = +2\pi n A.$$

d. h. die Geschwindigkeit ist dem Betrage nach konstant und ändert nur ihre Richtung. Der Kreis wird also mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen. Den Betrag der Beschleunigung erhält man, indem man (119) noch einmal nach t differentiiert:

(123) $$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -4\pi^2 A n^2 \cos 2\pi nt = -4\pi^2 n^2 x, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = \pm 4\pi^2 n^2 A \sin 2\pi nt = -4\pi^2 n^2 y, \end{cases}$$

woraus durch Quadrieren, Addieren und Wurzelziehen folgt:

$$|\mathfrak{a}| = a = 4\pi^2 n^2 A$$

oder, da nach (122) $2\pi n = c/A$ ist:

(124) $$|\mathfrak{a}| = a = \frac{c^2}{A}$$

oder unter Einführung der Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\varphi}{dt}$ durch die Gleichung $c = A\frac{d\varphi}{dt}$:

(124a) $$|\mathfrak{a}| = a = A\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2,$$

und das stimmt mit (60) überein, wenn man r und die Geschwindigkeit $r\frac{d\varphi}{dt}$ als konstant annimmt.

20. Relativbewegung.

Es ist bereits mehrfach betont worden, daß alle Bewegungen der Kinematik relativ sind, d. h. die Bewegung kann nur relativ zu einem Koordinatensystem oder Bezugskörper beschrieben werden, und von diesem ist keiner von dem andern ausgezeichnet. In der Dynamik ist, wie wir im zweiten Kapitel sehen werden, dies anders. Dort gibt es ein ausgezeichnetes Bezugssystem (oder vielmehr eine Klasse ausgezeichneter Bezugssysteme), für die allein die Gleichungen der Dynamik Geltung besitzen. Die auf ein solch ausgezeichnetes System bezogene Bewegung kann man als absolute bezeichnen.

Wir wollen ein solches ausgezeichnetes System durch K und die Koordinaten eines substantiellen Punktes in ihm durch (x, y, z) bezeich-

nen. Wir nehmen nun ein anderes Bezugssystem K', welches relativ zu K eine beliebige Bewegung haben kann; die Koordinaten unseres substantiellen Punktes in bezug auf K' seien (ξ, η, ζ), die wir in Gegensatz zu den absoluten Koordinaten (x, y, z) als relative Koordinaten bezeichnen werden. Ist die Bewegung des Koordinatensystems K' in bezug auf K gegeben, so sind dann auch die Beziehungen zwischen (x, y, z) und (ξ, η, ζ) sowie zwischen absoluter und relativer Geschwindigkeit und Beschleunigung gegeben. Als relative Geschwindigkeit bezeichnen wir sinngemäß diejenige mit den Komponenten $\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}$, als relative Beschleunigung diejenige mit den Komponenten $\frac{d^2\xi}{dt^2}, \frac{d^2\eta}{dt^2}, \frac{d^2\zeta}{dt^2}$. Das sind nämlich diejenigen Geschwindigkeiten bzw. Beschleunigungen, die ein Beobachter konstatieren würde, der sich mit K' mitbewegt (und von dessen Bewegung nichts zu wissen braucht). Übrigens gelten die Betrachtungen, die im folgenden angestellt werden, ganz allgemein für den Übergang von irgendeinem System K zu einem beliebigen anderen K'.

Die hier vorliegenden Beziehungen sind nun aufzustellen, und zwar wollen wir dies zunächst für den einfachen Fall tun, daß K' sich relativ

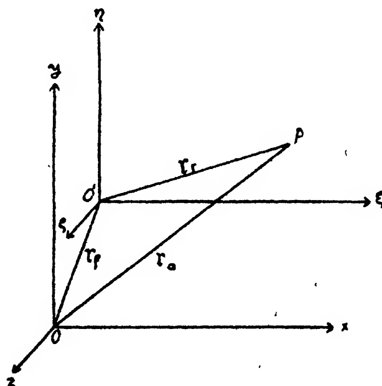


Fig. 32.

zu K so bewegt, daß jede der Achsen (ξ, η, ζ) von K' während der ganzen Bewegung sich parallel bleibt. Dann sagt man: K' führe relativ zu K eine reine Translationsbewegung aus.

Wir können sogar, ohne die Allgemeinheit einzuschränken, annehmen, daß die (ξ-, η-, ζ-)Achsen dauernd bzw. den Achsen x, y, z von K parallel sind, da wir die Beziehungen zwischen zwei ruhenden, gegeneinander gedrehten Systemen bereits erledigt haben (Nr. 11 und 14).

In Fig. 32 sind K' und K dargestellt; P ist der betrachtete substantielle Punkt.

Wir kommen am einfachsten zu dem gewünschten Resultat, wenn wir zunächst keine Koordinatenzerlegung vornehmen, sondern die Lage von P und von O', dem Koordinatenanfangspunkte von K', durch den entsprechenden Radiusvektor $\mathfrak{r}$ charakterisieren. Nennen wir den „Lagenvektor" von $O' : \mathfrak{r}_f$, den von P relativ zu $K : \mathfrak{r}_a$, den relativ zu $K' : \mathfrak{r}_r$, wobei die Indizes „a" und „r" auf absolute und relative Bestimmung hindeuten (der Index „f" findet später seine Erklärung), so ist offenbar $\mathfrak{r}_a$ die geometrische Summe von $\mathfrak{r}_f$ und $\mathfrak{r}_r$; also:

(125) $$\mathfrak{r}_a = \mathfrak{r}_f + \mathfrak{r}_r ,$$

oder in der Sprache der Komponentendarstellung gemäß der Definition der Vektorsumme:

(126) $$\begin{cases} x = x_f + \xi , \\ y = y_f + \eta , \\ z = z_f + \zeta , \end{cases}$$

wenn x_f, y_f, z_f die Komponenten von $\mathfrak{r}_f$ sind; die Bedeutung von (x, y, z) und (ξ, η, ζ) ist schon vorher festgesetzt worden.

Gleichung (126) läßt sich folgendermaßen formulieren: Die Koordinaten der absoluten Lage (d.h. in bezug auf ein Koordinatensystem K) eines substantiellen Punktes setzen sich additiv zusammen aus denen der relativen Lage (in bezug auf ein Koordinatensystem K') und denen des Koordinatenanfangspunktes von K' im System K.

Durch Differentiation nach der Zeit von (126) gewinnen wir die entsprechende Beziehung zwischen den Geschwindigkeiten:

(127) $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dx_f}{dt} + \dfrac{d\xi}{dt} , \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dy_f}{dt} + \dfrac{d\eta}{dt} , \\[2ex] \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{dz_f}{dt} + \dfrac{d\zeta}{dt} . \end{cases}$$

Darin sind $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ als die Komponenten der absoluten Geschwindigkeit zu bezeichnen; und ebenso $\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}$, wie schon vorher erwähnt, als die der Relativgeschwindigkeit. Die Größen $\frac{dx_f}{dt}, \frac{dy_f}{dt}, \frac{dz_f}{dt}$ sind die Geschwindigkeitskomponenten des Koordinatenanfangspunktes O' des Systems K' in bezug auf K, also auch die Geschwindigkeitskomponenten jedes Punktes des Systems K' in bezug auf K, also endlich die Geschwindigkeitskomponenten des betrachteten Punktes P, wenn er in K' fixiert wäre. Man nennt sie die Komponenten der „Führungsgeschwindigkeit". Denn man kann sich $\frac{dx}{dt}, \cdots$ nach (127) dadurch entstanden denken, daß zunächst P in K' fixiert sei, d. h.

von K' mitgeführt werde, und dann außerdem noch die Relativgeschwindigkeit $\frac{d\xi}{dt}, \cdots$ gegen K' erhalte. Wir erhalten also das Resultat:

Die Komponenten der absoluten Geschwindigkeit setzen sich additiv zusammen aus denen der Führungsgeschwindigkeit und denen der Relativgeschwindigkeit.

Bezeichnet man die vektorielle Führungsgeschwindigkeit durch $\mathfrak{c}_f$, die relative und absolute Geschwindigkeit durch die Indizes „r" und „a", so kann man (127) auch schreiben:

$$\mathfrak{c}_a = \mathfrak{c}_f + \mathfrak{c}_r; \tag{128}$$

in Worten also: Die absolute Geschwindigkeit ist die Vektorsumme aus Führungsgeschwindigkeit und Relativgeschwindigkeit.

Dieses Resultat ist zwar nur abgeleitet unter der Voraussetzung, daß K' gegen K in einer Translation begriffen sei; es gilt aber, wie leicht zu sehen ist, und wie wir später zeigen werden, allgemein.

Um zu den Beschleunigungen überzugehen, haben wir (127) noch einmal nach t zu differentiieren und erhalten:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{d^2x_f}{dt^2} + \frac{d^2\xi}{dt^2}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{d^2y_f}{dt^2} + \frac{d^2\eta}{dt^2}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{d^2z_f}{dt^2} + \frac{d^2\zeta}{dt^2}. \end{aligned}\right. \tag{129}$$

Dahin bedeuten offenbar $\frac{d^2x}{dt^2}, \cdots$ die Komponenten der absoluten Beschleunigung, $\frac{d^2\xi}{dt^2}, \cdots$ diejenige der Relativbeschleunigung: $\frac{d^2x_f}{dt^2}, \cdots$ sind offenbar die Komponenten derjenigen Beschleunigung, die P hätte, wenn es in K' fest wäre und mitgeführt würde. Es sind also die Komponenten der „Führungsbeschleunigung". Bezeichnen wir die drei Beschleunigungen durch die Indizes a, f, r, so können wir (129) in einer Vektorgleichung schreiben:

$$\mathfrak{a}_a = \mathfrak{a}_f + \mathfrak{a}_r, \tag{130}$$

d. h.: Im Falle K' gegen K eine Translationsbewegung besitzt, ist die Absolutbeschleunigung die Vektorsumme aus Führungsbeschleunigung und Relativbeschleunigung.

Ein besonders einfacher Fall ist der, daß K' relativ zu K eine gleichmäßige Translationsgeschwindigkeit besitzt. Dann ist offenbar $\mathfrak{c}_f$ = constant, also $\mathfrak{a}_f = 0$, und dann folgt aus (129) oder (130):

$$\mathfrak{a}_a = \mathfrak{a}_r, \tag{131}$$

d. h. die Beschleunigung bleibt unverändert (Absolutbeschleunigung = Relativbeschleunigung), wenn man von einem System K zu einem solchen K' übergeht, das relativ zu K eine gleichförmige Translationsbewegung ausführt.

Dieser Satz hat für die Dynamik eine fundamentale Bedeutung, indem er solche Koordinatensysteme, die relativ zueinander eine gleichmäßige Translationsbewegung haben, in Hinsicht auf die Beschleunigung als gleichwertig bezeichnet, während in allen anderen Fällen die einfache Gleichung (131) nicht gilt.

Nachdem im Vorliegenden der Fall der reinen Translationsbewegung von K' relativ zu K erledigt ist, wollen wir nun eine Drehung von K' gegen K in Betracht ziehen, wobei die Anfangspunkte von K' und K, der Einfachheit halber als zusammenfallend angenommen werden sollen. Dann gelten die Gleichungen (34), in denen jetzt aber die Kosinusse als Funktionen der Zeit zu betrachten sind:

$$(34)\qquad \begin{cases} x = \xi\cos\alpha_1 + \eta\cos\alpha_2 + \zeta\cos\alpha_3\,, \\ y = \xi\cos\beta_1 + \eta\cos\beta_2 + \zeta\cos\beta_3\,, \\ z = \xi\cos\gamma_1 + \eta\cos\gamma_2 + \zeta\cos\gamma_3\,. \end{cases}$$

Differentiieren wir jetzt einmal nach t, so erhalten wir:

$$(132)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \left(\dfrac{d\xi}{dt}\cos\alpha_1 + \dfrac{d\eta}{dt}\cos\alpha_2 + \dfrac{d\zeta}{dt}\cos\alpha_3\right) \\ \qquad\qquad + \left(\xi\,\dfrac{d\cos\alpha_1}{dt} + \eta\,\dfrac{d\cos\alpha_2}{dt} + \zeta\,\dfrac{d\cos\alpha_3}{dt}\right), \\ \dfrac{dy}{dt} = \left(\dfrac{d\xi}{dt}\cos\beta_1 + \dfrac{d\eta}{dt}\cos\beta_2 + \dfrac{d\zeta}{dt}\cos\beta_3\right) \\ \qquad\qquad + \left(\xi\,\dfrac{d\cos\beta_1}{dt} + \eta\,\dfrac{d\cos\beta_2}{dt} + \zeta\,\dfrac{d\cos\beta_3}{dt}\right), \\ \dfrac{dz}{dt} = \left(\dfrac{d\xi}{dt}\cos\gamma_1 + \dfrac{d\eta}{dt}\cos\gamma_2 + \dfrac{d\zeta}{dt}\cos\gamma_3\right) \\ \qquad\qquad + \left(\xi\,\dfrac{d\cos\gamma_1}{dt} + \eta\,\dfrac{d\cos\gamma_2}{dt} + \zeta\,\dfrac{d\cos\gamma_3}{dt}\right). \end{cases}$$

Jetzt stehen links die Komponenten der absoluten Geschwindigkeit: $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$. Auf der rechten Seite kann man zwei Terme, die durch Klammern voneinander getrennt sind, unterscheiden. Darin sind die Größen der drei ersten Klammern die x-, y-, z-Komponente der Geschwindigkeit, die ein auf dem System K' befindlicher Beobachter konstatieren würde, der nichts von der Bewegung von K' gegen K wüßte: ihm können nur die Größen ξ, η, ζ variabel erscheinen. Also sind $\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}$ die ξ-, η-, ζ-Komponenten der relativen Geschwindigkeit und $\frac{d\xi}{dt}\cos\alpha_1 + \frac{d\eta}{dt}\cos\alpha_2 + \frac{d\zeta}{dt}\cos\alpha_3, \ldots$ die x-Kom-

ponente usw. der relativen Geschwindigkeit. Die Größen der jeweiligen zweiten Klammern auf der rechten Seite sind die Geschwindigkeiten, die man erhält, wenn ξ, η, ζ als konstant, d. h. der substantielle Punkt P im System (ξ, η, ζ) als fixiert betrachtet wird. Es sind somit jedenfalls Komponenten der sogenannten Führungsgeschwindigkeit, und zwar die bezüglichen x-, y-, z-Komponenten der Führungsgeschwindigkeit. Denn man erhält durch Differentiation der Gleichung (34) nach t bei konstantem ξ, η, ζ offenbar nach der Definition der Führungsgeschwindigkeit die Komponenten derselben; also z. B. liefert die erste Gleichung (34):

$$\frac{d x_f}{d t} = \xi \frac{d \cos \alpha_1}{d t} + \eta \frac{d \cos \alpha_2}{d t} + \zeta \frac{d \cos \alpha_3}{d t},$$

womit das oben Gesagte bewiesen ist. Daher lassen sich die Gleichungen (132) in die Vektorgleichung zusammenfassen:

$$\mathfrak{c}_a = \mathfrak{c}_f + \mathfrak{c}_r ,$$

die mit (128) identisch ist. Es gilt also auch in unserem Falle der Satz: Die absolute Geschwindigkeit ist gleich der Vektorsumme aus relativer und Führungsgeschwindigkeit. Wir werden später sehen, daß jede unendlich kleine Bewegung eines starren Körpers — solche sind ja unsere Koordinatensysteme — aus einer Translation und einer Drehung zusammengesetzt werden kann. Also gilt der obige Satz ganz allgemein.

Um zur Beschleunigung zu gelangen, differentiieren wir die Gleichung (132) noch einmal nach t, dann folgt:

$$(133)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{d^2 x}{d t^2} &= \left(\frac{d^2 \xi}{d t^2}\cos\alpha_1 + \frac{d^2 \eta}{d t^2}\cos\alpha_2 + \frac{d^2 \zeta}{d t^2}\cos\alpha_3\right) \\
&\quad + 2\left(\frac{d\xi}{dt}\,\frac{d\cos\alpha_1}{dt} + \frac{d\eta}{dt}\,\frac{d\cos\alpha_2}{dt} + \frac{d\zeta}{dt}\,\frac{d\cos\alpha_3}{dt}\right) \\
&\quad + \left(\xi\,\frac{d^2\cos\alpha_1}{dt^2} + \eta\,\frac{d^2\cos\alpha_2}{dt^2} + \zeta\,\frac{d^2\cos\alpha_3}{dt^2}\right), \\
\frac{d^2 y}{d t^2} &= \left(\frac{d^2 \xi}{d t^2}\cos\beta_1 + \frac{d^2 \eta}{d t^2}\cos\beta_2 + \frac{d^2 \zeta}{d t^2}\cos\beta_3\right) \\
&\quad + 2\left(\frac{d\xi}{dt}\,\frac{d\cos\beta_1}{dt} + \frac{d\eta}{dt}\,\frac{d\cos\beta_2}{dt} + \frac{d\zeta}{dt}\,\frac{d\cos\beta_3}{dt}\right) \\
&\quad + \left(\xi\,\frac{d^2\cos\beta_1}{dt^2} + \eta\,\frac{d^2\cos\beta_2}{dt^2} + \zeta\,\frac{d^2\cos\beta_3}{dt^2}\right), \\
\frac{d^2 z}{d t^2} &= \left(\frac{d^2 \xi}{d t^2}\cos\gamma_1 + \frac{d^2 \eta}{d t^2}\cos\gamma_2 + \frac{d^2 \zeta}{d t^2}\cos\gamma_3\right) \\
&\quad + 2\left(\frac{d\xi}{dt}\,\frac{d\cos\gamma_1}{dt} + \frac{d\eta}{dt}\,\frac{d\cos\gamma_2}{dt} + \frac{d\zeta}{dt}\,\frac{d\cos\gamma_3}{dt}\right) \\
&\quad + \left(\xi\,\frac{d^2\cos\gamma_1}{dt^2} + \eta\,\frac{d^2\cos\gamma_2}{dt^2} + \zeta\,\frac{d^2\cos\gamma_3}{dt^2}\right).
\end{aligned}\right.$$

Links stehen wieder die x-, y-, z-Komponenten der absoluten Beschleunigung $\mathfrak{a}_a$. Rechts kann man drei Gruppen unterscheiden, die durch

Klammern voneinander getrennt sind. Die erste Klammer jeder Gleichung gibt offenbar die x-, y-, z-Komponenten der Beschleunigung an, die ein mit K' mitbewegter Beobachter konstatieren würde, also der sogenannten Relativbeschleunigung $\mathfrak{a}_r$. Die dritte Klammer jeder Gleichung, in denen ξ, y, ζ konstant gehalten sind, ergibt die x-, y-, z-Komponenten derjenigen Beschleunigung, die man erhalten würde, wenn der substantielle Punkt P in K' befestigt wäre, also der sogenannte Führungsbeschleunigung $\mathfrak{a}_f$. Während damit im Falle der Translation von K' gegen K alles erledigt war, tritt hier noch ein drittes Glied auf, indem die Produkte zweier Geschwindigkeiten, z. B. $\frac{d\xi}{dt}$ und $\frac{d\cos\alpha_1}{dt}$ auftreten. Dieser Teil der Beschleunigung wird „Zusammengesetzte Beschleunigung" oder auch, nach dem französischen Physiker und Ingenieur Coriolis, die „Coriolissche Beschleunigung" genannt, die wir durch $\mathfrak{a}_c$ bezeichnen wollen. Demgemäß sind hier, wenn wir die Gleichung (133) in eine Vektorgleichung zusammenfassen wollen:

(134) $$\mathfrak{a}_a = \mathfrak{a}_r + \mathfrak{a}_f + \mathfrak{a}_c;$$

in Worten: Im Falle, daß K' relativ zu K eine Drehbewegung ausführt, ist die absolute Beschleunigung gleich der Vektorsumme aus Relativ-, Führungs- und Coriolis-Beschleunigung. Dieser Satz gilt allgemein, welches auch die Bewegungen von K' gegen K sein mögen; er schließt, wie man leicht sieht, den Fall der Translationsbewegung von K' gegen K als Spezialfall in sich, indem dann $\mathfrak{a}_c = 0$ wird.

Seiner Bedeutung halber wollen wir nun noch den einfacheren Fall behandeln, daß K' und K die z-Achse bzw. ζ-Achse gemeinsam haben, und K' eine Rotation um diese gemeinschaftliche Achse ausführt. Dann haben wir von den Transformationsgleichungen (38) auszugehen, die nur nach x, y aufgelöst zu werden brauchen:

(38a) $$\begin{cases} x = \xi\cos\alpha_1 - y\sin\alpha\,, \\ y = \xi\sin\alpha + \eta\cos\alpha\,, \\ z = \zeta\,. \end{cases}$$

Deren Differentiation ergibt:

(135) $$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \left(\frac{d\xi}{dt}\cos\alpha_1 - \frac{d\eta}{dt}\sin\alpha_1\right) + \left(\xi\frac{d\cos\alpha_1}{dt} - \eta\frac{d\sin\alpha_1}{dt}\right), \\ \frac{dy}{dt} = \left(\frac{d\xi}{dt}\sin\alpha_1 + \frac{d\eta}{dt}\cos\alpha_1\right) + \left(\xi\frac{d\sin\alpha_1}{dt} + \eta\frac{d\cos\alpha_1}{dt}\right), \\ \frac{dz}{dt} = \frac{d\zeta}{dt}, \end{cases}$$

und diese Gleichungen sprechen, nur in spezieller Form, wiederum aus, daß die absolute Geschwindigkeit gleich der Vektorsumme aus relativer und Führungsgeschwindigkeit ist. Durch nochmalige Differentiation nach t folgt weiter:

$$(136)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = \left(\dfrac{d^2\xi}{dt^2}\cos\alpha_1 - \dfrac{d^2\eta}{dt^2}\sin\alpha_1\right) + 2\left(\dfrac{d\xi}{dt}\dfrac{d\cos\alpha_1}{dt} - \dfrac{d\eta}{dt}\dfrac{d\sin\alpha_1}{dt}\right) \\ \qquad\qquad + \left(\xi\dfrac{d^2\cos\alpha_1}{dt^2} - \eta\dfrac{d^2\sin\alpha_1}{dt^2}\right), \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = \left(\dfrac{d^2\xi}{dt^2}\sin\alpha_1 + \dfrac{d^2\eta}{dt^2}\cos\alpha_1\right) + 2\left(\dfrac{d\xi}{dt}\dfrac{d\sin\alpha_1}{dt} + \dfrac{d\eta}{dt}\dfrac{d\cos\alpha_1}{dt}\right) \\ \qquad\qquad + \left(\xi\dfrac{d^2\sin\alpha_1}{dt^2} + \eta\dfrac{d^2\cos\alpha_1}{dt^2}\right), \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = \dfrac{d^2\zeta}{dt^2}, \end{cases}$$

Gleichungen, die wiederum, wenn auch in spezieller Form, den Satz (134) lehren. Diese Gleichungen können nun zur Deutung der einzelnen Glieder der Gleichung (60) benutzt werden. Dazu wollen wir noch spezieller annehmen, daß der Punkt P im System K' auf der ξ-Achse liege, also die Koordinaten $(\xi, 0)$ habe. Mit $\eta = 0$ gehen die Gleichungen über in

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2\xi}{dt^2}\cos\alpha_1 - 2\frac{d\xi}{dt}\frac{d\alpha_1}{dt}\sin\alpha_1 - \xi\cos\alpha_1\left(\frac{d\alpha_1}{dt}\right)^2 - \xi\sin\alpha_1\frac{d^2\alpha_1}{dt^2},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2\xi}{dt^2}\sin\alpha_1 + 2\frac{d\xi}{dt}\frac{d\alpha_1}{dt}\cos\alpha_1 - \xi\sin\alpha_1\left(\frac{d\alpha_1}{dt}\right)^2 + \xi\cos\alpha_1\frac{d^2\alpha_1}{dt^2},$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2\zeta}{dt^2},$$

oder anders geordnet:

$$(137)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = \left[\dfrac{d^2\xi}{dt^2} - \xi\left(\dfrac{d\alpha_1}{dt}\right)^2\right]\cos\alpha_1 - \left[2\dfrac{d\xi}{dt}\dfrac{d\alpha_1}{dt} + \xi\dfrac{d^2\alpha_1}{dt^2}\right]\sin\alpha_1, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = \left[\dfrac{d^2\xi}{dt^2} - \xi\left(\dfrac{d\alpha_1}{dt}\right)^2\right]\sin\alpha_1 + \left[2\dfrac{d\xi}{dt}\dfrac{d\alpha_1}{dt} + \xi\dfrac{d^2\alpha_1}{dt^2}\right]\cos\alpha_1, \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = \dfrac{d^2\zeta}{dt^2}. \end{cases}$$

Setzen wir noch $z = \zeta = 0$, so haben wir den Fall einer **ebenen Bewegung** und ein Vergleich mit (38a) zeigt sofort, daß $\frac{d^2\xi}{dt^2} - \xi\left(\frac{d\alpha_1}{dt}\right)^2$ die ξ-Komponente, $2\frac{d\xi}{dt}\frac{d\alpha_1}{dt} + \xi\frac{d^2\alpha_1}{dt^2}$ die η-Komponente der Beschleunigung ist. Die Gleichung (137) entspricht folgender Anordnung (Fig. 38).

Wir können also schreiben:

$$(138)\quad \begin{cases} \mathfrak{a}_\xi = \dfrac{d^2\xi}{dt^2} - \xi\left(\dfrac{d\alpha_1}{dt}\right)^2, \\ \mathfrak{a}_\eta = 2\dfrac{d\xi}{dt}\dfrac{d\alpha_1}{dt} + \xi\dfrac{d^2\alpha_1}{dt^2}. \end{cases}$$

Nun wollen wir den Punkt P durch ein ebenes Polarkoordinatensystem (r, φ) bestimmen, welches mit K und K' denselben Anfangspunkt hat. Dann ist offenbar nach Fig. 38:

$$(139)\quad \begin{cases} \xi = r, \\ \alpha_1 = \varphi. \end{cases}$$

Die ξ-Komponente wird dann zur **Radialkomponente** $\mathfrak{a}_r$, die η-Komponente zur **Transversalkomponente** $\mathfrak{a}_\varphi$ der Beschleunigung, und es ist nach (138) und (139):

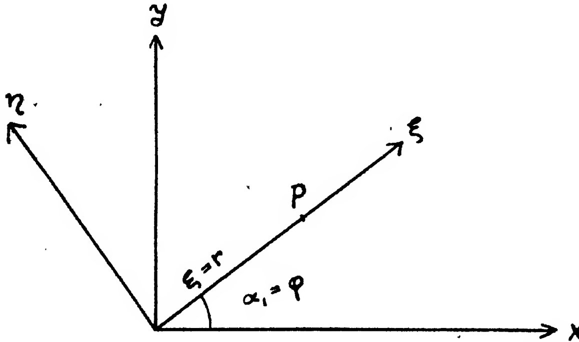


Fig. 33.

(140)
$$\begin{cases} \mathfrak{a}_\xi = \mathfrak{a}_r = \dfrac{d^2 r}{d t^2} - r\left(\dfrac{d\varphi}{dt}\right)^2, \\ \mathfrak{a}_\eta = \mathfrak{a}_\varphi = 2\dfrac{dr}{dt}\dfrac{d\varphi}{dt} + r\dfrac{d^2\varphi}{dt^2}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen stimmen mit unseren alten Gleichungen (60) überein und gestatten eine Deutung der auftretenden einzelnen Glieder im Sinne der absoluten und relativen Bewegung. Die gesamte Beschleunigung $\mathfrak{a}$ setzt sich nach (140) zusammen aus zwei zueinander senkrechten Komponenten $\mathfrak{a}_r$ und $\mathfrak{a}_\varphi$; nun können wir offenbar $\mathfrak{a}$ als **absolute** Beschleunigung in bezug auf (x, y) auffassen, während wir das Polarkoordinatensystem als bewegtes System K' deuten. Dann ist $\frac{d^2 r}{dt^2}$ die **radiale Relativbeschleunigung**, $-r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$ und $\left(r\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)$ bzw. die radiale **und transversale Komponente der Führungsbeschleunigung**, $2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}$ die **transversale Coriolisbeschleunigung**.

Für die Anwendungen, die wir später zu machen haben, wollen wir noch eine weitere Spezialisierung eintreten lassen; wir wollen nämlich annehmen, daß das System K' relativ zum System K um die gemeinsame z-Achse **mit konstanter Winkelgeschwindigkeit** ω rotiere. Dann können wir in den wieder als Ausgangspunkt dienenden Gleichungen (88a) den Winkel α_1 als Funktion der Zeit ausdrücken durch $\alpha_1 = \omega t$. Denn dann ist $\frac{d\alpha_1}{dt} = \omega$ in der Tat die konstante Winkelgeschwindigkeit. Wir haben also:

$$(141)\quad \begin{cases} x = \xi \cos\omega t - \eta \sin\omega t\,, \\ y = \xi \sin\omega t + \eta \cos\omega t\,, \\ z = \zeta. \end{cases}$$

Setzen wir $a_1 = \omega t$ ebenfalls in die Gleichungen (135) ein, oder differentiieren wir direkt (141), so erhalten wir für die Geschwindigkeiten:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\xi}{dt}\cos\omega t - \frac{d\eta}{dt}\sin\omega t - \omega(\xi\sin\omega t + \eta\cos\omega t),$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{d\xi}{dt}\sin\omega t + \frac{d\eta}{dt}\cos\omega t + \omega(\xi\cos\omega t - \eta\sin\omega t),$$
$$\frac{dz}{dt} = \frac{d\zeta}{dt},$$

und diese können unter Berücksichtigung von (141) in die Form gebracht werden:

$$(142)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{d\xi}{dt}\cos\omega t - \dfrac{d\eta}{dt}\sin\omega t - \omega y, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{d\xi}{dt}\sin\omega t + \dfrac{d\eta}{dt}\cos\omega t + \omega x, \\ \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{d\zeta}{dt}. \end{cases}$$

Durch nochmalige Differentiation nach t folgt für die Beschleunigungen:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2\xi}{dt^2}\cos\omega t - \frac{d^2\eta}{dt^2}\sin\omega t - \omega\frac{dy}{dt}$$
$$-\omega\left\{\frac{d\xi}{dt}\sin\omega t + \frac{d\eta}{dt}\cos\omega t\right\},$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2\xi}{dt^2}\sin\omega t + \frac{d^2\eta}{dt^2}\cos\omega t + \omega\frac{dx}{dt}$$
$$+\omega\left\{\frac{d\xi}{dt}\cos\omega t - \frac{d\eta}{dt}\sin\omega t\right\},$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2\zeta}{dt^2}$$

und durch Anwendung von (142) lassen sich diese in die endgültige Form bringen:

$$(143)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = \left(\dfrac{d^2\xi}{dt^2}\cos\omega t - \dfrac{d^2\eta}{dt^2}\sin\omega t\right) - 2\omega\dfrac{dy}{dt} + \omega^2 x, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = \left(\dfrac{d^2\xi}{dt^2}\sin\omega t + \dfrac{d^2\eta}{dt^2}\cos\omega t\right) + 2\omega\dfrac{dx}{dt} + \omega^2 y, \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = \dfrac{d^2\zeta}{dt^2}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen werden eine wichtige Rolle spielen, wenn wir den Einfluß der Erdrotation auf die Erscheinungen der Mechanik untersuchen werden. Auch hier lassen sich rechts wieder drei Gruppen unterscheiden, die beziehungsweise als die Komponenten der Relativ-, Coriolis- und Führungsbeschleunigung zu bezeichnen sind.

21. Dimensionen.

In der ganzen Physik pflegt man, in Erweiterung des geometrischen Begriffes der Dimensionen, allen vorkommenden Größen eine „Dimension" beizulegen, wobei man natürlich nicht alles auf Längen zurückführen kann. In der Kinematik, die aus der Geometrie durch Hinzufügung der Zeit als vierter Variable hervorgeht, müssen wir außer der Grundeinheit der Länge, die wir stets durch L bezeichnen werden, noch die Grundeinheit der Zeit, die T genannt werden soll, hinzunehmen. Eine Geschwindigkeit, die der Definition nach eine Länge dividiert durch eine Zeit ist, ist also in bezug auf L von der ersten, in bezug auf T von der $(-1)^{\text{ten}}$ Dimension. Um dies anzudeuten, schreibt man „Dimensionsgleichungen", indem man die zu untersuchende Größe und die Dimensionen in eckige Klammern einschließt. So erhält man für die Geschwindigkeit:

$$[\mathfrak{c}] = [L\,T^{-1}]. \tag{144}$$

In derselben Weise findet man für die Dimension der Beschleunigung, die als eine Geschwindigkeit dividiert durch eine Zeit definiert ist:

$$[\mathfrak{a}] = [L\,T^{-2}]. \tag{145}$$

Diese Dimensionsbetrachtungen haben den Vorteil, daß man sehr leicht von einem Maßsystem zum anderen übergehen kann, und daß man geeignete Festsetzungen für die Einheiten treffen kann. So werden wir nach (144) als Einheit der Geschwindigkeit diejenige bezeichnen, bei der in der Einheit der Zeit die Einheit der Länge zurückgelegt wird; also im sogenannten absoluten physikalischen Maßsystem ist die Einheit der Geschwindigkeit diejenige, bei der 1 cm in 1 Sekunde zurückgelegt wird. Ebenso ist die Einheit der Beschleunigung in diesem Maßsystem diejenige, bei der eine Geschwindigkeitsvermehrung um 1 cm pro Sekunde eintritt. In der Dynamik wird zu den beiden Grundeinheiten L und T noch eine dritte, die der Masse M hinzukommen. Damit gelingt es, alle in der Mechanik vorkommenden Dimensionen darzustellen.

Zweites Kapitel.

Allgemeine Dynamik eines substantiellen Punktes.

22. Der Begriff der Trägheit.

Wenn wir irgendeine Bewegung betrachten, so lassen sich zwei bestimmende Momente an ihr unterscheiden. Der größeren Deutlichkeit halber wollen wir die beabsichtigte Unterscheidung am Beispiel des horizontalen Wurfes erläutern und nachher verallgemeinern.

Für den horizontalen Wurf gelten die Formeln (80) und (81) des ersten Kapitels (pag. 43), die wir hier nochmals anschreiben:

(1) $$x = 0, \quad y = v_0 t, \quad z = -\tfrac{1}{2} g t^2 + h,$$

(2) $$y^2 = -\frac{2 v_0^2}{g}(z - h),$$

von denen die letztere aussagt, daß die Bahn eine Parabel ist, die im wesentlichen durch die Anfangsgeschwindigkeit v_0 und die Beschleuni-

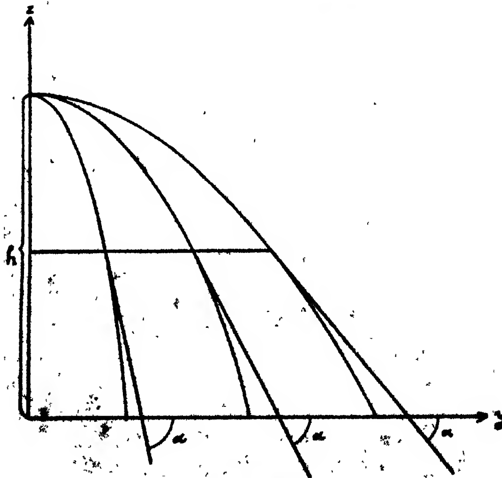


Fig. 34.

gung g bestimmt ist. Und zwar sieht man leicht ein, daß beide Bestimmungsstücke in gewissem Sinne einander entgegenwirken, indem eine

Vergrößerung von v_0 die Parabel verflacht und weiter öffnet, während eine Vergrößerung von g die Parabel steiler macht. Wie eine Vergrößerung von v_0, so wirkt auch eine Verkleinerung von g und umgekehrt. Eine Erläuterung soll die Fig. 34 geben, in der die Parabelbahnen für denselben Wert von g, aber für verschieden große Werte v_0 konstruiert sind. Je größer v_0, desto gestreckter ist die Bahn, und für $v_0 = \infty$ würde sie eine horizontale Gerade darstellen.

Man kann dies auch etwas anders ausdrücken. Bilden wir zu diesem Zwecke den Differentialquotienten $\frac{dz}{dy}$ aus (1), so finden wir dafür:

$$\frac{dz}{dy} = \frac{\left(\frac{dz}{dt}\right)}{\left(\frac{dy}{dt}\right)} = -\frac{gt}{v_0} = \operatorname{tg} \alpha . \tag{3}$$

Dieser Wert $\frac{dz}{dy}$ gibt die Neigung der Parabeln an einer solchen Stelle an, die der substantielle Punkt zur Zeit t gerade erreicht hat. Nennt man α den Winkel, den die in diesem Punkte errichtete Tangente mit der positiven y-Achse bildet, so ist $\frac{dz}{dy} = \operatorname{tg}\alpha$. Nun wollen wir die Winkel α für die verschiedenen Parabeln zur selben Zeit t vergleichen; nehmen wir etwa $t = 1$ Sekunde, dann ist:

$$\left(\frac{dz}{dy}\right)_{t=1} = -\frac{g}{v_0}, \tag{3a}$$

und diese Neigung ist offenbar um so kleiner, je größer v_0 im Verhältnis zu g, d. h. je größer die Anfangsgeschwindigkeit im Verhältnis zur Beschleunigung ist. In der Fig. 34 sind die Winkel α für die drei Parabeln eingezeichnet, und man ersieht unmittelbar die Richtigkeit dieses Sachverhaltes. Man kann diese Neigung als ein Maß der Richtungsänderung oder Ablenkung von derjenigen Bahn betrachten, die der substantielle Punkt beschreiben würde, wenn die Anfangsgeschwindigkeit unendlich groß im Verhältnis zur Beschleunigung oder besser, wenn die Beschleunigung 0 sein würde. Denn in diesem Falle würde die Bahnkurve nach (3a) die Neigung 0 gegen die y-Achse besitzen, also in eine horizontale Gerade ausarten.

Man kann also die vorliegende Bewegung als einen Kampf zwischen der Wirkung der Anfangsgeschwindigkeit und derjenigen der Beschleunigung ansehen. Die tatsächliche Bewegung ist gewissermaßen ein Kompromiß zwischen beiden Wirkungen. Welchen Fall von Bewegung man auch ins Auge fassen mag, so lassen sich doch immer diese beiden gegensätzlichen Bestrebungen daran unterscheiden.

Was hier konstatiert wurde, ist natürlich keine Erfahrungstatsache; denn wir haben das aus den rein kinematischen Gleichungen (1) und (2) gefolgert; es ist im Grunde eine Tautologie. Denn wenn ein Körper

keine Beschleunigung hat, hat er eben eine konstante Geschwindigkeit, und dadurch ergibt sich alles eben Behauptete. Aber die obigen Überlegungen drängen zu einer Frage hin, die im Gegensatz zu den bisherigen Erörterungen als eine quaestio facti anzusehen ist, nämlich zu der Frage: „Unter welchen Umständen behält in der Natur ein substantieller Punkt eine ihm erteilte Anfangsgeschwindigkeit der Größe und Richtung nach bei?“ Oder anders ausgedrückt: „Unter welchen objektiven Umständen ist ein substantieller Punkt imstande, eine gleichförmige Bewegung auf geradliniger Bahn auszuführen?“ Die Antwort, die man in der Mechanik seit Galilei darauf zu geben pflegt, ist im Grunde aus folgenden anthropomorphen Erwägungen hervorgegangen: Wir können durch Eingreifen unserer Muskeltätigkeit den Bewegungszustand eines substantiellen Punktes verändern, seine Geschwindigkeit vergrößern, verkleinern, die Richtung ändern usw., kurz, wir können durch diesen äußeren Eingriff Beschleunigungen erzeugen. Dies führt dazu, die Beschleunigung allgemein als Folge oder Wirkung äußerer Eingriffe anzusehen. Akzeptiert man vorläufig einmal diese Formulierung, so ist Fehlen von Beschleunigung gleichbedeutend mit dem Fehlen äußerer Einwirkungen, und somit lautet die Antwort auf die gestellte Frage: „Ein substantieller Punkt verharrt in seinem Zustande der gleichförmigen Bewegung auf geradliniger Bahn, wenn keine äußeren Einwirkungen vorhanden sind.“

Diesen Satz kann man bis zu einem gewissen Grade durch das Experiment stützen. Lasse ich eine Kugel mit einer bestimmten Geschwindigkeit über eine beliebige Unterlage rollen, so wird beobachtet, daß die Kugel zur Ruhe kommt, also ihren ursprünglichen Bewegungszustand nicht beibehält. Das scheint zunächst ein direkter Widerspruch gegen das obige Prinzip zu sein. Macht man aber jetzt die Unterlage glatter und immer glatter, so kommt die Kugel erst nach längerer und immer längerer Zeit zur Ruhe. Man wird also geneigt sein, zuzugeben, daß dies darauf beruht, daß infolge der Politur der Unterlage die Kugel von der Unterlage weniger beeinflußt wird als vorher, also geringere „äußere Einwirkungen“ erfährt. Gibt man dies wirklich zu, so kann man das Resultat des Experimentes folgendermaßen aussprechen: „Je kleiner der Einfluß der Unterlage ist, desto länger behält die Kugel ihre gleichförmige geradlinige Bewegung bei“, und der Experimentalphysiker wird, namentlich wenn alle übrigen Erfahrungen sich in derselben Weise deuten lassen, kein Bedenken tragen, diesen Satz zu extrapolieren auf den allerdings nie realisierbaren Fall, daß gar keine äußeren Einflüsse vorhanden sind. In dieser Form würde der Satz lauten: „Die Kugel behält, wenn alle äußeren Einflüsse beseitigt worden sind, ihren anfänglichen Bewegungszustand unverändert bei.“ Das ist aber bereits das oben ausgesprochene Galileische Prinzip. Natürlich sind derartige Experimente kein strenger Beweis, vor allem deshalb nicht, weil eine unabhängige Erklärung des Begriffes „äußere Einwirkung“ fehlt. Aber so viel zeigen diese Überlegungen doch, daß jedenfalls der obige Satz

der Erfahrung nicht widerspricht, sondern daß man letztere im Sinne des obigen Satzes interpretieren kann. Das ist überhaupt beim Experiment das Wesentlichste: die Interpretation; eine Einzeltatsache bleibt eine Einzeltatsache, auch wenn sie tausendmal beobachtet worden ist; erst die Interpretation, der Gedanke, macht die rohe Empirie fruchtbar.

Galilei war der erste, der dieses Gesetz ausgesprochen hat. Er stellte sich damit auf den Standpunkt, daß eine gleichmäßige geradlinige Bewegung, da sie ohne äußere Einwirkung bestehen bleibt, keiner Erklärung bedürfe. Im Gegensatz dazu nahmen die Alten an, daß zur Aufrechterhaltung auch einer gleichförmigen geradlinigen Bewegung äußere Einflüsse notwendig seien. Nur in dem Falle, daß die gleichförmige geradlinige Bewegung in die Ruhe ausartet, hat auch vor Galilei kein Zweifel darüber bestanden, daß dieser spezielle Zustand zur Erklärung keiner Einwirkung von außen bedürfe. Man sieht, daß Galileis Standpunkt der einfachere ist: Für ihn sind nur die Beschleunigungen zu erklären, d. h. als Wirkung äußerer Einflüsse zu betrachten während für die Alten sowohl Beschleunigung als auch gleichförmige geradlinige Bewegung durch Einwirkung der Außenwelt erklärt werden müssen.

Man kann es also als Galileis Fortschritt bezeichnen, daß er erkannt hat, daß die Erfahrungstatsachen im Sinne des von ihm formulierten Satzes gedeutet werden können. Man kann daher auch streng genommen nicht sagen, daß der Galileische Satz, den wir später im Anschluß an Newton noch genauer formulieren müssen, ein Erfahrungssatz sei; im Gegenteil könnten sich eher die Alten auf die nackte empirische Tatsache berufen, daß jede Bewegung schließlich zur Ruhe kommt. Man kann aber Galileis Prinzip etwa als „interpretierten Erfahrungssatz" bezeichnen.

Um dieses Verhalten der Körper, eine einmal vorhandene gleichförmige geradlinige Bewegung beizubehalten, unserem Kausalbedürfnis näher zu bringen, hat man ihnen eine Eigenschaft zugeschrieben, die man als „Trägheit" oder als „Beharrungsvermögen" bezeichnet, und daher nennt man auch den oben ausgesprochenen Satz das Trägheitsgesetz.

Vorläufig nur ein Wort, eine bequeme Abkürzung für eine längere Aussage, wird sich die Trägheit im folgenden als eine meßbare Größe erweisen.

23. Der Begriff der Kraft und der Masse.

Wenn wir uns jetzt auf den Standpunkt des Trägheitsgesetzes stellen, den die glänzende Entwicklung der Mechanik seit Galilei als fruchtbar gerechtfertigt hat, so müssen wir die Beschleunigungen als die Folge der äußeren Einwirkungen annehmen. Andererseits haben wir für das Dasein, das Wirken eines äußeren Einflusses kein anderes Merkmal als das, daß er an einem gegebenen substantiellen Punkte eine Be-

schleunigung hervorruft. Wir wollen nun die Ursache einer Beschleunigung als eine Kraft bezeichnen, in dem wir unter „Kraft" gewisse objektive äußere Verhältnisse und Bedingungen verstehen, insbesondere die geometrische Konfiguration und die physikalische Natur aller den betrachteten Punkt umgebenden übrigen substantiellen Punkte. Jedesmal also, wenn derselbe substantielle Punkt denselben äußeren Bedingungen unterstellt wird, ist nach unserer Auffassung dieselbe Kraft wirksam. Es ist von fundamentaler Wichtigkeit, sich klar zu machen, daß die objektiven Umstände, die an einem substantiellen Punkte eine Beschleunigung hervorbringen, sowohl von der Lage als auch von der Bewegung des Koordinatensystems ganz unabhängig sind, da sie nicht von einer mathematischen Zwischenkonstruktion abhängen können.

Der Ursprung der Bezeichnung „Kraft" für diese realen Bedingungen ist zweifellos anthropomorphen Ursprunges, insofern, als Beschleunigungen direkt vom Menschen unter Aufwendung von „Muskelanstrengung" oder „Muskelkraft" hervorgebracht werden können. Wenn eine Kraft einem substantiellen Punkte eine Beschleunigung erteilt, so drücken wir dies kurz folgendermaßen aus: „An dem substantiellen Punkte wirkt eine Kraft", oder „greift eine Kraft an".

Es liegt nun nahe, nach dem Vorstehenden ein Maß für die auf einen substantiellen Punkt wirkende Kraft in der Beschleunigung zu suchen, die sie demselben erteilt, und etwa in einfachster Ausführung dieses Gedankens die Kraft $\mathfrak{K}$ proportional der Beschleunigung zu setzen, wobei der Proportionalitätsfaktor eine universelle Konstante wäre. Würden wir den letzteren willkürlich etwa $= 1$ setzen, so würden wir damit, da die Einheit der Beschleunigung festgesetzt ist, sofort auch eine Krafteinheit besitzen. Indessen ist dieser einfachste Weg nicht zweckmäßig; die Tatsachen weisen vielmehr auf eine andere Art hin, ein Kraftmaß zu finden. Die Erfahrung lehrt nämlich, daß zwar dieselbe Kraft einem frei beweglichen substantiellen Punkte stets ein und dieselbe Beschleunigung erteilt, aber verschieden substantiellen Punkten im allgemeinen verschiedene Beschleunigungen. Wir können z. B. einer Reihe substantieller Punkte dadurch Beschleunigungen erteilen, daß wir sie abwechselnd an eine zu bestimmter Länge ausgezogene elastische Feder anhängen, die dann, losgelassen, jeden an ihr befestigten Punkt in ganz bestimmter Weise beschleunigt. Die Einwirkung der Feder oder, wie wir jetzt sagen können, die „Federkraft" stellt in diesem Falle für unsere substantiellen Punkte die „äußeren Einwirkungen" dar. Man wird zugeben, daß, wenn dieselbe Feder stets zur selben Länge ausgezogen wird, dann stets dieselbe äußere Einwirkung oder dieselbe Kraft vorhanden ist. Diese Annahme wäre freilich nicht notwendig, aber sie empfiehlt sich durch ihre einleuchtende Einfachheit. Dann können wir beobachten, wie verschiedene substantielle Punkte nicht gleiche Beschleunigungen durch die Feder erfahren; nennen wir die

Punkte 1, 2, 3 usw. und bezeichnen wir die Beschleunigungen derselben durch entsprechende Indices, so müssen wir, falls wir die Kraft der Beschleunigung proportional setzen wollen — und eine andere Möglichkeit liegt überhaupt nicht vor — doch in jedem Falle den Proportionalitätsfaktor verschieden annehmen, also etwa setzen:

$$\mathfrak{K} = m_1 \mathfrak{a}_1 = m_2 \mathfrak{a}_2 = m_3 \mathfrak{a}_3 = \ldots m_\lambda \mathfrak{a}_\lambda. \tag{4}$$

Die Konstanten m_λ sind dabei Größen, die jedenfalls von dem betreffenden substantiellen Punkte λ abhängen; es wäre aber natürlich auch denkbar, daß sie noch von der Kraft $\mathfrak{K}$ abhingen. Diese Frage kann durch das Experiment entschieden werden, indem man verschiedene Federn auf die nämlichen substantiellen Punkte wirken läßt. Wir nehmen also eine andere Feder, üben folglich eine andere Kraft $\mathfrak{K}'$ auf die substantiellen Punkte aus, die ihnen die Beschleunigungen $\mathfrak{a}_1'$, $\mathfrak{a}_2'$ ... erteilen möge. Dann ergibt das Experiment, daß hier gilt:

$$\mathfrak{K}' = m_1 \mathfrak{a}_1' = m_2 \mathfrak{a}_2' = m_3 \mathfrak{a}_3' = \ldots m_\lambda \mathfrak{a}_\lambda', \tag{5}$$

wo die Faktoren m_λ die nämlichen sind wie vorher. In beiden Fällen sind die beschleunigten Punkte ungeändert, aber die Kräfte sind andere. Dennoch sind die Faktoren m_λ ungeändert geblieben, sie können mithin nicht von den Kräften, sondern nur von der Natur der substantiellen Punkte abhängen. Wir nennen den Faktor m_λ die „Masse" des substantiellen Punktes. Die Masse ist durch die obige Gleichung allerdings nur bis auf einen konstanten Faktor bestimmt, da Gleichung (4) nur Massenverhältnisse zu bestimmen erlaubt. Sobald jedoch eine Einheit der Masse festgestellt ist, sind damit sämtliche Massen vollkommen bestimmt.

Als Einheit der Masse dient das sogenannte „Kilogramme des archives", das zu Sèvres bei Paris aufbewahrt ist; der Absicht nach sollte es die Menge von 1 Kubikdezimeter Wasser bei 4° C sein. Da das hergestellte Hohlmaß nicht genau gleich 1 Kubikdezimeter ist und ein Maß überhaupt nie exakt sein kann, so hat man ganz analog wie bei der Längeneinheit einfach diejenige Wassermenge bei 4° als Einheit der Masse genommen, welche jenes Hohlmaß füllt. Sie führt den Namen Kilogramm. In der Physik ist es übrigens üblich, als Einheit der Masse den 1000. Teil des Kilogramms, das Gramm, zu benutzen. Die Masse tritt als dritte Grundeinheit M neben die beiden schon eingeführten der Länge L in der Zeit T. Zur Bestimmung der Masse würde man also einmal die Masseneinheit durch eine Feder beschleunigen lassen; die Beschleunigung sei $= \mathfrak{a}_0$; dann eine unbekannte Masse m_λ, und würde zufolge (4) erhalten:

$$1 \, \mathfrak{a}_0 = m_\lambda \mathfrak{a}_\lambda.$$

oder

$$m_\lambda = \frac{\mathfrak{a}_0}{\mathfrak{a}_\lambda} \tag{6}$$

d. h. die Masse würde sich als das Verhältnis zweier Beschleunigungen ergeben, die mit Maßstab und Uhr gemessen werden können.

Nach Gleichung (4) folgt, daß die durch eine bestimmte Kraft einem substantiellen Punkte erteilte Beschleunigung umgekehrt proportional seiner Masse ist. Je größer die Masse, desto größer also der „Widerstand" des substantiellen Punktes gegen Beschleunigung. Erinnern wir uns an die in der vorigen Nummer eingeführte Bezeichnung der „Trägheit", so können wir die Masse direkt als ein Maß der Trägheit oder des Beharrungsvermögens betrachten.

24. Das erste und zweite Bewegungsgesetz von Newton.

Die in den beiden vorhergehenden Nummern besprochenen Tatsachen und Definitionen lassen sich zu zwei Sätzen zusammenfassen, deren genaue Formulierung man Newton verdankt, und die als erstes und zweites Newtonsches Bewegungsgesetz bezeichnet werden. Sie lauten:

I. Jeder Körper verharrt im Zustande der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung auf geradliniger Bahn, solange keine äußeren Kräfte auf ihn einwirken.

II. Die auf einen Körper wirkende Kraft ist gleich dem Produkte aus der Masse und der Beschleunigung desselben.

Der erste Satz ist das Galileische Trägheitsgesetz, den zweiten werden wir kurz als „Kraftgesetz" bezeichnen.

Die analytische Formulierung des letzteren ist nunmehr unmittelbar gegeben. Nennen wir die Kraft $\mathfrak{K}$, so können wir dasselbe schreiben:

$$\mathfrak{K} = m \, . \, \mathfrak{a} \, . \tag{7}$$

Diese Gleichung sagt aus, daß die Kraft $\mathfrak{K}$ ein Vektor ist, dessen Richtung mit der Beschleunigung $\mathfrak{a}$ übereinstimmt und dessen Betrag im m-fachen Verhältnis zu dem der Beschleunigung vergrößert ist.

Nun wollen wir eine wichtige Folgerung aus (7) ziehen: Es seien die Winkel, die $\mathfrak{a}$ mit den Achsen bildet, respektive $(\mathfrak{a}\, x)$, $(\mathfrak{a}\, y)$, $(\mathfrak{a}\, z)$.

Durch Multiplikation mit den Richtungskosinussen erhalten wir aus (7):

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{K} \cos(\mathfrak{a}\, x) &= m\, \mathfrak{a} \cdot \cos(\mathfrak{a}\, x) = m \frac{d^2 x}{d t^2}, \\ \mathfrak{K} \cos(\mathfrak{a}\, y) &= m\, \mathfrak{a} \cdot \cos(\mathfrak{a}\, y) = m \frac{d^2 y}{d t^2}, \\ \mathfrak{K} \cos(\mathfrak{a}\, z) &= m\, \mathfrak{a} \cdot \cos(\mathfrak{a}\, z) = m \frac{d^2 z}{d t^2}. \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Da $(\mathfrak{a} x)$, $(\mathfrak{a} y)$, $(\mathfrak{a} z)$ respektive gleich sind den Winkeln $(\mathfrak{K} x)$, $(\mathfrak{K} y)$, $(\mathfrak{K} z)$, die die Kraft $\mathfrak{K}$ mit den Achsen bildet, so sind die links stehenden Ausdrücke die rechtwinkligen Komponenten der Kraft $\mathfrak{K}$, die entweder

durch $\mathfrak{K}_x, \mathfrak{K}_y, \mathfrak{K}_z$ oder X, Y, Z bezeichnet werden. Wir erhalten also nach (8):

$$
(9) \qquad \begin{cases} \mathfrak{K}_x = X = m \dfrac{d^2 x}{d t^2}, \\ \mathfrak{K}_y = Y = m \dfrac{d^2 y}{d t^2}, \\ \mathfrak{K}_z = Z = m \dfrac{d^2 z}{d t^2}. \end{cases}
$$

Dies sind die Newtonschen Bewegungsgleichungen.

Sie leiten zu einem wichtigen Postulate hin, nämlich dem, daß Kräfte sich wie Vektoren addieren sollen, oder anders ausgedrückt: Wenn ich drei Kräfte $\mathfrak{K}_x, \mathfrak{K}_y, \mathfrak{K}_z$ gleichzeitig an einem substantiellen Punkte wirken lasse, so ist die resultierende Kraft $\mathfrak{K}$ diejenige, die man durch vektorielle Addition von $\mathfrak{K}_x, \mathfrak{K}_y, \mathfrak{K}_z$ erhält. Allgemeiner: Aus mehreren gegebenen Kräften $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots, \mathfrak{K}_n$, die gleichzeitig an einem substantiellen Punkte angreifen, kann man nach den Gesetzen der Vektoraddition die resultierende Kraft $\mathfrak{K}$ bilden, genau so, wie man es mit den Beschleunigungen und Geschwindigkeiten macht. Falls man zwei Kräfte $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ zusammenzusetzen hat, so ist die Resultante $\mathfrak{K}$ geometrisch der Größe und Richtung nach durch die eine der beiden Diagonalen des aus $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ konstruierten Parallelogramms dargestellt, woher dieser Satz den Namen „Satz vom Parallelogramm der Kräfte" erhalten hat; haben wir mehrere Kräfte zusammenzusetzen, so erweitert sich dieser Satz zu dem vom „Kräftepolygon".

Es ist wichtig, sich hier klar zu machen, daß dieser Satz, für die Kräfte ausgesprochen, ein Erfahrungssatz ist, der keineswegs selbstverständlich ist, während für Beschleunigungen und Geschwindigkeiten der analoge Satz eine rein geometrische, von aller physikalischen Erfahrung unabhängige Folgerung darstellt. Um diesen Sachverhalt klarzustellen, betrachten wir folgendes Beispiel: Wenn einem Körper gleichzeitig zwei Beschleunigungen $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ mitgeteilt werden, so läßt sich rein geometrisch zeigen, daß die resultierende Beschleunigung $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2$ ist. Gehen wir jetzt zu den Ursachen der Beschleunigung, den Kräften über, so sagen wir, daß die Beschleunigung $\mathfrak{a}_1$ durch die Kraft $\mathfrak{K}_1$ und die Beschleunigung $\mathfrak{a}_2$ durch die Kraft $\mathfrak{K}_2$ erzeugt werde, wenn beide Kräfte einzeln auf den substantiellen Punkt einwirken. Nun wäre es aber doch natürlich a priori recht gut denkbar, daß die Hinzufügung von $\mathfrak{K}_2$ zur Kraft $\mathfrak{K}_1$, so daß beide gleichzeitig am selben Punkte angreifen, die vorher allein bestehende Kraft $\mathfrak{K}_1$ total abänderte, etwa in den Wert $\mathfrak{K}_1'$, so daß, wenn zwei Kräfte $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ zusammengesetzt würden, das Resultat $\mathfrak{K} \neq \mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2$, sondern gleich $\mathfrak{K}_1' + \mathfrak{K}_2$ sein würde. In Wirklichkeit ist dies nicht der Fall; die Hinzufügung von beliebig vielen Kräften ändert die schon vorhandenen nicht ab; die Kräfte wirken, wie man sagt, unabhängig voneinander; jede erzeugt ihre Be-

schleunigung nach Gleichung (7), als ob sie allein vorhanden wäre. Deshalb wird dieser Satz manchmal als das „Prinzip von der Unabhängigkeit der Kräfte" bezeichnet.

Natürlich ist es durchaus unwesentlich, daß wir in Gleichung (9) die Kraft in drei kartesische Komponenten zerspalten haben. Unter Einführung eines ebenen Polarkoordinatensystems (r, φ) z. B. kann die Kraft $\mathfrak{K}$ in die zwei Komponenten $\mathfrak{K}_r$, die „Radialkraft", und $\mathfrak{K}_\varphi$, die „Transversalkraft", zerspalten werden, so daß wir dann unter Benutzung von Gleichung (60) des I. Kapitels (pag. 37) haben:

$$(10) \qquad \begin{cases} \mathfrak{K}_r = m\,\mathfrak{a}_r = m\left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right], \\ \mathfrak{K}_\varphi = m\,\mathfrak{a}_\varphi = m\left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + r\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right]. \end{cases}$$

Speziell können wir als Polarkoordinatensystem das natürliche Koordinatensystem der Kurve wählen, in dem r in R, den Krümmungsradius der Kurve, übergeht. Dann erhalten wir nach (56a) des I. Kapitels (pag. 34) eine „Normalkraft" oder „Zentripetalkraft" $\mathfrak{K}_n$ und eine „Tangentialkraft" $\mathfrak{K}_t$, die den Gleichungen genügen:

$$(11) \qquad \begin{cases} \mathfrak{K}_n = m\,\mathfrak{a}_n = -\,m R\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2, \\ \mathfrak{K}_t = m\,\mathfrak{a}_t = \quad m\frac{d}{dt}\left(R\frac{d\varphi}{dt}\right). \end{cases}$$

Durch die Gleichung (7) ist auch die Dimension der Kraft vollkommen bestimmt, indem sie gleich der Dimension der Beschleunigung mal der einer Masse ist. Also nach (145) des ersten Kapitels (pag. 67):

$$(12) \qquad [\mathfrak{K}] = [M L T^{-2}].$$

Die Einheit der Kraft ist also diejenige, die der Masse 1 g die Beschleunigung 1 cm/sec^2 erteilt; diese Kraft wird eine Dyne genannt.

Unsere früheren kinematischen Betrachtungen können wir nun dynamisch aussprechen. Statt z. B. zu sagen, daß alle Körper mit der Beschleunigung $g = 981$ cm/sec^2 zur Erde fallen, können wir jetzt behaupten: Auf jeden Körper von der Masse m wirkt eine Kraft von der Größe mg, die vertikal abwärts gerichtet ist. Wird der betreffende Körper etwa durch Unterstützung mit der Hand am Fallen verhindert, so empfinden wir diese Kraft als seine „Schwere", weshalb sie den Namen Schwerkraft erhalten hat. Also:

$$(13) \qquad \text{Schwerkraft} = -mg\,.$$

Ebenso können wir jetzt sagen daß jeder Planet von der Masse m zur Sonne mit folgender Kraft angezogen wird [nach Gleichung (101) des I. Kapitels auf pag. 50]: $-\frac{km}{r^2}$; diese Kraft nennt man nach Newton die „Gravitationskraft" oder die „allgemeine Massenanziehung";

die Bedeutung dieser Bezeichnungen wird später besser hervortreten. Also haben wir:

$$\text{(14)} \qquad \text{Gravitationskraft} = -\frac{k' m}{r^2}.$$

25. Das Koordinatensystem der Dynamik; Galileisches Relativitätsprinzip.

In den Entwicklungen der drei vorhergehenden Nummern ist noch eine bedenkliche Unsicherheit enthalten. Unser Begriff „Kraft" repräsentiert die äußeren Einwirkungen auf einen substantiellen Punkt; diese äußeren Einwirkungen, als etwas objektiv Vorhandenes, als eine physikalische Realität, können, wie schon in der vorhergehenden Nummer hervorgehoben, offenbar nicht abhängen von rein mathematischen Zwischenkonstruktionen. Eine solche aber ist das zugrunde gelegte Koordinatensystem. Wir müssen postulieren, daß die Kraft $\mathfrak{K}$ gänzlich unabhängig sowohl von der Lage als auch von der Bewegung des Koordinatensystems ist. Nun ist aber anderseits durch die Newtonsche Kraftdefinition $\mathfrak{K}$ gleich dem Produkt aus der Masse m und der Beschleunigung $\mathfrak{a}$ gesetzt, und diese letztere ist, wie wir in Nr. 20 bei unserer Untersuchung von absoluter und relativer Bewegung sahen, vom Bewegungszustande des Koordinatensystems sehr wesentlich abhängig. Da nun aber das Produkt aus Masse und Beschleunigung der Größe und Richtung nach die vom Koordinatensystem unabhängige Größe $\mathfrak{K}$ darstellen soll, so kann diese Gleichung offenbar im allgemeinen nur für ein bestimmtes Koordinatensystem erfüllt sein. Für alle anderen Systeme wird sich im allgemeinen die Form der Newtonschen Kraftgleichungen ändern müssen.

Wenn wir also unsere bisherigen Betrachtungen retten, ja ihnen überhaupt erst einen bestimmten Sinn verleihen wollen, so müssen wir die Existenz eines solchen Koordinatensystems postulieren, in bezug auf welches die Gleichung $\mathfrak{K} = m\mathfrak{a}$ Gültigkeit besitzt. Dieses Koordinatensystem wollen wir das Fundamentalsystem der Mechanik nennen; dasselbe besteht wie alle unsere Koordinatensysteme aus substantiellen Geraden, ist also in einem bestimmten starren Körper verankert zu denken. Diesen Bezugskörper nennt man allgemein „Fundamentalkörper", manche Autoren auch den „absoluten Raum", andere den „Weltäther", Carl Neumann endlich, um seine Existenz besonders anschaulich zu machen, den „starren Körper Alpha". In bezug auf das Fundamentalsystem sind daher auch die Ausdrücke gleichförmige und geradlinige Bewegung zu beziehen, die im Trägheitsgesetz in der Newtonschen Formulierung auftreten.

Die Bewegungen, Geschwindigkeiten, Beschleunigungen, die auf das vor allen anderen Koordinatensystemen ausgezeichnete Fundamentalsystem bezogen sind, können und wollen wir als „absolute" bezeichnen

Diese Bezeichnung wird hier nur in obigem Sinne verwendet werden. Danach können wir sagen, daß das Fundamentalsystem selbst in absoluter Ruhe sich befindet.

Welches ist denn das Fundamentalsystem? A priori ist dasselbe nicht angebbar, da die Mechanik eine Erfahrungswissenschaft ist; dasselbe muß vielmehr aus den Beobachtungen erschlossen werden. Zunächst liegt der Gedanke nahe, ein auf der Erde, etwa im Erdmittelpunkte festes Koordinatensystem als Fundamentalsystem anzusehen. In der Tat spricht eine große Anzahl von mechanischen Versuchen nicht dagegen, woraus allerdings, da das Resultat der Versuche negativ ist, noch nicht der Schluß gezogen werden kann, daß dieses System wirklich das Fundamentalsystem sei. Wirklich gibt es auch eine Reihe von Versuchen, von denen der wichtigste und bekannteste der sogenannte Foucaultsche Pendelversuch ist (auf den wir später genau eingehen werden), die beweisen, daß ein in der Erde fest verankertes Koordinatensystem nicht das Fundamentalsystem sein kann. Ein Koordinatensystem dagegen, das im Fixsternhimmel festgelegt ist, ist mit allen bekannten Tatsachen wenigstens nicht im Widerspruch. Man beachte aber, ehe voreilige Schlüsse daraus gezogen werden, die negative Form, in der wir das Resultat des Experimentes aussprechen. Da natürlich alle Versuche mit endlichen Fehlern behaftet sind, so kann man nur folgendes aussagen: „Innerhalb der Fehlergrenzen der Versuche ist ein im Fixsternhimmel befestigtes Koordinatensystem als Fundamentalsystem zulässig“, nicht aber: „Die Versuche beweisen, daß usw.“ Eine solche Aussage könnte nur gemacht werden, wenn man absolut richtige Messungen anstellen könnte. Natürlich ist es sehr unwahrscheinlich, daß das Fixsternhimmelsystem wirklich exakt das Fundamentalsystem sein sollte; denn die Existenz der Fixsterne ist schließlich doch etwas Zufälliges; aber der praktischen Mechanik, die ja keine mathematische, sondern eine physikalische, auf Beobachtung gegründete Wissenschaft ist, wird durch Auffindung eines Systems genügt, das praktisch den Anforderungen an ein Fundamentalsystem genügt. Wir werden deshalb das Fixsternhimmelsystem als das Fundamentalsystem ansehen, auf das die Bewegungsgleichung der Dynamik zu beziehen sind.

Nun tritt auch die Wichtigkeit der Untersuchung der Nr. 20 des ersten Kapitels für diese Frage hervor. Denn wir sahen dort, daß, wenn man von einem System K zu einem anderen K' übergeht, das relativ zu K in gleichmäßiger Translation begriffen ist, daß dann und nur dann der Ausdruck für die Beschleunigung sich nicht ändert. Daraus ergibt sich folgende Konsequenz: Wenn wir ein Fundamentalsystem gefunden haben (für das also die Gleichungen der Dynamik gelten), so gelten sie auch für jedes Koordinatensystem, das relativ zum Fundamentalsystem eine gleichmäßige Translationsgeschwindigkeit be-

sitzt. Mit einem Fundamentalsystem besitzen wir infolge dieses Satzes also gleich eine unendlich große Klasse äquivalenter Fundamentalsysteme.

Man kann diesen Satz physikalisch anschaulicher formulieren: Da die Gleichungen (7) der Dynamik gleichmäßig für alle Fundamentalsysteme gelten, so macht sich ihre gleichmäßige Translationsgeschwindigkeit (die sich zur absoluten Geschwindigkeit als Führungsgeschwindigkeit addiert), in keiner Weise mechanisch geltend. Wir können also sagen: „Es ist durch kein mechanisches Experiment möglich, eine gleichmäßige Translationsbewegung des Bezugssystems zu erkennen“, oder: „Die mechanischen Vorgänge, die ein ruhender Beobachter in einem ruhenden System wahrnimmt, sind genau dieselben, die in einem mit gleichförmiger Translationsgeschwindigkeit bewegten System ein mit diesem System mitbewegter Beobachter wahrnimmt“, oder endlich: „Eine gleichmäßige Translationsbewegung des Bezugssystems ist auf die mechanischen Erscheinungen ohne Einfluß“.

Man nennt diesen Satz, der ja die Unmöglichkeit konstatiert, eine absolute gleichmäßige Translationsbewegung festzustellen, das Relativitätsprinzip der Mechanik oder auch, nach dem Begründer der Mechanik, das Galileische Relativitätsprinzip. Es sei gleich hier bemerkt, daß in der Elektrodynamik ein anderes Relativitätsprinzip Geltung besitzt, in dem das mechanische als Spezialfall enthalten ist.

Die Gültigkeit des Galileischen Relativitätsprinzips liefert nun eine gewisse Einschränkung für die analytische Gestalt, in der die Kräfte auftreten. Wir haben schon früher bemerkt, daß sie im allgemeinen Funktionen von x, y, z, d. h. den Koordinaten des bewegten Punktes, und der Zeit t sein werden. Diese Aussage müssen wir jetzt ergänzen. Denn da die Kraft unabhängig vom Koordinatensystem sein muß — eine objektive physikalische Realität kann nicht von einer Zwischenkonstruktion abhängen —, so scheint diese analytische Formulierung eine gewisse Schwierigkeit mit sich bringen. Denn sei etwa für das Fundamentalsystem:

$$\mathfrak{K} = f(x, y, z, t),$$

so ist im allgemeinen nach Transformation auf ein System $K'(\xi\eta\zeta)$, wenn die Bezeichnung der Transformationsgleichungen (126) des I. Kapitels (pag. 59) verwendet wird:

$$\mathfrak{K} = f(x_f + \xi, y_f + \eta, z_f + \zeta) t,$$

d. h. aber, $\mathfrak{K}$ hat in bezug auf K' nicht die nämliche Form; denn dann müßte man $\mathfrak{K} = f(\xi\eta\zeta t)$ erhalten haben. Dieser Widerspruch verschwindet durch die Annahme, daß im analytischen Ausdrucke von $\mathfrak{K}$ nur Koordinatendifferenzen des beschleunigten substantiellen Punktes relativ zu einem oder mehreren anderen auftreten, d. h. also,

daß die Kraft $\mathfrak{K}$ nicht von der Lage des beschleunigten Punktes gegen das Fundamentalsystem, sondern nur von seiner relativen Lage zu anderen materiellen Punkten abhängt. Das ist im besten Einklange mit der Vorstellung, daß die objektive Außenwelt es ist, deren Einwirkungen wir als Kräfte bezeichnen. $\mathfrak{K}$ muß also von der Form sein:

$$\mathfrak{K} = f(x - x_a, \quad y - y_a, \quad z - z_a, \; t),$$

wo x_a, y_a, z_a die Koordinaten irgendeines anderen substantiellen Punktes sind; natürlich werden im allgemeinen mehrere äußere substantielle Punkte mit in den Ausdruck von $\mathfrak{K}$ eingehen. Wendet man jetzt die Transformationsgleichungen (126) des I. Kapitels auf $\mathfrak{K}$ an, d. h. gleichzeitig auf x, y, z und x_a, y_a, z_a, so heben sich bei der Differenzbildung die vorher störenden Zusatzglieder heraus, denn wir haben z. B.:

$$x = x_f + \xi,$$
$$x_a = x_f + \xi_a;$$

also

$$x - x_a = \xi - \xi_a,$$

womit der Beweis geliefert ist.

Das Auftreten der Koordinaten x_a, y_a, z_a von anderen substantiellen Punkten gleichzeitig mit denjenigen (x, y, z) des beschleunigten substantiellen Punktes liefert die erste Andeutung für ein sehr umfassendes Gesetz, das unter dem Namen des Gesetzes der Gleichheit von actio und reactio bekannt ist. Während man einerseits sagt: die Kraft greift an dem substantiellen Punkte (x, y, z) an, kann man diese Aussage nunmehr dahin ergänzen, daß man sagt: die Kraft geht von dem substantiellen Punkte (x_a, y_a, z_a) aus. Diese Ausdrucksweise spricht kurz aus, daß die auf einen Massenpunkt wirkende Kraft von außen kommt.

28. Transformation der Bewegungsgleichungen auf relativ zum Fundamentalsystem beschleunigte Systeme.

Das Relativitätsprinzip ist im Grunde eine negative Aussage, nämlich die, daß eine gleichmäßige Translationsbewegung des Koordinatensystems relativ zum Fundamentalsystem die Form der mechanischen Gleichungen nicht ändert. Diese negative Aussage bedarf der Ergänzung durch die positive, wie sich denn die Gleichungen der Mechanik ändern, wenn das gewählte Koordinatensystem (ξ, η, ζ) relativ zum Fundamentalsystem (x, y, z) beschleunigt ist.

Zunächst wollen wir den Fall erledigen, daß das System (ξ, η, ζ) relativ zum Fundamentalsystem (x, y, z) eine beschleunigte Translationsbewegung ausführt, wobei wir der Einfachheit halber annehmen wollen, daß die Achsen des Systems denen des (x, y, z)-Systems bzw. dauernd parallel bleiben.

Dann haben wir im System $K(x, y, z)$ die Gültigkeit der Gleichung (7):

$$\mathfrak{K} = m \cdot \mathfrak{a}_a,$$

wobei jetzt die Beschleunigung durch den Index a („absolut") ausgezeichnet ist. Andererseits haben wir nach (130) des ersten Kapitels (pag. 60):

$$\mathfrak{a}_a = \mathfrak{a}_f + \mathfrak{a}_r;$$

also ist unter Benutzung dieses Wertes:

$$\mathfrak{K} = m \cdot \mathfrak{a}_f + m\,\mathfrak{a}_r,$$

oder

$$\overline{\mathfrak{K}} \equiv \mathfrak{K} - m\,\mathfrak{a}_f = m\,\mathfrak{a}_r,$$

wo $\overline{\mathfrak{K}}$ nur eine Abkürzung für $\mathfrak{K} - m\,\mathfrak{a}_f$ ist. Diese Gleichung stellt bereits das Resultat der Transformation dar. Denn rechts steht, abgesehen vom Faktor m, die relative Beschleunigung, d. h. diejenige, die ein auf (ξ, η, ζ) befindlicher Beobachter allein konstatieren kann; und diese Beschleunigung ist nicht gleich $\frac{\mathfrak{K}}{m}$, wie es sein müßte, wenn (ξ, η, ζ) ein Fundamentalsystem wäre, sondern gleich $\frac{\overline{\mathfrak{K}}}{m} = \frac{\mathfrak{K} - m\,\mathfrak{a}_f}{m}$, wo $\mathfrak{a}_f$ die Führungsbeschleunigung ist, die in diesem Falle mit der Beschleunigung des Koordinatenanfangspunktes von (ξ, η, ζ) relativ zu (x, y, z) identisch ist.

Durch Zerlegung nach kartesischen Koordinaten finden wir also aus (15):

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} \overline{X} &\equiv X - m\frac{d^2 x_f}{dt^2} = m\frac{d^2\xi}{dt^2},\\ \overline{Y} &\equiv Y - m\frac{d^2 y_f}{dt^2} = m\frac{d^2\eta}{dt^2},\\ \overline{Z} &\equiv Z - m\frac{d^2 z_f}{dt^2} = m\frac{d^2\zeta}{dt^2}. \end{aligned}\right.$$

Es treten also für einen im System (ξ, η, ζ) festen Beobachter, der von der Beschleunigung seines Systems (ξ, η, ζ) gegen das Fundamentalsystem (x, y, z) nichts weiß, scheinbar neue Kräfte, $-m\frac{d^2 x_f}{dt^2}$, $-m\frac{d^2 y_f}{dt^2}$, $-m\frac{d^2 z_f}{dt^2}$, auf, die eine Abweichung von den Gleichungen der Mechanik bedeuten, und die experimentelle Beobachtung dieser Abweichung von den gewöhnlichen Gesetzen der Mechanik kann daher zur Ermittlung der Werte $\frac{d^2 x_f}{dt^2}$, $\frac{d^2 y_f}{dt^2}$, $\frac{d^2 z_f}{dt^2}$, d. h. zur Ermittlung der Größe und Richtung der Beschleunigung des Systems (ξ, η, ζ) führen. Man kann also mit Hilfe der Beobachtung einen Beschleunigungszustand des Koordinatensystems sehr wohl feststellen, nicht dagegen gemäß dem Relativitätsprinzip eine unbeschleunigte Translationsbewegung.

Die Komponenten der Zusatzkraft, $-m\frac{d^2x_f}{dt^2}$, $-m\frac{d^2y_f}{dt^2}$, $-m\frac{d^2z_f}{dt^2}$ werden erhalten, indem man das Produkt aus der Masse in die negativ genommenen Komponenten der Führungsbeschleunigung bildet; man nennt wegen dieser Bildungsweise die Zusatzkraft auch wohl die Führungskraft. Natürlich ist das gar keine objektiv vorhandene Kraft, sondern sie wird vorgetäuscht durch die Beschleunigung des Koordinatensystems.

Man kann dies etwas anders formulieren: Es ist rechnerisch nicht immer zweckmäßig, als Koordinatensystem ein Fundamentalsystem (x, y, z) zu nehmen, sondern es kann sich ereignen, daß wir mit Absicht ein System benutzen, das eine bekannte Beschleunigung $\frac{d^2x_f}{dt^2}$, $\frac{d^2y_f}{dt^2}$, $\frac{d^2z_f}{dt^2}$ relativ zum Fundamentalsystem besitzt. Dann können wir die Gleichungen der Mechanik ruhig weiter benutzen, vorausgesetzt nur, daß wir statt der Kräfte X, Y, Z solche Kräfte $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$ benutzen, die den Gleichungen gehorchen (gemäß [16]):

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned} \bar{X} &= X - m\frac{d^2x_f}{dt^2}, \\ \bar{Y} &= Y - m\frac{d^2y_f}{dt^2}, \\ \bar{Z} &= Z - m\frac{d^2z_f}{dt^2}, \end{aligned}\right.$$

d. h., daß wir statt der wirklich vorhandenen Kräfte die vektorielle Summe aus diesen und der Führungskraft benutzen.

Diese Sätze mögen durch ein Beispiel erläutert werden, das allerdings wegen seiner Einfachheit wohl schwerlich realisiert werden kann. Wir wollen annehmen, ein Beobachter, in dem wir ein System (ξ, η, ζ) verankert denken, falle aus einer großen Höhe zur Erde, ohne etwas davon zu wissen. Er beobachtet nun das freie Fallen eines substantiellen Punktes, dessen Koordinaten ξ, η, ζ seien. Dieser Beobachter würde dann die gewöhnlichen Gleichungen (9) anwenden; denn da er von seiner Bewegung nichts weiß, so liegt für ihn zunächst kein Grund vor, die gewöhnlichen Gleichungen der Dynamik zu verlassen. Er setzt also an:

$$X = m\frac{d^2\xi}{dt^2},$$

$$Y = m\frac{d^2\eta}{dt^2},$$

$$Z = m\frac{d^2\zeta}{dt^2}.$$

Er würde dann beobachten (da er, wie wir wissen, mit der Beschleunigung $-g$ fällt), daß der substantielle Punkt keinerlei Beschleunigung relativ zu ihm hat. Er würde also finden:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{d^2\eta}{dt^2} = \frac{d^2\zeta}{dt^2} = 0,$$

und folglich nach den obigen Gleichungen:

$$X = Y = Z = 0;$$

d. h. er würde zu dem Resultat gelangen, daß auf die von ihm beobachteten substantiellen Punkte die Schwerkraft nicht einwirkt. Dieses unmögliche Resultat würde unseren Beobachter stutzig machen, und bei voller Kenntnis der mechanischen Gesetze würde er schließen müssen: „Also bewege ich mich mit einer gewissen Beschleunigung gegen das Fundamentalsystem“. Diese würde er dann so bestimmen: Nachdem der Beobachter erkannt hat, daß er selbst beschleunigt ist (die Komponenten der Beschleunigung seien $\frac{d^2x_f}{dt^2}$, $\frac{d^2y_f}{dt^2}$, $\frac{d^2z_f}{dt^2}$, würde er nunmehr die Gleichungen (16) der Rechnung zugrunde legen und würde aus dem Verschwinden von $\frac{d^2\xi}{dt^2}$, $\frac{d^2\eta}{dt^2}$, $\frac{d^2\zeta}{dt^2}$ folgern, daß

$$\bar{X} = \bar{Y} = Z = 0,$$

d. h. daß:

$$X = m\frac{d^2x_f}{dt^2}, \quad Y = m\frac{d^2y_f}{dt^2}, \quad Z = m\frac{d^2z_f}{dt^2} \text{ ist.}$$

Da der Beobachter die Fallgesetze kennt, so weiß er: $X = Y = 0$, $Z = -mg$; also folgert er weiter:

$$\frac{d^2x_f}{dt^2} = \frac{d^2y_f}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2z_f}{dt^2} = -g,$$

und weiß darauf, daß er sich vertikal abwärts mit der Beschleunigung g bewegt. Er hat also durch Beobachtung der Abweichung von den mechanischen Gesetzen seine Eigenbeschleunigung völlig bestimmt.

Wenden wir die Sache etwas anders und schreiben einem zweiten Beobachter zwar die Kenntnis der allgemeinen Gesetze der Mechanik zu, während wir zulassen wollen, daß er die spezielle Größe der Fallbeschleunigung nicht kennt. Wenn dann dem Beobachter seine eigene Beschleunigung bekannt ist (d. h. wenn ihm $\frac{d^2x_f}{dt^2}, \ldots \frac{d^2z_f}{dt^2}$ gegeben sind), so kann er die Fallgesetze finden, ohne daß er selbst jemals eine Fallbeschleunigung wird konstatieren können. Denn dieser Beobachter würde sofort die Gleichungen (16) zugrunde legen, also wegen des Verschwindens von $\frac{d^2\xi}{dt^2}$, $\frac{d^2\eta}{dt^2}$, $\frac{d^2\zeta}{dt^2}$ genau wie der erste Beobachter schließen:

$$\bar{X} = \bar{Y} = \bar{Z} = 0,$$

d. h.

$$X = m\frac{d^2x_f}{dt^2}, \quad Y = m\frac{d^2y_f}{dt^2}, \quad Z = m\frac{d^2z_f}{dt^2}.$$

Da aber unser zweiter Beobachter seine eigene Beschleunigung kennt, so weiß er:

$$\frac{d^2 x_f}{d t^2} = \frac{d^2 y_f}{d t^2} = 0, \quad \frac{d^2 z_f}{d t^2} = -m g;$$

also folgert er:

$$X = 0, \ Y = 0, \ Z = -m g.$$

und diese Gleichungen enthalten in der Tat die Fallgesetze.

Übrigens zeigt auch die Erfahrung des täglichen Lebens schon, daß in einem beschleunigten System die gewöhnlichen Gleichungen der Mechanik nicht gelten. Nehmen wir einen Beobachter in einem mit gleichmäßiger geradliniger Geschwindigkeit fahrenden Eisenbahnwagen. Wären die Schienenstöße nicht, und wäre alles dunkel, so könnte er von dieser Bewegung nichts merken. Aber sowie der Zug beschleunigt wird, fällt der Beobachter nach rückwärts: eine Folge davon, daß das Trägheitsgesetz für den beschleunigten Beobachter nicht mehr gilt; wird der Zug verzögert, so fällt der Reisende nach vorwärts aus demselben Grunde.

Nunmehr gehen wir zu dem Fall über, daß das bewegte System, für das wir die Bewegungsgleichung aufstellen wollen, eine Rotation relativ zum Fundamentalsystem ausführe, und zwar wollen wir der Einfachheit halber die z-Achse des Fundamentalsystems mit der ζ-Achse des rotierenden Systems zusammenfallen lassen und diese Achse gleichzeitig als Rotationsachse nehmen. Die Winkelgeschwindigkeit des (ξ, η, ζ)-Systems sei konstant gleich ω. Dann haben wir die Transformationsgleichungen (141) des ersten Kapitels (pag. 66) anzuwenden und erhalten nach den Gleichungen (143) desselben Kapitels:

$$(18) \begin{cases} X = m \frac{d^2 x}{d t^2} = m \left\{ \frac{d^2 \xi}{d t^2} \cos \omega t - \frac{d^2 \eta}{d t^2} \sin \omega t \right\} - 2 m \omega \frac{d y}{d t} + m \omega^2 x, \\ Y = m \frac{d^2 y}{d t^2} = m \left\{ \frac{d^2 \xi}{d t^2} \sin \omega t + \frac{d^2 \eta}{d t^2} \cos \omega t \right\} + 2 m \omega \frac{d x}{d t} + m \omega^2 y, \\ Z = m \frac{d^2 z}{d t^2} = m \frac{d^2 \zeta}{d t^2}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen enthalten im Grunde schon das gewünschte Resultat, sind aber zum Gebrauche unzweckmäßig, da einerseits auf der rechten Seite noch x und y vorkommen, die noch durch ξ und η ausgedrückt werden müssen, und anderseits die Kraft $\mathfrak{K}$ in die Komponenten parallel den Achsen des Fundamentalsystems zerlegt ist, während es naturgemäß wäre, $\mathfrak{K}$ in die Komponenten nach den neuen Achsen ξ, η, ζ zu zerlegen. Da $\mathfrak{K}$ ein Vektor ist, der vom Koordinatensystem gänzlich unabhängig ist, so bestehen zwischen den Komponenten $\mathfrak{K}_\xi$ und $\mathfrak{K}_\eta$ oder, wie wir lieber sagen wollen, Ξ und H, und den alten Komponenten X, Y, die nämlichen Transformationsgleichungen, wie zwischen η, ξ und x, y, die durch Gleichung (141) des ersten Kapitels dargestellt sind. Also ist:

$$
(19) \quad \begin{cases} X = \Xi \cos \omega t - \mathsf{H} \sin \omega t, \\ Y = \Xi \sin \omega t + \mathsf{H} \cos \omega t, \end{cases}
$$

die nach Ξ, H aufgelöst lauten:

$$
(20) \quad \begin{cases} \Xi = \quad X \cos \omega t + Y \sin \omega t, \\ \mathsf{H} = - X \sin \omega t + Y \cos \omega t. \end{cases}
$$

Man erhält also z. B. Ξ aus (18), indem man die erste Gleichung (18) mit $\cos \omega t$, die zweite Gleichung (18) mit $\sin \omega t$ erweitert und dann addiert. Analoges gilt für die Bildung von H. So folgt:

$$
(21) \quad \begin{cases} \Xi = m \dfrac{d^2 \xi}{dt^2} - 2 m \omega \left(\dfrac{dy}{dt} \cos \omega t - \dfrac{dx}{dt} \sin \omega t \right) \\ \qquad\qquad + m \omega^2 (x \cos \omega t + y \sin \omega t), \\ \mathsf{H} = m \dfrac{d^2 \eta}{dt^2} + 2 m \omega \left(\dfrac{dx}{dt} \cos \omega t + \dfrac{dy}{dt} \sin \omega t \right) \\ \qquad\qquad + m \omega^2 (y \cos \omega t - x \sin \omega t), \\ Z = m \dfrac{d^2 \zeta}{dt^2} . \end{cases}
$$

Die Klammergrößen auf der rechten Seite kann man nach (141) und (142) (pag. 66) des ersten Kapitels leicht durch ξ und η ausdrücken, und man erhält dann endgültig:

$$
(22) \quad \begin{cases} \Xi + 2 m \omega \dfrac{d\eta}{dt} + m \omega^2 \xi = m \dfrac{d^2 \xi}{dt^2}, \\ \mathsf{H} - 2 m \omega \dfrac{d\xi}{dt} + m \omega^2 \eta = m \dfrac{d^2 \eta}{dt^2}, \\ Z \qquad\qquad\qquad\qquad = m \dfrac{d^2 \zeta}{dt^2}, \end{cases}
$$

Auch bei der Rotation mit konstanter Geschwindigkeit des Koordinatensystems treten also zu den Kräften Zusatzglieder, „scheinbare Kräfte", hinzu. Will man also ein rotierendes System benutzen, so sind zu den wirklich vorhandenen Kräften Ξ, H die scheinbaren Kräfte $2 m \omega \frac{d\eta}{dt}$, $-2 m \omega \frac{d\xi}{dt}$ und $m \omega^2 \xi$, $m \omega^2 \eta$ hinzuzufügen. Diese Zusatzglieder bedingen die Abweichung der Gleichungen (22) von den Gleichungen (9) der Dynamik und gestatten es, den Rotationszustand des Systems zu bestimmen.

Die Zusatzkräfte sind hier verschiedener Natur; die Komponenten

$$
2 m \omega \frac{d\eta}{dt}, \quad - 2 m \omega \frac{d\xi}{dt}
$$

der ersten Zusatzkraft hängen von der relativen Geschwindigkeit des betrachteten substantiellen Punktes, die Komponenten der zweiten

$$
m \omega^2 \xi, \quad m \omega^2 \eta
$$

von der relativen Lage desselben ab. Nun sind die Größen $-2\omega\frac{d\eta}{dt}$, $+2\omega\frac{d\xi}{dt}$ nach den Ausführungen der Nr. 20 auf pag. 62ff. die Komponenten der Corioliebeschleunigung; also werden die Komponenten der ersten Zusatzkraft erhalten, indem man die Masse mit den negativ genommenen Komponenten der Coriolisbeschleunigung multipliziert. Daher nennt man die erste Zusatzkraft die „Corioliskraft" ($\mathfrak{K}_c$). Ganz analog gebildet sind die Komponenten der zweiten Zusatzkraft aus den Komponenten der Führungsbeschleunigung, weshalb die zweite Zusatzkraft den Namen „Führungskraft" ($\mathfrak{K}_f$) erhalten hat. Der Übersicht halber stellen wir die Beschleunigungen und Kräfte noch einmal zusammen:

Komponente	der Coriolisbeschleunigung	der Corioliskraft	der Führungsbeschleunigung	der Führungskraft
ξ	$-2\omega\frac{d\eta}{dt}$	$+2m\omega\frac{d\eta}{dt}$	$-\omega^2\xi$	$+m\omega^2\xi$
η	$+2\omega\frac{d\xi}{dt}$	$-2m\omega\frac{d\xi}{dt}$	$-\omega^2\eta$	$+m\omega^2\eta$

In dem speziellen hier betrachteten Falle konstanter Rotationsgeschwindigkeit ist die resultierende Führungskraft ($\mathfrak{K}_f$) stets radial nach außen gerichtet, und durch Addieren und Quadrieren der Komponenten folgt, wenn wir die Wurzel ziehen und $\xi^2+\eta^2=r^2$ setzen:

(23) $$\mathfrak{K}_f = m\omega^2\mathfrak{r}.$$

In diesem Falle wird die Führungskraft auch „Zentrifugalkraft" genannt.

Auf einen Spezialfall der Gleichungen (22) sei noch aufmerksam gemacht. Wenn der substantielle Punkt im rotierenden System ruht $\left(\frac{d\xi}{dt}=\frac{d\eta}{dt}=0\right)$, so ist die Corioliskraft $\mathfrak{K}_c=0$, und als einzige Zusatzkraft bleibt die Zentrifugalkraft übrig.

Daß man in der Tat Rotationen des Bezugssystems aus den Abweichungen von den Newtonschen Gleichungen erschließen kann, zeigt wieder am einfachsten das Beispiel des im Eisenbahnzuge fahrenden Reisenden. Sobald der Zug seine Richtung ändert, wird der Reisende, weil eben das Trägheitsgesetz für den sich drehenden Wagen nicht gilt, durch die Wirkung der Zentrifugalkraft nach außen geworfen. Bewegt er sich außerdem relativ zum Wagen, so tritt auch noch die Coriolissche Kraft auf, deren Wirkung etwas komplizierter ist. Daraus geht hervor, daß es z. B. möglich sein muß, die Rotation der Erde um ihre Achse mittels mechanischer Versuche nachzuweisen; wir kommen darauf später eingehend zurück.

27. Kinetische Energie; Arbeit.

Mit den Bewegungsgleichungen (9) läßt sich eine wichtige Transformation vornehmen. Zu diesem Zwecke sollen dieselben der Reihe nach mit den Komponenten der Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ multipliziert werden; dann folgt:

$$(24)\qquad \begin{cases} m\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dt} = X\frac{dx}{dt}, \\ m\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{dt} = Y\frac{dy}{dt}, \\ m\frac{d^2z}{dt^2}\frac{dz}{dt} = Z\frac{dz}{dt}, \end{cases}$$

und die Addition dieser Gleichungen liefert:

$$(25)\qquad m\left\{\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{dt} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{dz}{dt}\right\} = X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} + Z\frac{dz}{dt}.$$

Das Bemerkenswerte an dieser Gleichung ist zunächst das, daß die linke Seite als ein vollständiger Differentialquotient nach der Zeit dargestellt werden kann; man hat offenbar:

$$(26)\qquad \frac{d}{dt}\left[\frac{m}{2}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\}\right] = X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} + Z\frac{dz}{dt}.$$

Auf der linken Seite steht nun in der geschweiften Klammer das halbe Produkt aus der Masse in das Quadrat der Geschwindigkeit $\mathfrak{c}$ des bewegten substantiellen Punktes; setzen wir zur Abkürzung für diesen Ausdruck:

$$(27)\qquad \tfrac{1}{2} m \mathfrak{c}^2 = L,$$

so läßt sich nach Multiplikation mit dt Gleichung (26) folgendermaßen schreiben:

$$(28)\qquad dL = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz.$$

Beide Seiten der Gleichung haben eine wichtige mechanische Bedeutung. Betrachten wir zunächst die rechte Seite. Dort sind die Komponenten der Kraft, die auf den substantiellen Punkt wirkt, multipliziert mit den Komponenten der durch die Kraft hervorgerufenen unendlich kleinen Verschiebung des Punktes, die wir $d\mathfrak{s}$ nennen wollen. Nennen wir die Winkel, die $\mathfrak{K}$ mit den Achsen bildet, bzw. $(\mathfrak{K}x)$, $(\mathfrak{K}y)$, $(\mathfrak{K}z)$, diejenigen, die $d\mathfrak{s}$ mit den nämlichen Achsen bildet, ebenso $(\mathfrak{s}x)$, $(\mathfrak{s}y)$, $(\mathfrak{s}z)$, so bestehen folgende Gleichungen, wenn der Betrag von $\mathfrak{K}$ durch K, der von $d\mathfrak{s}$ durch ds bezeichnet wird:

$$(29)\qquad \begin{cases} X = K\cos(\mathfrak{K}x), \\ Y = K\cos(\mathfrak{K}y), \\ Z = K\cos(\mathfrak{K}z), \end{cases} \qquad \begin{aligned} dx &= ds\cos(\mathfrak{s}x), \\ dy &= ds\cos(\mathfrak{s}y), \\ dz &= ds\cos(\mathfrak{s}z). \end{aligned}$$

Bildet man mit diesen Werten den auf der rechten Seite von (28) stehenden Ausdruck, so erhält man:

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = K\,ds\{\cos(\mathfrak{K}\,x)\cos(\mathfrak{s}\,x) + \cos(\mathfrak{K}\,y)\cos(\mathfrak{s}\,y) + \cos(\mathfrak{K}\,z)\cos(\mathfrak{s}\,z)\},$$

und darin ist der Winkelausdruck offenbar gleich dem Kosinus des Winkels zwischen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{s}$, den wir mit $(\mathfrak{K}, \mathfrak{s})$ bezeichnen wollen. Also finden wir schließlich:

(30) $$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = K \cdot ds \cos(\mathfrak{K}, \mathfrak{s}),$$

und damit wird (28):

(31) $$dL = K\,.\,ds \cos(L, \mathfrak{s}).$$

Rechts steht jetzt das Produkt aus den Beträgen der Kraft $\mathfrak{K}$ und der in die Richtung von $\mathfrak{K}$ fallenden Komponente der Verschiebung $d\mathfrak{s}$, oder wie man sich kurz ausdrückt: „Kraft mal Weg in Richtung der Kraft." Statt dessen kann man auch sagen: Produkt der Verschiebung $d\mathfrak{s}$ in diejenige Kraftkomponente, die in die Richtung von $d\mathfrak{s}$ fällt, oder kurz: „Weg mal Kraft in Richtung des Weges." Diesen rechtsstehenden Ausdruck nennt man die (unendlich kleine) Arbeit der Kraft, die an dem substantiellen Punkte längs des Weges $d\mathfrak{s}$ geleistet wird. Diese Definition kann sofort auf den Fall erweitert werden, daß die Kraft eine endliche Verschiebung des Punktes hervorruft; man hat sich nur diese endliche Verschiebung als aus unendlich kleinen zusammengesetzt zu denken, und die Arbeit längs jedes dieser unendlich kleinen Wege nach (31) zu berechnen. Indem man schließlich diese sämtlichen Arbeiten summiert, erhält man die Gesamtarbeit über die endliche Strecke. Also, wenn die Arbeit durch A bezeichnet wird:

(32) $$A = \int K\,ds \cos(\mathfrak{K}\,\mathfrak{s}) = \int (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz).$$

Die Arbeit ist, wie hervorgehoben werden muß, kein Vektor, sondern ein Skalar, da sie allein durch Angabe ihres Betrages charakterisiert ist. Von einer Richtung der Arbeit zu reden, ist sinnlos.

Die Form des Ausdrucks für die Arbeit, den wir oben angegeben haben, spielt in geeigneter Verallgemeinerung in der Vektorrechnung eine Rolle. Im Ausdruck für die Arbeit treten auf die Beträge zweier Vektoren und der Kosinus des eingeschlossenen Winkels, d. h. wenn $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei beliebige Vektoren sind, ein Ausdruck von der Form: $|\mathfrak{A}|\,.\,|\mathfrak{B}|\,.\cos(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$. Für Produkte dieser Art hat die Vektoranalysis eine besondere Schreibweise und einen besonderen Namen eingeführt. Man schreibt das obenstehende Produkt, indem man die beiden Vektoren nebeneinander setzt und eventuell in runde Klammern einschließt:

(33) $$(\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}) = |\mathfrak{A}|\cdot|\mathfrak{B}|\cdot\cos(\mathfrak{A}\mathfrak{B}),$$

und nennt es das „skalare“ oder „innere“ Produkt der beiden Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$. Man erkennt sofort, daß nach der Definition (33) die Beziehung gilt:

$$(\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}) = |\mathfrak{A}|\cdot|\mathfrak{B}|\cdot\cos(\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}) = |\mathfrak{B}|\cdot|\mathfrak{A}|\cdot\cos(\mathfrak{B}\,\mathfrak{A}) = (\mathfrak{B}\,\mathfrak{A}), \tag{34}$$

d. h. die Reihenfolge der Multiplikation ist gleichgültig. Dies ist bei Produkten von Vektoren nicht selbstverständlich, sondern muß erst bewiesen werden. Wir werden später ein anderes Vektorprodukt kennen lernen, bei dem dieses „kommutative“ Gesetz nicht mehr gilt.

In dieser Schreibweise hat man für die Arbeit:

$$A = \int(\mathfrak{K}\cdot d\mathfrak{s}), \tag{35}$$

und die Definition derselben kann folgendermaßen ausgesprochen werden: Die zu einer endlichen Verschiebung notwendige Arbeit ist gleich dem skalaren Produkt aus der Kraft und der Verschiebung des substantiellen Punktes. Man pflegt auch kurz zu sagen: Die Arbeit ist das „Wegintegral“ der Kraft. Analog (35) erhalten wir für eine unendlich kleine Arbeit, die wir durch dA bezeichnen wollen:

$$dA = (\mathfrak{K}\,d\mathfrak{s})\,. \tag{35a}$$

Von Interesse ist noch der Betrag der pro Sekunde geleisteten Arbeit, den wir erhalten, wenn wir die letzte Gleichung durch dt dividieren. Die so erhaltene Größe nennt man den „Effekt“ oder die „Leistung“ der Kraft. Wir haben daher:

$$\frac{dA}{dt} = \left(\mathfrak{K}\,\frac{d\mathfrak{s}}{dt}\right),$$

oder, da $\frac{d\mathfrak{s}}{dt}$ der Größe und Richtung nach, die Geschwindigkeit $\mathfrak{c}$ des substantiellen Punktes ist:

$$\frac{dA}{dt} = (\mathfrak{K}\,\mathfrak{c}), \tag{36}$$

d. h. der Effekt ist gleich dem skalaren Produkte aus Kraft und Geschwindigkeit. Dann kann man die endliche Arbeit in die Form bringen:

$$A = \int\frac{dA}{dt}\,dt = \int(\mathfrak{K}\,\mathfrak{c})\,dt, \tag{36a}$$

die mit (35) übereinstimmt, wenn man für $\mathfrak{c}$ seinen Wert einsetzt.

Unter Einführung des Arbeitsbegriffes können wir unsere Ausgangsgleichung (28) schreiben:

$$dL = dA\,. \tag{37}$$

Wir wenden uns jetzt zur Betrachtung der linken Seite der Gleichung (28) oder (37). Dort steht das Differential einer Funktion L, die als das halbe Produkt aus der Masse und dem Geschwindigkeitsquadrat des

substantiellen Punktes definiert ist. Für diese Funktion hat Leibniz den Namen „lebendige Kraft“ eingeführt, den man heute besser durch die Bezeichnung „kinetische“ oder „aktuelle“ „Energie“ ersetzt. Dann kann man Gleichung (37) so aussprechen: Die unendlich kleine Zunahme der kinetischen Energie ist gleich der von den äußeren Kräften geleisteten unendlich kleinen Arbeit. Dieser Satz gilt aber nicht nur für unendlich kleine Verrückungen, sondern auch für endliche. Denn wenn wir Gleichung (37) auf beiden Seiten durch dt dividieren und mit dt multiplizieren, so folgt:

$$\frac{dL}{dt}\,dt = \frac{dA}{dt}\,dt,$$

und diese Gleichung kann sofort nach t zwischen zwei beliebigen Zeiten t_1 und t_2 integriert werden:

$$L_2 - L_1 = A_{21}\,. \tag{38}$$

Dabei bedeutet L_2 die kinetische Energie zur Zeit t_2, L_1 zur Zeit t_1, A_{21} die endliche Arbeit der äußeren Kräfte. Also ist $L_2 - L_1$ die Zunahme der kinetischen Energie und es gilt allgemein: Die Zunahme der kinetischen Energie ist gleich der von den äußeren Kräften geleisteten Arbeit.

28. Potentielle Energie; das Energieprinzip.

Eine besondere Bedeutung gewinnt der letzte Satz, wenn die Kräfte X, Y, Z sich alle aus einer einzigen Funktion der Koordinaten (x, y, z) des substantiellen Punktes durch Differentiation herleiten lassen. Es ist in der Natur häufig der Fall realisiert, daß, wenn $\Phi(x, y, z)$ eine solche Funktion der Koordinaten bezeichnet, man schreiben kann:

$$X = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}\,. \tag{39}$$

Beispiele dafür sind etwa die Schwerkraft und die allgemeine Massenanziehung.

Denn setzen wir für die erstere $\Phi = m g z$, so ist in der Tat nach (39):

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = -mg,$$

wie es sein muß. Die Gravitationskraft ist nach Gleichung (14) $-\frac{k' m}{r^2}$, wo r die Entfernung der Mittelpunkte der Sonne und eines Planeten ist. Bilden wir die Komponenten X, Y, Z dieser Kraft, so ist:

$$X = -\frac{k' m}{r^2}\cos(rx), \quad Y = -\frac{k' m}{r^2}\cos(ry), \quad Z = -\frac{k' m}{r^2}\cos(rz). \tag{40}$$

Hat der Mittelpunkt der Sonne die Koordinaten x_0, y_0, z_0, dagegen der Planet die Koordinaten x, y, z, so ist

$$r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2\,.$$

Die Richtungskosinusse sind aber, da die Projektionen von r auf die Achsen $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ sind:

$$\cos(r\,x) = \frac{x - x_0}{r}, \quad \cos(r\,y) = \frac{y - y_0}{r}, \quad \cos(r\,z) = \frac{z - z_0}{r},$$

oder auch, wie man sich durch Ausführung der Differentiation überzeugen kann:

(41) $$\cos(r\,x) = \frac{\partial r}{\partial x}, \quad \cos(r\,y) = \frac{\partial r}{\partial y}, \quad \cos(r\,z) = \frac{\partial r}{\partial z}.$$

Also kann man die Komponenten der Gravitationskraft schreiben:

$$X = -\frac{k'm}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}, \quad Y = -\frac{k'm}{r^2}\frac{\partial r}{\partial y}, \quad Z = -\frac{k'm}{r^2}\frac{\partial r}{\partial z},$$

und wenn wir nun die Funktion $\Phi = -\frac{k'm}{r}$ bilden, so erkennt man unmittelbar, daß wiederum ist:

$$X = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

In diesem Falle nimmt der Ausdruck dA auf der rechten Seite von (28) oder (37) eine andere Gestalt an. Denn es ist:

$$dA = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z}dz\right),$$

und hier ist die rechte Seite, da Φ eine nur von x, y, z abhängende Funktion ist, das negative vollständige Differential $-d\Phi$ dieser Funktion; also kann man schreiben:

(42) $$dA = -d\Phi.$$

Es möge hier noch folgendes bemerkt werden:

Wenn n eine beliebige Richtung bedeutet, so läßt sich mit Hilfe bekannter elementarer Formeln der Differentialgeometrie leicht zeigen, daß eine (39) analoge Gleichung auch für die n-Richtung gilt; d. h. daß

(43) $$\mathfrak{K}_n = -\frac{\partial \Phi}{\partial n}$$

ist, wenn unter $\mathfrak{K}_n$ die Kraftkomponente in dieser Richtung n verstanden wird. Dies ist übrigens unmittelbar plausibel, da ja die Koordinatenrichtungen vor keiner anderen bevorzugt sind. Haben die Kräfte die Eigenschaft (39), so nennt man sie aus einem Grunde, den wir gleich einsehen werden, „konservative" Kräfte.

In diesem Falle ist also dA ein totales Differential einer Funktion der Koordinaten, was im allgemeinen natürlich nicht zutrifft. Man nennt die Funktion $\Phi\,(x\,y\,z)$, deren negative partielle Differentialquotienten nach den Koordinaten die Kraftkomponenten liefern, die „potentielle Energie" oder „Energie der Lage".

Gleichung (37) läßt sich damit schreiben:

(44) $$dL = -d\Phi .$$

Diese Gleichung kann nur möglich sein, wenn L ebenfalls, wie $\Phi(x\,y\,z)$ eine reine Funktion der Koordinaten ist, die von t explizite nicht abhängt. Von t hängen L und Φ nur insofern ab, als die Koordinaten x, y, z des substantiellen Punktes Funktionen von t sind. Denkt man sich also die Koordinaten x, y, z durch ihre Funktionen in t ersetzt, so können L und Φ, die jetzt x, y, z nicht mehr enthalten, als Funktionen von t allein betrachtet werden. Schreiben wir (44) demgemäß:

$$\frac{dL}{dt}\,dt = -\frac{d\Phi}{dt}\,dt,$$

so kann man zwischen zwei beliebigen Zeiten t_1 und t_2 integrieren:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dL}{dt}\,dt = -\int_{t_1}^{t_2} \frac{d\Phi}{dt}\,dt,$$

oder:

(45) $$L_2 - L_1 = -(\Phi_2 - \Phi_1).$$

In dieser Gleichung beziehen sich die Indizes zunächst auf die Zeiten t_1 und t_2; es bedeutet also L_2 den Wert der kinetischen Energie zur Zeit t_2, usw. Denkt man sich aber die eben vollzogene Substitution wieder rückgängig gemacht, indem man t wieder durch x, y, z ausdrückt, so bedeutet L_2 den Wert der kinetischen Energie im Raumpunkte 2 (den der substantielle Punkt zur Zeit t_2 innehat), während die analoge Bedeutung L_1 für den Raumpunkt 1 hat (wo der substantielle Punkt zur Zeit t_1 sich befand). Analoges gilt für Φ_2 und Φ_1.

Man kann also (45) so aussprechen: die Zunahme der kinetischen Energie beim Übergang vom Punkte 1 zum Punkte 2 ist gleich der Abnahme der potentiellen Energie des substantiellen Punktes.

Bringt man die Größen mit dem Index 2 auf die linke, mit dem Index 1 auf die rechte Seite, so kann (45) geschrieben werden:

$$L_2 + \Phi_2 = L_1 + \Phi_1,$$

oder:

(46) $$(L + \Phi)_2 = (L + \Phi)_1 = \text{Const.},$$

d. h. die Summe aus der kinetischen und potentiellen Energie, die wir Gesamtenergie nennen, ist konstant. Man nennt diesen Satz das Energieprinzip oder den Satz von der Erhaltung der Energie. Er ist in speziellen Fällen für die Mechanik schon früh, z. B. von Leibniz erkannt worden, während erst in der Mitte des vorigen Jahrhunderts sich durch die Arbeiten von Julius Robert Meyer, James Prescott Joule und Hermann von Helmholtz die Überzeugung Bahn brach, daß das Energieprinzip ein ganz

allgemeines Naturgesetz sei. Wir kommen darauf ausführlich zurück. Hier sei noch darauf aufmerksam gemacht, daß nun der Ausdruck „konservative Kräfte“ verständlich wird.

Nach (45) kann man, wenn eine Funktion Φ, die sogenannte „Kräftefunktion“, existiert, sagen, daß die Bewegung eines substantiellen Punktes so verläuft, daß die Gesamtenergie konstant sei. Nimmt die kinetische Energie zu, so nimmt die potentielle ab, und umgekehrt. Es wird gut sein, diesen Sachverhalt an einem möglichst einfachen Beispiel zu erläutern. Wir nehmen dazu die Gleichungen des freien Falles, die in den bisherigen Bezeichnungen lauten:

$$Z = -mg = m\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Daraus folgt durch Multiplikation mit $\frac{dz}{dt}$:

$$-mg\frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt}\left\{\frac{m}{2}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\},$$

oder

(47) $$\frac{m}{2}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + mgz = \text{Constans}.$$

Die letzte Gleichung spricht das Energieprinzip aus: Das erste Glied stellt die kinetische, das zweite die potentielle Energie des fallenden Punktes dar. Nehmen wir etwa den Fall an, daß zur Zeit $t=0$ der Körper sich in der Höhe h in Ruhe befindet, so ist zu dieser Zeit die kinetische Energie gleich 0, die potentielle gleich mgh. Der Gesamtwert der Energie ist also für $t=0$: mgh, also ist er es nach (47) für alle Zeiten. Dadurch ist der Wert der rechtsstehenden Konstanten bestimmt und wir erhalten so:

(48) $$\frac{m}{2}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + mgz = mgh.$$

Die Gleichung zeigt deutlich die Umsetzung der kinetischen und der potentiellen Energie ineinander. Für z gleich h, die höchste Lage des Massenpunktes, muß $\frac{dz}{dt} = 0$ sein, also $L = 0$; $\Phi = mgh$; wenn jetzt z allmählich kleiner wird, so nimmt die potentielle Energie von ihrem maximalen Werte mgh ab, entsprechend L zu. Das Maximum von L ist vorhanden für $z = 0$; dann ist $\Phi = 0$; $L = mgh$.

Es ist für das Folgende wichtig, noch die Dimensionen von L, A, Φ festzustellen; da alle drei Größen paarweise in einer Gleichung vorkommen, so sieht man von vornherein, daß sie gleiche Dimension haben müssen. Nun ist eine Arbeit gleich dem skalaren Produkte einer Kraft $\mathfrak{K}$ und einer Strecke $\mathfrak{s}$. Also

$$[\mathit{Arbeit}] = [\mathit{Kraft}]\,.\,[\mathit{Länge}] = [ML^2T^{-2}].$$

Zum nämlichen Resultat gelangt man natürlich für L und Φ:

$$[L] = [\Phi] = [ML^2T^{-2}].$$

29. Statik; Prinzip der virtuellen Verrückungen.

Wenn an einem substantiellen Punkte Kräfte angreifen ($\mathfrak{K}_1 \mathfrak{K}_2 \mathfrak{K}_3 \ldots \mathfrak{K}_n$), so werden sie im allgemeinen demselben eine Beschleunigung erteilen. In dem speziellen Falle jedoch, wo das Kräftesystem derartig beschaffen ist, daß die Beschleunigung 0 ist, sagen wir: Der substantielle Punkt ist im Gleichgewicht. Welche Bedingungen sind es nun, denen die Kräfte zu gehorchen haben, damit Gleichgewicht vorhanden ist? Nach den Bewegungsgleichungen (9) ist, wenn die Komponenten der Beschleunigung gleich 0 sind:

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0,$$

oder, da wir die Gesamtkraft $\mathfrak{K}$ als die Resultante mehrerer Einzelkräfte $\mathfrak{K}_1$ bis $\mathfrak{K}_n$ auffassen können und wollen, und dasselbe für die Komponenten von $\mathfrak{K}$ gilt, so ist:

$$(49) \qquad \begin{cases} X = X_1 + X_2 + \ldots X_n = \sum\limits_{\lambda}^{1,n} X_\lambda = 0\,, \\ Y = Y_1 + Y_2 + \ldots Y_n = \sum Y_n = 0\,, \\ Z = Z_1 + Z_2 + \ldots Z_n = \sum Z_n = 0\,, \end{cases}$$

die wir auch durch eine Vektorgleichung zusammengefaßt ausdrücken können:

$$(50) \qquad \mathfrak{K} = \sum_{\lambda}^{1,n} \mathfrak{K}_\lambda = 0\,.$$

Diese letztere Form der Bedingung ist geometrisch leicht zu deuten. Denn $\Sigma\,\mathfrak{K}_\lambda$ ist ja die Vektorsumme der Kräfte, die wir geometrisch erhalten, wenn die Kräfte ihrer Größe und Richtung nach zum Kräftepolygon zusammengesetzt werden. Diejenige Strecke, die das Polygon schließt, ist der Größe und Richtung nach (die Richtung ist vom Anfangspunkt der ersten bis zum Endpunkt der letzten Kraft zu nehmen) die Resultante $\mathfrak{K}$. Diese soll der Gleichung (50) zufolge gleich Null sein; dann herrscht Gleichgewicht. Das bedeutet also, daß das Polygon aus den Kräften $\mathfrak{K}_1 \ldots \mathfrak{K}_n$ geschlossen sein muß, so daß der Endpunkt der letzten Kraft $\mathfrak{K}_n$ mit dem Anfangspunkt der ersten $\mathfrak{K}_1$ zusammenfällt (Fig. 35).

Denn dann ist die Resultante in der Tat gleich Null.

Wir erhalten also den Satz: ein substantieller Punkt ist im Gleichgewicht, wenn die Vektorsumme der Kräfte gleich Null ist, oder: wenn das Kräftepolygon geschlossen ist, oder: wenn die algebraische Summe der Komponenten der auf ihn wirkenden Kräfte gleich Null ist.

Die drei Bedingungen (49) können nun zu einer einzigen Gleichung vereinigt werden. Nicht etwa, indem man sie addiert; allerdings würde ihre Summe $X + Y + Z$ auch noch gleich Null sein, aber umgekehrt

könnte man aus dem Verschwinden der Summe $X + Y + Z$ nicht auf das Verschwinden der einzelnen Summanden schließen. Wir multiplizieren vielmehr die drei Gleichungen (49) mit drei ganz beliebigen Funktionen von $x\,y\,z$, die wir etwa $f_1\,f_2\,f_3$ nennen wollen, und addieren sie dann erst. So folgt:

(51) $$X f_1 + Y f_2 + Z f_3 = 0$$

und daraus weiter, wegen der völligen Willkür der drei Funktionen, daß diese Gleichung nur befriedigt werden kann, wenn x, y, z einzeln gleich Null werden, wie Gleichung (49) es verlangt. Vom rein mathematischen Standpunkte können diese drei Funktionen f ganz beliebig gewählt werden; doch ist es zu erwarten, daß diese Umformung

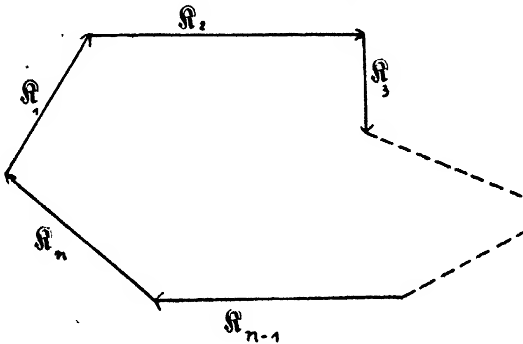


Fig. 35.

der Gleichgewichtsbedingung erst dann eine physikalische Brauchbarkeit erlangt, wenn wir — obwohl unter voller Beibehaltung der Unabhängigkeit der Funktionen — ihnen doch spezielle physikalische Bedeutung beilegen.

Wir wollen uns denken, dem substantiellen Punkte mit den Koordinaten $(x\,y\,z)$ werde eine kleine Verrückung $\delta\,\mathfrak{s}$ (absoluter Betrag $= \delta\,s$) erteilt, so daß er an die Stelle $(x + \delta x,\ y + \delta y,\ z + \delta z)$ gelange. Diese Verrückung soll nicht in der Zeit geschehen; es handelt sich durchaus nicht um eine tatsächliche, sondern nur um eine gedachte Verschiebung. Deshalb bezeichnen wir sie auch mit dem Zeichen δ der Variationsrechnung, nicht mit dem Zeichen d der Differentialrechnung, weil die Variation der Lage nur gedacht wird. Eine derartige Verrückung nennen wir eine „virtuelle" („mögliche", im Gegensatz zu „aktuellen", „wirklichen" Verrückungen). Die Komponenten der Verschiebung $\delta\,\mathfrak{s}$ sind offenbar δx, δy, δz. Diese Verrückungen sind, da der substantielle Punkt völlig frei ist, voneinander ganz unabhängige Größen. Wir können sie also als Funktionen f_1, f_2, f_3 wählen und erhalten dann aus (51):

(52) $$X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z = 0,$$

welche Gleichung sofort wegen der Willkürlichkeit der δx, δy, δz in die drei Gleichungen (49) zerfällt, ihnen also völlig gleichwertig ist. Gleichung (52) gestattet aber eine elegante Deutung der Gleichgewichtsbedingung. Denn wenn wir die Gleichung (29) benutzen und umgekehrt wie in Nr. 26 X, Y, Z, δx, δy, δz durch K und δs ausdrücken, so folgt:

(53) $$X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z = K\,\delta s \cos(\mathfrak{K}, \delta\mathfrak{s}) = (\mathfrak{K}\,.\,\delta\mathfrak{s}) = 0,$$

wobei der letzte Wert das Skalarprodukt aus der Kraft $\mathfrak{K}$ und der Verrückung $\delta\,\mathfrak{s}$ darstellt. Man erkennt sofort, daß die auf der linken Seite von (53) befindlichen Größen die Arbeit δA darstellen, die während der gedachten Verschiebung $\delta\,\mathfrak{s}$ von der äußeren Kraft geleistet werden würde. Es ist keine wirkliche Arbeit, sondern eine „virtuelle" Arbeit, und man kann daher (52) so aussprechen: Ein substantieller Punkt ist im Gleichgewicht, wenn die virtuelle Arbeit für eine beliebige virtuelle Verrückung gleich Null ist. Man nennt die Gleichung (52) das Prinzip der virtuellen Verrückung, auch wohl, was aber nicht recht zutreffend ist, weil die Zeit gar keine Rolle dabei spielt, das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten.

Eine besonders elegante Form nimmt das genannte Prinzip für konservative Kräfte an, für die also eine Kräftefunktion Φ existiert. Dann ist ja:

$$X = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}\,\delta z = 0.$$

also nach (52):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\,\delta z = 0.$$

Die linke Seite ist aber hier nichts anderes als die vollständige Variation der Funktion Φ; also folgt die neue Form der Gleichgewichtsbedingung:

(54) $$\delta\Phi = 0;$$

in Worten: Ein substantieller Punkt ist unter dem Einfluß konservativer Kräfte im Gleichgewicht, wenn die Variation der potentiellen Energie gleich Null ist. Damit dies der Fall sein kann, muß Φ an der betrachteten Stelle entweder ein Maximum, Minimum oder ein sogenannter Sattelwert sein. Darauf gehen wir genauer bei der Behandlung von Systemen substantieller Punkte ein.

Man kann fragen: Welchen Nutzen hat das Prinzip der virtuellen Verrückung, da ja die eine Gleichung (52) doch nur formal eine Gleichung ist und in Wirklichkeit sofort in die drei Gleichungen (49) zerfällt? Darauf ist zu erwidern, daß allerdings in dem Falle, daß der Massenpunkt völlig frei ist, das genannte Prinzip (52) keinerlei Vorzug vor den einfachen Gleichungen (49) besitzt: der Nutzen zeigt sich erst in dem Falle, zu dem wir jetzt übergehen wollen, daß der Punkt in seiner Bewegungsfreiheit beschränkt ist.

30. Beschränkte Bewegungsfreiheit.

Es kann sich der Fall ereignen, daß einem substantiellen Punkte, der gewissen Kräften unterliegt, außerdem noch gewisse Bedingungen vorgeschrieben sind, die während der ganzen Dauer der Bewegung oder des Gleichgewichts erfüllt sein sollen. Z. B. können wir eine Bewegung untersuchen, die ein Massenpunkt unter dem Einfluß der Schwerkraft vollführt, wenn er gleichzeitig gezwungen wird, auf einer Kugelfläche oder auf der Oberfläche eines gegebenen Ellipsoids zu bleiben. Dann muß außer den Bewegungsgleichungen noch eine Gleichung zwischen den Koordinaten gegeben sein, die dauernd erfüllt sein muß. Z. B. wenn der Punkt $(x\,y\,z)$ auf einer Kugelfläche bleiben soll, die mit dem Radius R um den Koordinatenanfangspunkt geschlagen ist, so müssen die jeweiligen Koordinaten des Punktes die Bedingung erfüllen:

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0\,.$$

Allgemein können wir also das Vorhandensein von Bedingungen durch eine oder mehrere Gleichungen zwischen x, y, z ausdrücken. Es kann auch vorkommen, daß die Zeit t in den Bedingungsgleichungen auftritt, wenn z. B. die eben betrachtete Kugelfläche sich noch in bestimmter Weise bewegen soll; doch wollen wir diesen Fall hier ausschließen. Es sei also gegeben eine Bedingungsgleichung:

$$\psi\,(x,\; y,\; z) = 0\,, \tag{55}$$

die eine Oberfläche darstellt, auf der der Punkt sich dauernd befinden soll. Wir fragen nun: Wann ist der substantielle Punkt unter der Einwirkung von Kräften $X\,Y\,Z$ unter diesen Umständen im Gleichgewicht?

Offenbar ist dazu nicht erforderlich, daß, wie früher, nach (49) $X = Y = Z = 0$. Auch können wir nicht ohne weiteres die Gültigkeit der Gleichung (52) $X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z = 0$ annehmen. Diese Gleichung würde, wenn sie gilt, allerdings jetzt etwas anderes besagen. Im Falle völliger Freiheit des Massenpunktes sind ja die Verrückungen δx, δy, δz völlig willkürlich und voneinander unabhängig, also Gleichung (52) völlig gleichbedeutend mit (49). Hier aber können die Verschiebungen δx, δy, δz nicht mehr unabhängig voneinander sein, da die Bedingungsgleichung (55) $\psi\,(x,\; y,\; z) = 0$ stets erfüllt sein muß. Es muß also auch für die benachbarte Lage $(x + \delta x,\; y + \delta y,\; z + \delta z)$ gelten:

$$\psi\,(x + \delta x,\; y + \delta y,\; z + \delta z) = 0\,, \tag{56}$$

oder, wenn wir nach dem Taylorschen Satze entwickeln und nach den linearen Gliedern abbrechen:

$$\psi(x, y, z) + \frac{\partial \psi}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial \psi}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial \psi}{\partial z}\,\delta z = 0,$$

oder endlich in Rücksicht auf (55):

(57) $$\frac{\partial \psi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \psi}{\partial z}\delta y + \frac{\partial \psi}{\partial z}\delta z = 0.$$

Diese Gleichung stellt offenbar einen Zusammenhang zwischen den virtuellen Verschiebungen δx, δy, δz her. Eine von ihnen ist durch die beiden anderen mitbestimmt. Würden wir die Gleichung $X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z = 0$ noch anwenden, so könnten wir doch nicht mehr schließen: $X = Y = Z = 0$; und umgekehrt ist damit überhaupt dieser Gleichung zunächst die Grundlage entzogen.

Wir können die hier sich ergebenden Schwierigkeiten folgendermaßen überwinden: Was bedeutet denn eigentlich physikalisch die Existenz einer Bedingungsgleichung von der Art (55)? Der Effekt der Bedingungsgleichung ist doch der, den Massenpunkt auf einer gewissen Oberfläche festzuhalten, oder besser, ihn zu verhindern, dieselbe zu verlassen. Diese Bemerkung zeigt uns, daß wir denselben Effekt auch erzielen könnten, wenn wir geeignete Zusatzkräfte $X'\,Y'\,Z'$ an Stelle der Bedingungsgleichung einführten. Tun wir dies, so haben wir die Gesamtkräfte $X + X'$, $Y + Y'$, $Z + Z'$, aber dafür, daß die Bedingungsgleichung fehlt, einen freien Massenpunkt. Jetzt aber gelten für die Gesamtkräfte die alten Gleichgewichtsbedingungen (49) oder (52) des freien Punktes; also ist:

$$X + X' = Y + Y' = Z + Z' = 0,$$

oder

(58) $$(X + X')\,\delta x_1 + (Y + Y')\,\delta y_1 + (Z + Z')\,\delta z_1 = 0,$$

wobei jetzt die δx_1, δy_1, δz_1 wieder gänzlich unabhängig sind, weshalb wir sie von den in Gleichung (57) vorkommenden durch den Index 1 unterscheiden. Die letzte Gleichung kann geschrieben werden:

(59) $$X\,\delta x_1 + Y\,\delta y_1 + Z\,\delta z_1 = -(X'\,\delta x_1 + Y'\,\delta y_1 + Z'\,\delta z_1).$$

Nun müssen wir etwas über die Zusatzkräfte $X'\,Y'\,Z'$ aussagen. Das geht natürlich nur, wenn wir uns dabei der Gleichung $\psi\,(x\,y\,z) = 0$ der Oberfläche bedienen, auf der der Punkt durch diese Kräfte gehalten wird. Da die Zusatzkräfte lediglich ein Herausrücken des Punktes aus der Fläche hindern sollen, ist es plausibel, anzunehmen, daß die Resultante $\mathfrak{K}'$ derselben in die Normale der Fläche falle. Machen wir diese Voraussetzung, so folgt, daß die Komponenten $X'\,Y'\,Z'$ der die Bedingungsgleichung ersetzenden Kraft, der sogenannten „Zwangskraft", proportional den Richtungskosinussen

$$\frac{\frac{\partial \psi}{\partial x},\ \frac{\partial \psi}{\partial y},\ \frac{\partial \psi}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2}}$$

der Fläche sein müssen. Verstehen wir unter λ_1 den Proportionalitätsfaktor, so muß sein:

(60) $$X' = \lambda_1 \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad Y' = \lambda_1 \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad Z' = \lambda_1 \frac{\partial \psi}{\partial z},$$

und das gibt, in (59) eingesetzt:

(61) $$X \delta x_1 + Y \delta y_1 + Z \delta z_1 = -\lambda_1 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \delta x_1 + \frac{\partial \psi}{\partial y} \delta y_1 + \frac{\partial \psi}{\partial z} \delta z_1 \right),$$

oder, da die δx_1, δy_1, δz_1 ganz willkürlich sind:

(62) $$X + \lambda_1 \frac{\partial \psi}{\partial x} = Y + \lambda_1 \frac{\partial \psi}{\partial y} = Z + \lambda_1 \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0,$$

d. h. die Kräfte XYZ halten den Körper auf der Fläche im Gleichgewicht, wenn ihre Resultierende senkrecht zur Fläche gerichtet ist.

Wir haben bei dieser Betrachtung die Bedingungsgleichung ganz unterdrückt, da wir sie durch die Kräfte $\lambda_1 \frac{\partial \psi}{\partial x}$, $\lambda_1 \frac{\partial \psi}{\partial y} \ldots$ ersetzt haben. Wir können aber nach Lagrange auch anders verfahren. Ziehen wir nämlich jetzt in Gleichung (61) die Bedingungsgleichung heran, d. h. betrachten wir nur Verrückungen δx, δy, δz, die Gleichung (57) erfüllen, so muß die rechte Seite von (61) für sich verschwinden. Folglich gelten gleichzeitig die beiden Gleichungen:

(63) $$\begin{cases} X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z = 0, \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \psi}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \psi}{\partial z} \delta z = 0. \end{cases}$$

Von diesen spricht die erste Gleichung das Prinzip der virtuellen Verrückung aus, das aber jetzt einen ganz anderen Sinn erhält, wie schon oben angedeutet worden ist. Denn da gleichzeitig die zweite Gleichung erfüllt sein muß, so sind δx, δy, δz nicht mehr unabhängig voneinander, und es kann folglich aus der ersten Gleichung nicht mehr geschlossen werden: $X = Y = Z = 0$. Der Vorteil ist aber der, daß wir jetzt für einen unfreien Massenpunkt dieselbe Gleichung $X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z = 0$ haben, wie für einen freien. Wollen wir nun aus (63) Schlüsse auf die Art der Kräfte ziehen, die sich das Gleichgewicht halten müssen, so können wir nach Lagrange so verfahren, daß wir die zweite Gleichung (63) mit einem zunächst noch willkürlichen Faktor λ multiplizieren und dann zur ersten addieren. Dann folgt:

(64) $$\left(X + \lambda \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) \delta x + \left(Y + \lambda \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) \delta y + \left(Z + \lambda \frac{\partial \psi}{\partial z}\right) \delta z = 0,$$

die mit (61) formal übereinstimmt, aber etwas anderes bedeutet. In (61) waren die δx_1, δy_1, δz_1 ganz willkürlich, λ_1 bestimmt; hier ist λ noch willkürlich, dagegen wird einer der drei Werte $\delta x\,\delta y\,\delta z$ durch die beiden anderen bestimmt. Gemeinsam ist beiden Gleichungen (61) und (64), daß in ihnen drei willkürliche Größen vorkommen, die aber nicht identisch sind. Wir wollen etwa δz als Funktion von δx und δy betrachten. Dann wäre in (64) willkürlich λ, δx, δy, aber in (61)

sind stets δx_1, δy_1, δz_1 als unabhängig voneinander zu nehmen. Dennoch treffen die Schlüsse von beiden Gleichungen zusammen. Denn wir haben den Faktor λ in (64) ja nicht eingeführt, damit er willkürlich bleiben soll, sondern um ihn geeignet bestimmen zu können. Wir wollen ihn so festlegen, daß δz (das ja nicht frei, sondern abhängig von δx und δy ist), in Gleichung (64) in Fortfall kommt, also so, daß der Koeffizient $Z + \lambda \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$ wird. Dann ist zunächst:

$$Z + \lambda \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \tag{65}$$

und folglich, da δx, δy voneinander unabhängig sind:

$$\left\{ \begin{aligned} X + \lambda \frac{\partial \psi}{\partial x} &= 0, \\ Y + \lambda \frac{\partial \psi}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \right. \tag{65}$$

welche Gleichungen mit (62) identisch sind und das Gleichgewicht bestimmen.

Das Gleichgewichtsproblem kann nun von zweierlei Art sein, indem entweder nach den Kräften gefragt wird, die an einem bestimmten Punkte der Fläche $\psi = 0$ den substantiellen Punkt im Gleichgewicht halten, oder aber, indem bei gegebenen Kräften gefragt wird, in welchem Punkte der Fläche $\psi = 0$ diese den Massenpunkt im Gleichgewicht halten.

Im ersteren Falle haben wir zur Bestimmung der Kräfte $X\,Y\,Z$ die drei Gleichungen (65), die aber, wegen der darin vorkommenden Unbekannten λ zur vollständigen Bestimmung nicht ausreichen; auch die Heranziehung der Gleichung (55) $\psi(x\,y\,z) = 0$ reicht dazu nicht, da sie $X\,Y\,Z$ gar nicht enthält. Das einzige, was man aus (63) über die Kräfte schließen kann, ist, daß die Resultante in die Richtung der Flächennormale an dem betrachteten Punkte fallen muß; der Betrag bleibt unbestimmt.

Anders steht die Sache im zweiten Falle. Dann haben wir zur Bestimmung der Gleichgewichtslage (x, y, z) erstens die drei Gleichungen (65) und die Gleichung (55) der Fläche $\psi(x\,y\,z) = 0$, und in diesem Falle reichen die vier Gleichungen gerade aus, um die vier Unbekannten x, y, z, λ zu bestimmen.

Genau dieselben Erwägungen gelten, wenn zwei Bedingungsgleichungen gegeben sind:

$$\psi_1(x, y, z) = 0,$$
$$\psi_2(x, y, z) = 0.$$

Da sie für alle Werte (x, y, z) gelten müssen, so ist auch:

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \psi_1}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \psi_1}{\partial z}\delta z = 0,$$
$$\frac{\partial \psi_2}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \psi_2}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \psi_2}{\partial z}\delta z = 0,$$

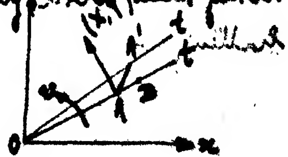
Die vorgeschriebenen Bedingungen von der Zeit abhängig.

~~Damit enthalten die Gleichungen [illegible]~~ ausser den Koordinaten x, y, z des Aufpunktes auch die Zeit explizite. Die Bewegung ist bestimmt durch die drei Bewegungsgleichungen $m\frac{d^2x}{dt^2} = X + X'$ usw. in Verbindung mit den weiteren 2 Gleichungen; welche die ~~[illegible]~~ Bedingungen ausdrücken ~~(die [illegible] Bedingung, dass die Zwangskraft senkrecht steht auf der Kurve)~~, sowie den Satz, dass die Zwangskraft (X', Y', Z') rechtwinklig zur Kurve oder Fläche gerichtet ist.

Dagegen ist es nicht mehr richtig, dass die Zwangskraft rechtwinklig zur Tangente der Bahnkurve ~~[illegible]~~ gerichtet ist. Denn die Bahnkurve hat im allgemeinen eine andere Richtung als die vorgeschriebene Kurve oder Fläche.

Beispiel. Der Aufpunkt sei gezwungen auf einer Geraden zu bleiben, die sich mit gegebener Winkelgeschwindigkeit in einer Horizontalen dreht.

Hier ist die Arbeit der Zwangskraft nicht gleich Null.



$m\frac{d^2x}{dt^2} = X'$, $m\frac{d^2y}{dt^2} = Y'$

Die Gleichung der vorgeschriebenen Bedingung

$y = x \tan(\omega t)$, und der Satz über die Richtung der Zwangskraft: $xX' + yY' = 0$

Diese Gleichung lässt sich Glied für Glied integrieren, wenn man die mit [illegible] multipliziert, [illegible]

[illegible] aus deren Integra- [illegible]

[illegible]

Im speziellen Falle, wo eine [illegible] Beziehung [illegible] die [illegible] explizite [illegible] enthält, [illegible]

[illegible] nötig sein, dieselbe aufrecht zu erhalten: [illegible]

und ferner gilt, wie vorhin auseinandergesetzt, gemeinschaftlich mit ihnen das Prinzip der virtuellen Verrückungen (52):

$$X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z = 0\,.$$

Multiplizieren wir die variierten Bedingungsgleichungen bzw. mit unbestimmten Faktoren λ und μ und addieren sie zu der letzten Gleichung, so folgt:

$$\left(X + \lambda\frac{\partial\psi_1}{\partial x} + \mu\frac{\partial\psi_2}{\partial x}\right)\delta x + \left(Y + \lambda\frac{\partial\psi_1}{\partial y} + \mu\frac{\partial\psi_2}{\partial y}\right)\delta y$$
$$+ \left(Z + \lambda\frac{\partial\psi_1}{\partial z} + \mu\frac{\partial\psi_2}{\partial z}\right)\delta z = 0\,.$$

Hier sind nun infolge der beiden Bedingungsgleichungen zwei Verrückungen, etwa δy und δz, nicht mehr willkürlich, sondern nur noch eine, δx; dafür aber die Faktoren λ, μ noch unbestimmt. Bestimmen wir sie so, daß:

(66) $$\begin{cases} Y + \lambda\dfrac{\partial\psi_1}{\partial y} + \mu\dfrac{\partial\psi_2}{\partial y} = 0, \\ Z + \lambda\dfrac{\partial\psi_1}{\partial z} + \mu\dfrac{\partial\psi_2}{\partial z} = 0, \end{cases}$$

so wird auch, da δx frei ist:

(66) $$X + \lambda\frac{\partial\psi_1}{\partial x} + \mu\frac{\partial\psi_2}{\partial x} = 0,$$

und die drei Gleichungen (66) bestimmen das Gleichgewicht. Bei gegebenen Kräften $X\,Y\,Z$ stehen für die fünf unbekannten x, y, z, λ, μ fünf Gleichungen zur Verfügung, nämlich die drei Gleichungen (66) und die beiden Bedingungsgleichungen, die also zur Bestimmung ausreichen.

Man erkennt aus der angegebenen Darstellung, daß die Gleichung (52) $X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z = 0$ nur erhalten werden kann — wie man auch im speziellen Falle die Darstellung wählt —, wenn man eine geeignete Hypothese über die Natur der Zwangskräfte macht. Bezeichnen wir die Zwangskräfte, die irgend welche Bedingungsgleichungen ersetzen, wieder durch $X'\,Y'\,Z'$, so muß zur Erzielung der Gleichung (52), die das Prinzip der virtuellen Verrückungen ausspricht, die Summe $X'\,\delta x + Y'\,\delta y + Z'\,\delta z$ zu Null gemacht werden, d. h. alle speziellen Annahmen, die man über die Zwangskräfte macht, müssen darauf hinauslaufen, daß die Zwangskräfte bei einer mit den Bedingungen verträglichen virtuellen Verrückung keine Arbeit leisten. Logisch ist es deshalb am durchsichtigsten, von vornherein zur Ableitung des Prinzips der virtuellen Verrückungen diese Hypothese zu machen, die als etwas Neues zu den Newtonschen Bewegungsgleichungen hinzutritt. Das Prinzip der virtuellen Verrückungen ist also ein selbständiges Prinzip der Mechanik, das nicht ohne besondere Zusatzannahmen aus den Newtonschen Gleichungen gefolgert werden kann. Da es sich stets bewährt hat — das ist ja bei jeder experimentellen Wissenschaft überhaupt

das einzige Kriterium für die Brauchbarkeit einer Hypothese —, so werden wir von jetzt ab die oben formulierte Annahme über die Zwangskräfte stets machen.

Es möge noch hervorgehoben werden, daß die Anzahl der Bedingungen bei einem substantiellen Punkte nicht größer als drei werden kann, da nur drei Koordinaten $x\,y\,z$ vorhanden sind. Wären drei Bedingungen gegeben, so würde keine der Verrückungen δx, δy, δz frei sein, der betreffende Punkt ist dann nicht mehr beweglich. Dies ist auch geometrisch leicht einzusehen: Eine Bedingungsgleichung bedeutet, daß der Punkt auf einer Oberfläche sich befinden muß; zwei Bedingungsgleichungen engen die Bewegungen des Punktes auf ihre Schnittlinie ein, während drei Bedingungsgleichungen einen Raumpunkt bestimmen, in dem der substantielle Punkt sich dauernd befinden muß.

Man nennt die Anzahl unabhängiger Koordinaten, die zur Bestimmung eines materiellen Systems notwendig sind, die „Freiheitsgrade" desselben. Ein völlig freier, substantieller Punkt hat demnach drei Freiheitsgrade, und durch jede Bedingungsgleichung geht einer davon verloren.

31. Das D'Alembertsche Prinzip.

Mit Rücksicht auf die Gleichung (49) des Gleichgewichts kann man den Gleichungen (9) der Dynamik eine veränderte, sehr fruchtbare Deutung geben. Schreiben wir dieselben folgendermaßen:

$$(67)\qquad \begin{cases} \bar X \equiv X - m\,\dfrac{d^2x}{dt^2} = 0, \\ \bar Y \equiv Y - m\,\dfrac{d^2y}{dt^2} = 0, \\ \bar Z \equiv Z - m\,\dfrac{d^2z}{dt^2} + 0. \end{cases}$$

Führen wir die aus (67) ersichtlichen Abkürzungen $\bar X$, $\bar Y$, $\bar Z$ ein, so sieht man, daß die Gleichungen

$$\bar X = \bar Y = \bar Z = 0$$

die Form der Gleichung (49) der Statik haben, d. h. also: die Kräfte $\bar X$, $\bar Y$, $\bar Z$ halten den substantiellen Punkt im Gleichgewicht. M. a. W.: wenn wir zu den wirklich vorhandenen Kräften $X\,Y\,Z$ die Kräfte $-m\frac{d^2x}{dt^2}$, $-m\frac{d^2y}{dt^2}$, $-m\frac{d^2z}{dt^2}$ hinzufügen, so ist der substantielle Punkt im Gleichgewicht.

Man kann also das vorliegende Problem der Dynamik auf ein solches der Statik formal zurückführen; das ist der Kern des sogenannten D'Alembertschen Prinzips. Die zu den wirklich vorhandenen Kräften $X\,Y\,Z$ hinzugefügten $-m\frac{d^2x}{dt^2}$, $-m\frac{d^2y}{dt^2}$, $-m\frac{d^2z}{dt^2}$ nennt man die „D'Alembertschen Trägheitskräfte". Sie existieren

natürlich ebenso wenig, wie die schon früher eingeführten Zusatzkräfte (Coriolis-, Führungs-, Zentrifugalkraft); sie machen sich nur bemerklich, wenn man ein dynamisches Problem nach den Sätzen der Statik behandelt. Den Fehler, den man dadurch macht, kann man gewissermaßen kompensieren durch Hinzunahme gewisser fingierter Kräfte, eben der Trägheitskräfte.

Multiplizieren wir die drei Gleichungen (67) resp. mit $\delta x, \delta y, \delta z$, wo die $\delta x, \delta y, \delta z$ unabhängige virtuelle Verrückungen sind, so folgt:

$$(68)\quad \left(X - m\frac{d^2 x}{d t^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2 y}{d t^2}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{d^2 z}{d t^2}\right)\delta z = 0,$$

die aussagt, daß die virtuelle Arbeit der wirklich vorhandenen und der Trägheitskräfte Null ist. Natürlich ist die Zerlegung nach kartesischen Koordinaten durchaus unwesentlich; in einem ebenen Polarkoordinatensystem (r, φ) würden wir nach (10) haben:

$$(68\text{a})\quad \left[\mathfrak{K}_r - m\left\{\frac{d^2 r}{d t^2} - r\left(\frac{d\varphi}{d t}\right)^2\right\}\right]\delta r - \left[\mathfrak{K}_\varphi - m\left(2\frac{d r}{d t}\frac{d\varphi}{d t} + r\frac{d^2\varphi}{d t^2}\right)\right] r\,\delta\varphi = 0.$$

Zerlegt man nach dem natürlichen Koordinatensystem der Kurve (R, φ), so hat man nach (11):

$$(68\text{b})\quad \left[\mathfrak{K}_n + m R\left(\frac{d\varphi}{d t}\right)^2\right]\delta R + \left[\mathfrak{K}_t - m\frac{d}{d t}\left(R\frac{d\varphi}{d t}\right)\right] R\,\delta\varphi = 0.$$

Die zur Normalkomponente $\mathfrak{K}_n$ hinzuzufügende Trägheitskraft $+mR\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$ ist nach (28) identisch mit der Zentrifugalkraft. Auch hieraus erkennt man, daß diese letztere keine wirkliche Kraft, sondern eine fingierte Zusatzkraft ist, deren Einführung manchmal praktische Vorteile bietet.

Gleichung (68) bildet offenbar eine Verbindung des Prinzips der virtuellen Verrückungen mit dem eigentlichen D'Alembertschen Prinzip, die man Lagrange verdankt. Freilich fällt — da der substantielle Punkt völlig frei ist — diese Gleichung wieder in drei Gleichungen (67) auseinander; aber wir können nun diesen Gedankengang auch bei beschränkter Bewegungsfreiheit des Massenpunktes noch anwenden.

Sind nämlich etwa folgende Bedingungsgleichungen gegeben:

$$\psi_1(x\,y\,z) = 0,$$
$$\psi_2(x\,y\,z) = 0,$$

$$(69)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial\psi_1}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\psi_1}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\psi_1}{\partial z}\delta z = 0,\\ \frac{\partial\psi_2}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\psi_2}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\psi_2}{\partial z}\delta z = 0,\end{aligned}\right.$$

so läßt sich durch die nämlichen Schlüsse (immer natürlich unter der Hypothese, daß die Zwangskräfte bei keiner mit den Bedingungen verträglichen virtuellen Verrückung Arbeit leisten) wie beim Prinzip der virtuellen Verrückungen zeigen, daß die Gleichung (68) ihre Gültig-

keit behält, wenn man die Gleichungen (69) dazu nimmt. Multipliziert man die letzteren mit zwei unbestimmten Faktoren λ, μ, addiert sie zu (68) und bestimmt die Faktoren λ, μ in derselben Weise wie früher, so liefert uns das D'Alembertsche Prinzip in der Form (68) die Bewegungsgleichungen:

$$(70) \quad \begin{cases} X - m\dfrac{d^2x}{dt^2} + \lambda\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x} + \mu\dfrac{\partial\psi_2}{\partial x} = 0, \\ Y - m\dfrac{d^2y}{dt^2} + \lambda\dfrac{\partial\psi_1}{\partial y} + \mu\dfrac{\partial\psi_2}{\partial y} = 0, \\ Z - m\dfrac{d^2z}{dt^2} + \lambda\dfrac{\partial\psi_1}{\partial z} + \mu\dfrac{\partial\psi_2}{d z} = 0. \end{cases}$$

Es sind dann auch in jedem Falle genügend Gleichungen vorhanden, um die sämtlichen Unbekannten x, y, z, λ, μ zu bestimmen, genau wie vorher.

Das Prinzip der virtuellen Verrückungen und dasjenige von D'Alembert gelten nicht nur für einen einzelnen Massenpunkt, sondern auch für Systeme solcher, wie später gezeigt wird. Der leichteren Verständlichkeit halber haben wir sie bereits hier eingeführt, wo ihr Nutzen relativ gering ist, wo ihr Sinn aber auch relativ leichter zu durchschauen ist.

32. Stoßkräfte; Bewegungsgröße; Impuls.

In manchen Fällen, wenn die wirkenden Kräfte außerordentlich groß sind, aber nur sehr kurze Zeit an einem substantiellen Punkte angreifen, geht der Vorgang der Beschleunigung so rapid vor sich, daß man denselben nicht beobachten kann. Was man konstatieren kann, ist die Geschwindigkeit $\mathfrak{c}_1$, bevor die Kraft wirkte, und die Geschwindigkeit $\mathfrak{c}_2$, nachdem sie gewirkt hat; diese Geschwindigkeitsänderung gehe in der kleinen Zeit τ vor sich. Die plötzliche Veränderung der Geschwindigkeit eines Massenpunktes durch eine Kraft nennt man einen „Stoß", τ die „Stoßdauer". In diesem Falle ist es zweckmäßig, den Bewegungsgleichungen eine etwas andere Form zu geben. Wir schreiben dieselben:

$$(71) \quad \begin{cases} X = \dfrac{d}{dt}\left(m\dfrac{dx}{dt}\right), \\ Y = \dfrac{d}{dt}\left(m\dfrac{dy}{dt}\right), \\ Z = \dfrac{d}{dt}\left(m\dfrac{dz}{dt}\right), \end{cases}$$

und da es, wie schon oben erwähnt, auf den Vorgang der Beschleunigung selbst hier nicht so sehr ankommt, als auf das Endresultat, so liegt es nahe, diese Gleichung nach der Zeit zu integrieren und zwar von der Zeit t an, zu der der Stoß beginnt, bis zur Zeit $t + \tau$, wo der Stoß zu Ende ist. Dann folgt aus (71):

$$\int_t^{t+\tau} X\,dt = \int_t^{t+\tau} \frac{d}{dt}\left(m\frac{dx}{dt}\right)dt = m\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t+\tau} - m\left(\frac{dx}{dt}\right)_t,$$

und so fort für die übrigen Gleichungen; führen wir für die Geschwindigkeiten die Komponenten u, v, w ein und bezeichnen $u_2\,v_2\,w_2$ dieselben nach, $u_1\,v_1\,w_1$ dieselben vor dem Stoß, so ist:

(72)
$$\begin{cases} \int_t^{t+\tau} X\,dt = m(u_2 - u_1), \\ \int_t^{t+\tau} Y\,dt = m(v_2 - v_1), \\ \int_t^{t+\tau} Z\,dt = m(w_2 - w_1). \end{cases}$$

Diese drei Gleichungen lassen sich offenbar in die folgende Vektorgleichung zusammenfassen, die Veranlassung zur Bildung zweier neuer Begriffe gibt:

(73)
$$\int_t^{t+\tau} \mathfrak{K}\,dt = m(\mathfrak{c}_2 - \mathfrak{c}_1).$$

Das linksstehende Zeitintegral über die Kraft $\mathfrak{K}$ nennt man in der Mechanik die „Stoßkraft“, die wir durch $[\mathfrak{K}]$ bezeichnen wollen; offenbar sind die drei Größen auf der linken Seite von (72) die Komponenten der Stoßkraft.

Wir schreiben also:

(74)
$$\int_t^{t+\tau} \mathfrak{K}\,dt = [\mathfrak{K}],$$

(75)
$$[X] = \int_t^{t+\tau} X\,dt,\quad [Y] = \int_t^{t+\tau} Y\,dt,\quad [Z] = \int_t^{t+\tau} Z\,dt:$$

Die Einführung des Begriffs der Stoßkraft $[\mathfrak{K}]$ ist in gewisser Weise ein Analogon zum Arbeitsbegriff; denn während die Arbeit das sogenannte Wegintegral der Kraft ist, ist die Stoßkraft das Zeitintegral derselben.

Das Produkt aus der Masse in die Geschwindigkeit des substantiellen Punktes nennt man die „Bewegungsgröße“, die „Quantität der Bewegung“, oder auch, im Anschluß namentlich an englische Autoren, den „Impuls der Kraft“; wir bezeichnen ihn durch $\mathfrak{Q}$.

Wir haben also:

(76)
$$\mathfrak{Q} = m\,\mathfrak{c},$$

oder in Komponentendarstellung:

$$(77)\qquad \begin{cases} \mathfrak{Q}_x = m\dfrac{dx}{dt} = m u, \\ \mathfrak{Q}_y = m\dfrac{dy}{dt} = m v, \\ \mathfrak{Q}_z = m\dfrac{dz}{dt} = m w. \end{cases}$$

Mit dieser Bezeichnung läßt sich Gleichung (73) schreiben:

$$(78)\qquad [\mathfrak{K}] = \mathfrak{Q}_2 - \mathfrak{Q}_1 = m(\mathfrak{c}_2 - \mathfrak{c}_1),$$

und eine entsprechende Komponentendarstellung liefert (72):

$$(79)\qquad [\mathfrak{K}_x] = \mathfrak{Q}_{2x} - \mathfrak{Q}_{1x} = m(u_2 - u_1) \text{ usw.}$$

Man kann die Gleichung (78) also so formulieren: „Die Stoßkraft ist gleich der vektoriellen Änderung der Bewegungsgröße".

Wie aus der obigen Darstellung hervorgeht, sind $[\mathfrak{K}]$ und $\mathfrak{Q}$ Vektoren. Der letztere hat die Richtung der Geschwindigkeit $\mathfrak{c}$ und den m-fachen Betrag derselben. Die Stoßkraft $[\mathfrak{K}]$ ist gleich der Differenz zweier der-

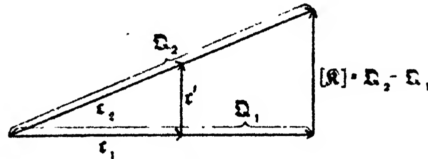


Fig. 36.

artiger Vektoren $\mathfrak{Q}$; nennen wir die Vektordifferenz zweier Geschwindigkeiten $\mathfrak{c}_2$ und $\mathfrak{c}_1$ etwa $\mathfrak{c}'$, so ist $[\mathfrak{K}]$ gleich gerichtet mit $\mathfrak{c}'$, aber vom m-fachen Betrage. $\mathfrak{c}'$ ist diejenige Geschwindigkeit, die man zu $\mathfrak{c}_1$ hinzufügen muß, um $\mathfrak{c}_2$ zu erhalten. Man kann also sagen, daß die Stoßkraft diese Zusatzgeschwindigkeit erzeugt. Die Fig. 36 veranschaulicht die Lage dieser Vektoren zueinander.

Den Impuls kann man in Beziehung zur kinetischen Energie L setzen. Diese letztere ist gleich $\frac{1}{2} m c^2$, und wenn wir die Ableitung von L nach c bilden, so folgt $\frac{dL}{dc} = m\mathfrak{c}$ also:

$$(80)\qquad \frac{dL}{dc} = \mathfrak{Q},$$

d. h. der Differentialquotient der kinetischen Energie nach der Geschwindigkeit ist gleich dem Impulse. Anderseits ist offenbar, wenn wir die Schreibweise des skalaren Produktes anwenden:

$$(81)\qquad L = \tfrac{1}{2} m(\mathfrak{c}\,\mathfrak{c}) = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{Q}\,\mathfrak{c}) = \tfrac{1}{2}|\mathfrak{Q}|\cdot|\mathfrak{c}|,$$

d. h. die kinetische Energie ist gleich dem halben skalaren Produkte aus dem Impulse und der Geschwindigkeit. Diese

Gleichung kann unter Einführung der Komponenten offenbar geschrieben werden:

(81a) $$L = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{Q}_x\,\mathfrak{c}_x + \mathfrak{Q}_y\,\mathfrak{c}_y + \mathfrak{Q}_z\,\mathfrak{c}_z)\,,$$

wie sich durch Einsetzen der Werte nach (77) unmittelbar ergibt.

Der Impuls $\mathfrak{Q}$ hat übrigens eine anschauliche mechanische Bedeutung. Denn wenn wir den speziellen Fall ins Auge fassen, daß vor dem Stoße die Geschwindigkeit $\mathfrak{c}_1 = 0$ ist, und nach demselben $\mathfrak{c}_2 = \mathfrak{c}$ ist, so ist nach Gleichung (78)

$$[\mathfrak{R}] = m\,\mathfrak{c} = \mathfrak{Q},$$

d. h. der Impuls ist diejenige Stoßkraft, die aus der Ruhe heraus dem betrachteten Massenpunkte seine augenblickliche Geschwindigkeit erteilen würde.

Drittes Kapitel.

Spezielle Bewegungen eines substantiellen Punktes.

33. Geradlinige kleine Schwingungen eines Massenpunktes.

Wir wollen einen Massenpunkt betrachten, der unter dem Einfluß der auf ihn wirkenden Kräfte in Ruhe ist, an dem diese sich also gemäß den Formeln (49) des II. Kapitels auf pag. 94 das Gleichgewicht halten. Der substantielle Punkt falle dann mit dem Raumpunkte (x_0, y_0, z_0) zusammen. Wir wollen denselben durch eine weitere Kraft X aus dieser Gleichgewichtslage entfernen und der Einfachheit halber diese Kraft so wählen, daß sie eine Verschiebung des Punktes parallel der x-Achse, etwa bis zum Punkte $(x\, y_0\, z_0)$, bewirkt. In dieser neuen Lage ist der Massenpunkt im Gleichgewicht unter dem Einfluß der alten Kräfte und der neuen Kraft X, und da die Gesamtsumme dieser Kräfte nach (49) des II. Kapitels den Wert Null haben muß, so besitzen die alten Kräfte eine Resultante gleich $-X$. Denn dann ist die Totalsumme gleich 0. Hebt man jetzt die neue Kraft X auf, so wirkt auf den Punkt die Resultante $-X$, die ihn in die Ruhelage zurückzuführen bestrebt ist.

Die Kraft X ist abhängig von der Größe der Verschiebung, die dem Punkt erteilt wird, d. h. Funktion von x, die wir etwa durch $f(x)$ bezeichnen wollen. Lassen wir also den substantiellen Punkt los, so wirkt auf ihn die Kraft $-X = -f(x)$. Nach dem D'Alembertschen Prinzip finden wir die Bewegungsgleichung, indem wir zu $-X$ die Trägheitskraft $-m\frac{d^2x}{dt^2}$ hinzufügen, und diese Summe gleich 0 setzen. Also ist:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -f(x),$$

oder, wie wir auch schreiben können, da x_0 konstant ist:

$$(1) \qquad m\frac{d^2(x-x_0)}{dt^2} = -f(x).$$

Wir wollen nun lediglich kleine Verrückungen aus der Gleichgewichtslage (x_0, y_0, z_0) ins Auge fassen, d. h. $x-x_0$ als eine sehr kleine Größe betrachten. Dann können wir nach dem Taylorschen Satze $f(x)$ in eine Reihe in der Umgebung von $x-x_0$ entwickeln:

$$(2) \qquad f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \dots$$

worin wir, da $(x - x_0)$ nach Voraussetzung sehr klein ist, Quadrate und noch höhere Potenzen von $(x - x_0)$ vernachlässigen wollen. Ferner ist $f(x_0)$, der Wert der Kraft in der Gleichgewichtslage, gleich Null, da eben $x = x_0$ eine Gleichgewichtslage bildet. Also ist schließlich:

(3) $$f(x) = f'(x_0)(x - x_0) = a^2 (x - x_0),$$

wenn wir $f'(x_0)$ durch die Abkürzung a^2 bezeichnen. Denn es muß in der Tat $f'(x_0)$ eine positive Konstante sein, weil die Kraft mit x wächst. Also können wir (1) schreiben:

(4) $$m \frac{d^2 (x - x_0)}{dt^2} = - a^2 (x - x_0),$$

d. h. die Beschleunigung ist proportional der Elongation $(x - x_0)$ aus der Ruhelage. Die Gleichung (4) stimmt also dem Sinne nach mit Gleichung (111) des I. Kapitels (pag. 53) überein, und damit ist sogleich der Charakter der Bewegung als einer periodischen, und zwar einer harmonischen Schwingung festgestellt.

Wir wollen indessen hier unabhängig von den Ergebnissen des I. Kapitels andere Wege einschlagen, um zur Integration der Gleichung (4) zu gelangen.

Zunächst bemerken wir, daß die Kraft $-a^2 (x - x_0)$ in der Tat nur eine Koordinatendifferenz enthält, also, wie wir es in Nr. 24 erkannt haben, ihr Wert vom Koordinatensystem völlig unabhängig ist, wie es sein muß. Um die weitere Behandlung zu vereinfachen, wollen wir noch $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ annehmen, wodurch wir erhalten:

(5) $$m \frac{d^2 x}{dt^2} = - a^2 x.$$

Die Kraft $-a^2 x$ ist nach der Ruhelage (0, 0, 0) hin gerichtet und wird deshalb auch als „zurücktreibende" Kraft bezeichnet. Allgemein nennt man Kräfte, die, wie die hier behandelte, proportional der Entfernung aus der Gleichgewichtslage sind, „elastische" Kräfte.

Um nun zu einer Integration von (5) zu gelangen, wollen wir den Weg einschlagen, der zum Energieprinzip führt, d. h. wir multiplizieren auf beiden Seiten mit $\frac{dx}{dt}$. Dann folgt:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} \frac{dx}{dt} = - a^2 x \frac{dx}{dt},$$

oder

(6) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right) = - \frac{d}{dt}\left(\frac{a^2}{2} x^2\right),$$

oder

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{a^2}{2} x^2\right\} = 0,$$

oder

(7) $$\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{a^2}{2} x^2 = \text{Const.}$$

Darin ist offenbar der Ausdruck $\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ die kinetische Energie L des Massenpunktes. Ferner stellt $-\frac{d}{dt}\left(\frac{a^2}{2}x^2\right) = -a^2 x \frac{dx}{dt} = X \frac{dx}{dt}$ die pro Sekunde geleistete Arbeit, den „Effekt“, der Kraft $X = -a^2 x$ dar, und folglich spricht (6) in spezieller Form den Satz aus, daß die Zunahme von L gleich der Arbeit der Kraft ist. Ferner sieht man, daß die Kraft $X = -a^2 x$ aus einer Funktion durch Differentiation ableitbar ist; denn es ist offenbar:

$$X = -a^2 x = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a^2}{2}x^2\right);$$

also erhalten wir für die sogenannte Kräftefunktion Φ oder die potentielle Energie

$$\Phi = \frac{a^2 x^2}{2}.$$

Daher spricht (7) in spezieller Form den Energiesatz aus: Die Summe von kinetischer und potentieller Energie ist konstant. Nennen wir die maximale Elongation, die der Massenpunkt machen kann, h, so ist für $x = h$ die potentielle Energie gleich $\frac{a^2 h^2}{2}$ die kinetische gleich Null, also die Gesamtenergie $\frac{a^2 h^2}{2}$. Daher kann (7) geschrieben werden:

(7a) $$\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{a^2 x^2}{2} = \frac{a^2 h^2}{2}.$$

Diese Gleichung lehrt, wie wir schon früher beim freien Fall gesehen haben, die Umwandlung der beiden Energieformen ineinander: Für $x = h$ ist die kinetische Energie gleich Null, die potentielle ein Maximum $= \frac{a^2 h^2}{2}$; für $x = 0$ ist letztere gleich Null und die kinetische Energie ein Maximum $= \frac{a^2 h^2}{2}$ usf. So findet bei jeder Schwingung, d. h. in jeder Periode, eine zweimalige Umsetzung der beiden Energieformen ineinander statt. Eine leichte Umformung von (7a) liefert:

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{a^2 h^2 - a^2 x^2}{m}},$$

oder

(8) $$dt = \pm \frac{dx}{\frac{a}{\sqrt{m}}\sqrt{h^2 - x^2}}.$$

In dieser Gleichung sind die Variablen getrennt, also das Problem auf eine Quadratur zurückgeführt. Führen wir eine neue Variable $\xi = \frac{x}{h}$ ein, so wird (8):

$$\pm\frac{a}{\sqrt{m}}\,dt = \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}.$$

und die Integration liefert:

$$\pm \frac{a}{\sqrt{m}} t + \text{Const.} = \arcsin \xi = \arcsin \frac{x}{h},$$

oder endlich:

(9) $$x = \pm h \sin\left(\frac{a}{\sqrt{m}} t + \delta\right).$$

Damit ist das uns schon von früher her bekannte Resultat gewonnen, daß die durch Gleichung (5) dargestellte Bewegung eine **harmonische** Schwingung ist: der Vergleich mit (103a), (105) und (106) des I. Kapitels auf pag. 51 liefert für die Schwingungsdauer T_0 und die Schwingungszahl n_0 die Werte:

(10) $$n_0 = \frac{1}{2\pi} \frac{a}{\sqrt{m}}, \qquad T_0 = \frac{2\pi\sqrt{m}}{a},$$

d. h. die Schwingungsdauer T_0 ist proportional der Quadratwurzel aus der Masse des substantiellen Punktes und umgekehrt proportional der Größe a, die die Stärke der zurücktreibenden elastischen Kraft mißt.

Die Gleichung (9) enthält zwei unbestimmte Konstanten, die von der zweimaligen Integration herrühren, h und δ, die hinreichend, aber auch notwendig sind, um die hier gefundene Lösung dem gegebenen Anfangszustande anzupassen. Da wir hier nur eine variable Koordinate haben, so kann uns nur der Anfangswert für die x — Koordinate und die x-Komponente $\frac{dx}{dt}$ der Geschwindigkeit vorgeschrieben sein, d. h. es sind zwei Gleichungen zu erfüllen, und dazu reichen die zwei disponiblen Konstanten gerade aus. Es sei z. B.:

$$\text{für } t = 0 \begin{cases} x = 0, \\ \dfrac{dx}{dt} = u_0, \end{cases}$$

so folgt aus (9):

$$(x)_{t=0} = 0 = \pm h \sin \delta.$$

Ferner durch Differentiation von (9) nach t und Nullsetzen von t:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} = u_0 = \pm \frac{ha}{\sqrt{m}} \left\{\cos\left(\frac{a}{\sqrt{m}} t + \delta\right)\right\}_{t=0} = \pm \frac{ha}{\sqrt{m}} \cos \delta.$$

Also haben wir zur Bestimmung von h und δ:

$$\pm h \sin \delta = 0,$$

$$\pm \frac{ha}{\sqrt{m}} \cos \delta = u_0,$$

woraus folgt:

(11) $$\delta = 0, \quad h = \pm \frac{\sqrt{m}}{a} \cdot u_0,$$

so daß die dem vorgeschriebenen Anfangszustande angepaßte Lösung (9) sich schreiben läßt:

(12) $$x = + \frac{\sqrt{m}}{a} u_0 \cdot \sin \frac{a}{\sqrt{m}} t,$$

womit alles vollkommen bestimmt ist.

Man kann die hier abgeleitete Lösung (9) noch in eine andere, etwas symmetrischere Form bringen, indem man $\sin\left(\frac{a}{\sqrt{m}} t + \delta\right)$ entwickelt. Dann erhält man:

(13) $$x = \pm h \cos\delta \sin \frac{a}{\sqrt{m}} t \pm h \sin\delta \cos \frac{a}{\sqrt{m}} t.$$

Da h und δ willkürliche Konstanten sind, so sind dies auch die Aggregate $\pm h \cos\delta$ und $\pm h \sin\delta$, die wir etwa durch A und B bezeichnen können. Also haben wir nach (13):

(14) $$x = A \cos \frac{a}{\sqrt{m}} t + B \sin \frac{a}{\sqrt{m}} t.$$

Darin sind der Cosinus und der Sinus vollkommen gleichberechtigt, wie wir es bereits aus der Kinematik wissen. $\cos \frac{a}{\sqrt{m}} t$ wie auch $\sin \frac{a}{\sqrt{m}} t$ befriedigen einzeln die Differentialgleichung (5), sind also Lösungen derselben; aber da in ihnen noch keine willkürliche Konstante steckt, können sie nicht die allgemeine Lösung darstellen, sondern sind „partikuläre" Lösungen oder Integrale von (5). Dagegen stellt (14), da dort zwei willkürliche Konstanten A und B auftreten, die allgemeine Lösung dar, die somit in einfacher Weise aus zwei partikulären Lösungen sich zusammensetzen läßt.

Was wir hier an einem speziellen Falle erkannt haben, gilt ganz allgemein für Lösungen der sogenannten linearen homogenen Differentialgleichung. Eine Differentialgleichung ist linear, wenn die unbekannte Funktion bzw. deren Ableitungen nur in der ersten Potenz vorkommen; sie heißt ferner homogen, wenn sie kein von der unbekannten Funktion freies Glied enthält. Die hier in Frage stehende Differentialgleichung (5) ist also eine lineare homogene Differentialgleichung, und zwar von der zweiten Ordnung, da die höchste Ableitung der unbekannten Funktion die zweite $\left(\frac{d^2 x}{dt^2}\right)$ ist. Außerdem hat (5) noch eine wichtige Eigenschaft, nämlich die, daß ihre Koeffizienten (m und a^2) konstante Größen sind.

Zunächst beweisen wir den Satz: „Wenn x_1 eine Lösung der Differentialgleichung (5) ist, so ist auch Ax_1, wo A eine beliebige Konstante ist, eine Lösung". In der Tat, da nach Voraussetzung x_1 die Differentialgleichung erfüllen soll, so ist identisch, was wir durch $\equiv$ andeuten:

$$m \frac{d^2 x_1}{dt^2} + a^2 x_1 \equiv 0.$$

Es wird behauptet, daß auch $A x_1$ eine Lösung sei, d. h. daß ebenfalls identisch sei:

$$m \frac{d^2 (A x_1)}{d t^2} + a^2 (A x_1) \equiv 0 .$$

Das ist aber gleich:

$$A \left\{ m \frac{d^2 x_1}{d t^2} + a^2 x_1 \right\} \equiv 0,$$

und dies ist in der Tat identisch erfüllt, da x_1 eine Lösung ist.

Ganz ebenso beweisen wir den Satz: „Wenn x_1 und x_2 Lösungen der Differentialgleichung (5) sind, so ist auch $A x_1 + B x_2$, wo A und B beliebige Konstanten sind, eine Lösung." Denn es ist nach Voraussetzung identisch:

$$m \frac{d^2 x_1}{d t^2} + a^2 x_1 \equiv 0.$$

$$m \frac{d^2 x_2}{d t^2} + a^2 x_2 \equiv 0.$$

Erweitert man die beiden Gleichungen mit A bzw. B und addiert, so kann man die Summe schreiben:

$$m \frac{d^2}{d t^2} (A x_1 + B x_2) + a^2 (A x_1 + B x_2) \equiv 0,$$

und das bedeutet, daß $A x_1 + B x_2$ eine Lösung ist, wie behauptet wurde. Und da die allgemeinste Lösung zwei disponible Konstanten enthalten muß, so ist $A x_1 + B x_2$ die allgemeinste Lösung, wenn x_1 und x_2 zwei voneinander linear unabhängige partikuläre Integrale sind. Dabei ist durchaus nicht vorausgesetzt, daß die Konstanten A und B reell sein müssen; sie können vielmehr auch komplex ausfallen, und davon kann man gerade besonderen Vorteil ziehen, wie gleich gezeigt werden soll.

Wir wollen nämlich nun die Lösung der Differentialgleichung (5) auf einem ganz anderen Wege versuchen, wobei die Konstanz der Koeffizienten unserer Differentialgleichung eine wichtige Rolle spielt. Wir wollen einmal Gleichung (5) nach t differentiieren. Dann folgt:

$$m \frac{d^3 x}{d t^3} + a^2 \frac{d x}{d t} = 0,$$

oder, wenn wir für $\frac{d x}{d t}$ die Bezeichnung ξ einführen:

$$m \frac{d^2 \xi}{d t^2} + a^2 \xi = 0,$$

d. h. also: **Durch Differentiation (und, wie man ebenso zeigen kann, durch Integration) wird die Gestalt von (5) nicht verändert, denn die letzte Gleichung ist identisch mit (5), nur steht statt x der Buchstabe ξ, was natürlich ohne Belang ist. Es liegt daher nahe, zu vermuten, daß die Integrale von (5) dieselbe Eigenschaft haben, nämlich sich durch Differentiation und Integration zu reproduzieren, höchstens noch mit**

Konstanten zu multiplizieren. Eine Funktion von dieser Eigenschaft ist aber die Exponentialfunktion. Wir werden also den Ansatz versuchen, wenn ϱ eine noch unbestimmte Konstante bedeutet:

$$x = e^{\varrho t} \tag{15}$$

und denselben in Gleichung (5) einsetzen. Wir haben jetzt $\frac{d^2 x}{d t^2}$ zu bilden; das gibt:

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = \varrho^2 e^{\varrho t} = \varrho x,$$

also liefert (5) mit dem probeweisen Ansatz (15):

$$e^{\varrho t}\{m \varrho^2 + a^2\} = 0. \tag{16}$$

Die Erfüllung dieser Gleichung ist die Bedingung dafür, daß unser Ansatz (15) möglich, $x = e^{\varrho t}$ also ein Integral der Gleichung (5) ist.

Die Gleichung (16) kann nun in der Tat erfüllt werden; zunächst durch die Annahme $x = e^{\varrho t} = 0$, die aber offenbar trivial ist und die wir stets ausschließen wollen. Dann bleibt uns aber der noch unbestimmte Faktor ϱ, und dieser kann so bestimmt werden, daß

$$m \varrho^2 + a^2 = 0.$$

Wir erhalten also:

$$\varrho = \pm \frac{a i}{\sqrt{m}}, \tag{17}$$

wo i die imaginäre Einheit ist. Damit haben wir sogar zwei mögliche Werte von ϱ, und folglich nach (15) zwei mögliche Lösungen, die wir x_1 und x_2 nennen wollen:

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= e^{+\frac{i a}{\sqrt{m}} t}, \\ x_2 &= e^{-\frac{i a}{\sqrt{m}} t}. \end{aligned}\right. \tag{18}$$

Die beiden Lösungen erscheinen hier, wovon wir die Möglichkeit schon oben andeuteten, in komplexer Form. Führt man trigonometrische Funktionen ein, so kann man schreiben:

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= \cos \frac{a}{\sqrt{m}} t + i \sin \frac{a}{\sqrt{m}} t, \\ x_2 &= \cos \frac{a}{\sqrt{m}} t - i \sin \frac{a}{\sqrt{m}} t. \end{aligned}\right. \tag{19}$$

Was bedeutet nun das Auftreten einer komplexen Lösung? Da die untersuchte Differentialgleichung (5) reelle Koeffizienten hat, wie es bei physikalischen Problemen stets sein muß, so müssen die Lösungen auch stets reell sein. Erscheint eine Lösung aber dennoch in komplexer Form, so kann das nur den Sinn haben, daß sowohl der reelle als auch der imaginäre Teil eine Lösung der Differentialgleichung bilden, die nur durch das Symbol i scheinbar zu einer zusammen-

gefaßt sind. Dann geben uns also die Gleichungen (19) die beiden reellen Lösungen, die wir ebenfalls durch x_1 und x_2 bezeichnen wollen:

(20)
$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= \cos\frac{a}{\sqrt{m}}\,t, \\ x_2 &= \sin\frac{a}{\sqrt{m}}\,t, \end{aligned}\right.$$

auf die wir schon in (14) gestoßen sind. Erweitern wir die beiden Lösungen mit den beliebigen Konstanten A und B, so erhält man durch Addition das allgemeine Integral in der Form:

$$x = A\,x_1 + B\,x_2 = A\cos\frac{a}{\sqrt{m}}\,t + B\sin\frac{a}{\sqrt{m}}\,t,$$

das mit (14) völlig identisch ist, wie es sein muß.

34. Kleine Schwingungsbewegung im Raume.

Wir wollen das in Nr. 33 behandelte Schwingungsproblem insofern verallgemeinern, als wir nicht mehr annehmen wollen, die Bewegung des substantiellen Punktes erfolge längs der x-Achse. Vielmehr werde ihm eine beliebig gerichtete Verschiebung $\mathfrak{s}$ erteilt; wird der substantielle Punkt dann sich selbst überlassen, so ist eine zurücktreibende Kraft

(21)
$$\mathfrak{K} = -a^2\mathfrak{s}$$

bestrebt, ihn in die Ruhelage zurückzuführen. Nach dem d'Alembertschen Prinzip erhalten wir also die Bewegungsgleichung, wenn wir zu $\mathfrak{K}$ die Trägheitskraft $-m\,\mathfrak{a}$, wo $\mathfrak{a}$ die Beschleunigung ist, hinzufügen und die Summe gleich Null setzen. Also:

$$m\,\mathfrak{a} + a^2\mathfrak{s} = 0$$

oder durch Koordinatenzerlegung, wenn wir als Ruhelage des substantiellen Punktes den Koordinatenanfangspunkt nehmen:

(22)
$$\left\{\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} + a^2x &= 0, \\ m\frac{d^2y}{dt^2} + a^2y &= 0, \\ m\frac{d^2z}{dt} + a^2z &= 0. \end{aligned}\right.$$

Damit diese Bewegung völlig bestimmt sei, müssen die Anfangswerte von x, y, z und von $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ gegeben sein; es sei z. B.:

$$\text{für } t = 0:\ \left\{\begin{aligned} &x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0, \\ &\frac{dx}{dt} = u_0, \quad \frac{dy}{dt} = v_0, \quad \frac{dz}{dt} = w_0. \end{aligned}\right.$$

Dies sind 6 Daten, also sind im ganzen 6 disponible Konstanten notwendig, von denen auf jede der drei Gleichungen (22) zwei entfallen, entsprechend der notwendigen zweimaligen Integration.

Die Lösung der Gleichung (22) können wir nun sofort angeben, da es ja unsere alte Differentialgleichung (5) ist. Sind $A_1 B_1 A_2 B_2 A_3 B_3$ sechs willkürliche Konstanten, so können wir nach dem Resultat der vorhergehenden Nummer schreiben:

$$(23)\qquad \begin{cases} x = A_1 \cos \frac{a}{\sqrt{m}} t + B_1 \sin \frac{a}{\sqrt{m}} t, \\ y = A_2 \cos \frac{a}{\sqrt{m}} t + B_2 \sin \frac{a}{\sqrt{m}} t, \\ z = A_3 \cos \frac{a}{\sqrt{m}} t + B_3 \sin \frac{a}{\sqrt{m}} t. \end{cases}$$

Aus diesen drei Gleichungen können wir einen wichtigen Schluß ziehen. Wir können nämlich die Gleichung auffassen als Bestimmungsgleichung für die beiden Unbekannten $\cos \frac{a}{\sqrt{m}} t$ und $\sin \frac{a}{\sqrt{m}} t$. Zu deren Bestimmung würden aber schon zwei Gleichungen hinreichen; wenn also drei Gleichungen gegeben sind, so werden im allgemeinen nur die Werte $\cos \frac{a}{\sqrt{m}} t = \sin \frac{a t}{\sqrt{m}} = 0$ diese drei Gleichungen gleichzeitig befriedigen können. Nur in dem Falle, daß die Determinante D des Gleichungssystems (23) verschwindet, können von Null verschiedene Werte von $\cos \frac{a t}{\sqrt{m}}$ und $\sin \frac{a t}{\sqrt{m}}$ erhalten werden. Also muß sein:

$$(24)\qquad D = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & -x \\ A_2 & B_2 & -y \\ A_3 & B_3 & -z \end{vmatrix} = 0$$

oder ausgerechnet:

$$(25)\qquad (A_2 B_3 - A_3 B_2)\, x + (A_3 B_1 - A_1 B_3)\, y + (A_1 B_2 - A_2 B_1)\, z = 0.$$

Das ist eine lineare Gleichung zwischen x, y, z, den Koordinaten des schwingenden Massenpunktes, die zu allen Zeiten erfüllt sein muß; es ist die Gleichung einer Ebene durch den Koordinatenanfangspunkt; also liegt die Bewegung des Massenpunktes stets in dieser Ebene: er vollführt also eine ebene Bewegung.

Die Lage der Ebene (25) im Raume ist leicht zu bestimmen. Denn die Richtungskosinusse der auf ihr errichteten Normale sind respektive gleich:

$$(26)\qquad \frac{A_2 B_3 - A_3 B_2,\quad A_3 B_1 - A_1 B_3,\quad A_1 B_2 - A_2 B_1}{\sqrt{(A_2 B_3 - A_3 B_2)^2 + (A_3 B_1 - A_1 B_3)^2 + (A_1 B_2 - A_2 B_1)^2}}.$$

Und nun können wir unsere ganze Aufgabe sehr vereinfachen, wenn wir ein neues Koordinatensystem einführen, und zwar derartig, daß seine $x\,y$-Ebene dauernd mit der Bewegungsebene zusammenfällt; dadurch

wird dauernd $z = 0$, und wir haben es dann nur noch mit zweien der Gleichungen (23) zu tun. Natürlich werden die Konstanten durch die Drehung des Koordinatensystems jetzt andere; wir wollen sie durch E und F bezeichnen, also wird unsere Bewegung dargestellt durch:

$$(27)\quad \begin{cases} x = E_1 \cos\frac{at}{\sqrt{m}} + F_1 \sin\frac{at}{\sqrt{m}}, \\ y = E_2 \cos\frac{at}{\sqrt{m}} + F_2 \sin\frac{at}{\sqrt{m}}. \end{cases}$$

Um diese weiter zu untersuchen, wollen wir vereinfachende Bezeichnungen einführen:

$$(28)\quad \begin{cases} E_1 = \mathsf{E}_1 \cos\delta_1, \\ F_1 = \mathsf{E}_1 \sin\delta_1. \end{cases}$$

Dieser Ansatz ist stets möglich, denn durch Quadrieren und Addieren folgt einerseits:

$$(29)\quad E_1^2 + F_1^2 = \mathsf{E}_1^2$$

durch Division anderseits:

$$(30)\quad \operatorname{tg}\delta_1 = \frac{F_1}{E_1},$$

und beide Gleichungen können stets erfüllt werden. Ebenso setzen wir:

$$(31)\quad \begin{cases} E_2 = \mathsf{E}_2 \cos\delta_2, \\ F_2 = \mathsf{E}_2 \sin\delta_2, \end{cases}$$

was analoge Bestimmungen für E_2 und δ_2 liefert. Damit können die Gleichungen (27), in die einfache Form gebracht werden:

$$(32)\quad \begin{cases} x = \mathsf{E}_1 \cos\left(\frac{at}{\sqrt{m}} - \delta_1\right), \\ y = \mathsf{E}_2 \cos\left(\frac{at}{\sqrt{m}} - \delta_2\right). \end{cases}$$

Damit aber haben wir diejenige Form der Gleichungen gewonnen, die wir in Formel (112) des ersten Kapitels (pag. 54) untersucht haben. Alle dortigen Resultate sind also ohne weiteres übertragbar. Im besonderen folgt: Die Bahn ist eine Ellipse, deren Achsen im allgemeinen nicht mit den Koordinatenachsen zusammenfallen (Fig. 29).

Für gewisse Spezialfälle kann die Ellipse entarten. Ist die Phasendifferenz $\delta_1 - \delta_2 = 0$ oder $= \pi$, so wird die Bahn geradlinig (Fig. 30); ist $\delta_1 - \delta_2 = \pm \pi/2$, so wird die Bahn eine Ellipse, die die Koordinatenachsen als Hauptachsen besitzt (Fig. 31), und werden überdies die Amplituden E_1 und E_2 gleich, so ist die Bahn ein Kreis. Damit ist die ganze Bewegung vollkommen bestimmt.

35. Gedämpfte Schwingungen.

Die bisher betrachteten Schwingungen weichen in einem sehr wesentlichen Punkte von denjenigen ab, die man in der Natur zu beobachten Gelegenheit hat. Die ersteren, einmal angeregt, würden in alle Ewigkeit ungeändert fortdauern, was sich daraus ergibt, daß die Amplitude der Schwingungen nicht von der Zeit abhängt, sondern konstant ist. Im Gegensatze dazu beobachtet man stets, daß die Amplituden mit der Zeit kleiner und kleiner werden, so daß schließlich die Schwingungsbewegung unmerklich wird. Wir müssen daraus schließen, daß außer den bisher als wirkend angenommenen Kräften noch andere vorhanden sind, deren Wirkung eben das allmähliche Verschwinden der Schwingung ist. Diese Kräfte nennt man „Reibungskräfte“. Sie machen sich bei allen Vorgängen bemerklich, und sie sind es auch, die scheinbar zu dem Resultat führen, daß das Trägheitsgesetz nicht gilt, wie wir in Nr. 22 sahen.

Der Vorgang der Reibung ist äußerst kompliziert und keineswegs vollkommen erforscht; die experimentellen Untersuchungen haben ergeben, daß für kleine Geschwindigkeiten die Reibungskraft angenähert proportional der ersten, für größere proportional der zweiten Potenz der Geschwindigkeit, und dieser stets entgegengesetzt gerichtet ist. Nennen wir die Reibungskraft $\mathfrak{R}$, so ist also bei Beschränkung auf kleine Geschwindigkeiten annähernd:

$$\mathfrak{R} = -k\,\mathfrak{c}\,, \tag{33}$$

wo der stets positive Proportionalitätsfaktor k als „Reibungskoeffizient“ bezeichnet wird. Die Komponenten der Reibungskraft sind also:

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{R}_x &= -k\frac{dx}{dt}\,,\\ \mathfrak{R}_y &= -k\frac{dy}{dt}\,,\\ \mathfrak{R}_z &= -k\frac{dz}{dt}\,. \end{aligned}\right. \tag{33a}$$

Zu der elastischen Kraft (21) tritt also noch die Reibungskraft (33) hinzu, und die Bewegungsgleichung ergibt sich, wenn zu dieser Summe noch die Trägheitskraft $-m\mathfrak{a}$ gemäß dem d'Alembertschen Prinzip hinzugesetzt und das ganze annuliert wird. Also ist:

$$-m\mathfrak{a} + \mathfrak{K} + \mathfrak{R} = 0\,,$$

oder nach Einführung der Werte aus (21) und (33):

$$m\mathfrak{a} + a^2\mathfrak{s} + k\,\mathfrak{c} = 0\,, \tag{34}$$

die nach Zerlegung in kartesische Komponenten die Gleichung liefert:

$$(35)\quad \begin{cases} m\frac{d^2x}{dt^2} + k\frac{dx}{dt} + a^2x = 0, \\ m\frac{d^2y}{dt^2} + k\frac{dy}{dt} + a^2y = 0, \\ m\frac{d^2z}{dt^2} + k\frac{dz}{dt} + a^2z = 0. \end{cases}$$

Wir wollen uns damit begnügen, eine, etwa die erste Gleichung, zu untersuchen; die Bewegung im Raume bietet nichts wesentlich Neues.

Da jede der Gleichungen (35) linear und homogen ist und konstante Koeffizienten besitzt, so hat sie die Eigenschaften der Differentialgleichung (5) in Nr. 33. Wir werden also auch hier ein Integral versuchsweise in der Exponentialform ansetzen:

$$(36)\qquad x = e^{\varrho t},$$

was liefert:

$$(36\text{a})\qquad \frac{dx}{dt} = \varrho x, \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \varrho^2 x.$$

ϱ ist dabei ein unbekannter, zu bestimmender Faktor. Die Einsetzung von (36) und (36a) in (35) liefert als Bedingung dafür, daß (36) ein Integral ist, die Gleichung:

$$x\,(m\varrho^2 + k\varrho + a^2) = 0,$$

die, wenn man von der trivialen Lösung $x = 0$ absieht, folgende quadratische Gleichung für ϱ liefert:

$$(37)\qquad \varrho^2 + \frac{k}{m}\varrho + \frac{a^2}{m} = 0.$$

Das gibt für ϱ:

$$(38)\qquad \varrho = -\frac{k}{2m} \pm \sqrt{\frac{k^2}{4m^2} - \frac{a^2}{m}}.$$

Wir haben also zwei Lösungen, den beiden Werten von ϱ entsprechend:

$$(39)\quad \begin{cases} x_1 = e^{-\frac{k}{2m}t} \cdot e^{+\sqrt{\frac{k^2}{4m^2} - \frac{a^2}{m}}\,t}, \\ x_2 = e^{-\frac{k}{2m}t} \cdot e^{-\sqrt{\frac{k^2}{4m^2} - \frac{a^2}{m}}\,t}. \end{cases}$$

Multipliziert man jede mit einer willkürlichen Konstanten A und B und addiert, so erhält man die allgemeine Lösung x:

$$x = Ax_1 + Bx_2.$$

Wir wollen zunächst die Partikularlösungen x_1 und x_2 untersuchen. Dabei sind, je nachdem der Ausdruck unter der Wurzel $\frac{k^2}{4m^2} - \frac{a^2}{m}$ positiv oder negativ ist, zwei wesentlich verschiedene Fälle zu unterscheiden. Wir wollen wegen der großen Ähnlichkeit mit den bisher behandelten Fällen zunächst den Fall ins Auge fassen, daß

$$\frac{k^2}{4m^2} - \frac{a^2}{m} < 0 \quad \text{ist.}$$

Wir wollen diesen Wert gleich $-4\pi^2\bar{n}_0^2$ setzen:

(40)
$$\frac{k^2}{4m^2} - \frac{a^2}{m} = -4\pi^2\bar{n}_0^2.$$

Dann kann die Wurzel geschrieben werden: $2\pi\bar{n}_0 i$, und wir haben für die beiden Partikularintegrale (39):

(41)
$$\begin{cases} x_1 = e^{-\frac{k}{2m}t} \cdot e^{+i2\pi\bar{n}_0 t}, \\ x_2 = e^{-\frac{k}{2m}t} \cdot e^{-i2\pi\bar{n}_0 t}, \end{cases}$$

oder nach Einführung trigonometrischer Funktionen:

(42)
$$\begin{cases} x_1 = e^{-\frac{k}{2m}t}\{\cos 2\pi\bar{n}_0 t + i\sin 2\pi\bar{n}_0 t\}, \\ x_2 = e^{-\frac{k}{2m}t}\{\cos 2\pi\bar{n}_0 t - i\sin 2\pi\bar{n}_0 t\}. \end{cases}$$

Nach dem früher über die Bedeutung komplexer Integrale Gesagten schließen wir, daß sowohl der reelle als auch der imaginäre Teil der Lösungen (41) für sich eine Lösung darstellt; bezeichnen wir die so erhaltenen Werte wieder durch x_1 und x_2, so ist endlich:

(43)
$$\begin{cases} x_1 = e^{-\frac{k}{2m}t} \cdot \cos 2\pi\bar{n}_0 t, \\ x_2 = e^{-\frac{k}{2m}t} \cdot \sin 2\pi\bar{n}_0 t, \end{cases}$$

aus denen nach Multiplikation mit zwei willkürlichen Konstanten und Addition die allgemeinste Lösung hergeleitet werden kann.

Die Partikularlösungen (43) bestehen aus zwei Faktoren, $e^{-\frac{k}{2m}t}$ und einem Sinus bzw. Kosinus vom Argument $2\pi\bar{n}_0 t$. Letzterer stellt für sich eine rein periodische Bewegung und zwar eine harmonische Schwingung vor, wie wir sie in den vorhergehenden Nummern untersucht haben. Der andere Faktor, den man als Amplitude deuten kann, ist eine Exponentialfunktion mit negativem Exponenten, also eine mit wachsender Zeit abnehmende Größe. Wir können also (43) auffassen als eine Schwingung, deren Amplitude mit der Zeit abnimmt und zwar offenbar in geometrischer Progression, und um so stärker, je größer der Reibungskoeffizient k ist. Dieser Vorgang ist also nicht mehr streng periodisch, sondern nur noch angenähert; man bezeichnet ihn als „quasi-periodisch"; die hier vorliegenden Schwingungen werden als „gedämpfte" bezeichnet im Gegensatz zu den bisher betrachteten „ungedämpften". Fig. 87 veranschaulicht den Ablauf der Schwingungen.

Für die Schwingungszahl $\bar{n}_0$ und die reziproke Schwingungsdauer $\frac{1}{\bar{T}_0}$ der gedämpften Schwingung folgt aus (40):

$$\bar{n}_0 = \frac{1}{\bar{T}_0} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{a^2}{m} - \frac{k^2}{4m^2}}. \tag{44}$$

Vergleichen wir diesen Wert mit der Schwingungszahl n_0 und der Schwingungsdauer T_0 der ungedämpften Schwingung nach (10), so erkennt man, daß stets:

$$\bar{n}_0 < n_0\,, \qquad \bar{T}_0 > T_0 \quad \text{ist.} \tag{45}$$

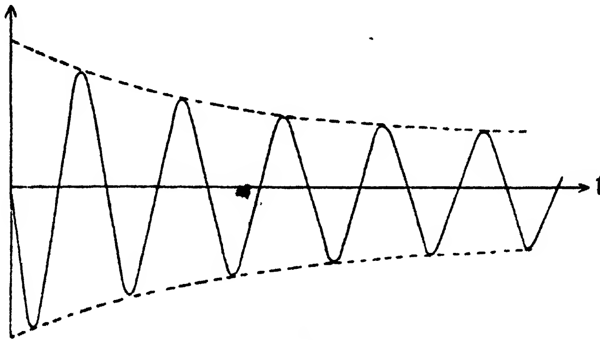


Fig. 37.

Die Dämpfung verlangsamt also die Schwingung. Ist die Reibungskonstante k sehr klein, so daß man in (44) $\frac{k^2}{4m^2}$ gegen $\frac{a^2}{m}$ vernachlässigen darf, so ist angenähert:

$$\bar{n}_0 \cong n_0\,, \qquad \bar{T}_0 \cong T_0\,.$$

d. h. für sehr kleine Dämpfung bleiben Schwingungszahl und Schwingungsdauer ungeändert. Es ist aber zu beachten, daß das nie für die Amplituden gilt; diese nehmen bei noch so kleiner Dämpfung stets ab, und das macht sich bei genügend langer Beobachtungsdauer stets geltend. Theoretisch erstirbt eine gedämpfte Schwingung (43) erst nach unendlich langer Zeit. Dies ist jedoch in natura nicht der Fall. Vielmehr wird jede Schwingung schon nach endlicher Zeit zum Stillstand gebracht. Diese Diskrepanz zwischen Theorie und Beobachtung liegt daran, daß die sogenannte Reibungskonstante keine wirkliche Konstante, sondern eine Funktion der Geschwindigkeit ist, die für sehr kleine Geschwindigkeiten größer wird und schließlich sich einem Grenzwert annähert. Ist die Schwingung soweit abgeklungen, daß die Geschwindigkeit unter einen gewissen Minimalwert herabgesunken ist, so wird streng genommen die Bewegung nicht mehr durch (43) dargestellt, sondern die Amplitude nimmt dann rascher ab. Das eigentümliche Verhalten des Reibungs-

koeffizienten k ist durch folgende Figur dargestellt (Fig. 38); darin sind als Abszissen die Geschwindigkeiten, als Ordinaten die Werte k aufgetragen.

Oberhalb der Geschwindigkeit c_0 ist k praktisch konstant, unterhalb nimmt es sehr schnell zu. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf die Behandlung der Fälle, wo k als konstant angesehen werden darf.

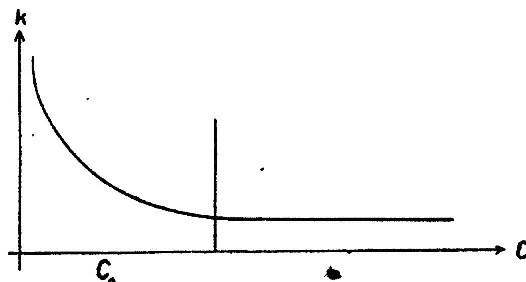


Fig. 38.

Die Beobachtung des Schwingungsablaufs gestattet, die Dämpfung experimentell zu bestimmen. Denn wenn man die aufeinanderfolgenden Umkehrpunkte der Schwingung, die ja um $\frac{\bar{T}_0}{2}$ auseinander liegt, beobachtet, so hat man für die entsprechenden Amplituden:

$$(46)\quad \begin{cases} x_t = e^{-\frac{k}{2m}t} \cos 2\pi \bar{n}_0 t, \\ x_{t+\frac{\bar{T}_0}{2}} = e^{-\frac{k}{2m}\left(t+\frac{\bar{T}_0}{2}\right)} \cos 2\pi \bar{n}_0 \left(t+\frac{\bar{T}_0}{2}\right) = -e^{-\frac{k}{2m}\left(t+\frac{\bar{T}_0}{2}\right)} \cos 2\pi \bar{n}_0 t, \\ x_{t+\bar{T}_0} = e^{-\frac{k}{2m}(t+\bar{T}_0)} \cos 2\pi \bar{n}_0 (t+\bar{T}_0) = +e^{-\frac{k}{2m}(t+\bar{T}_0)} \cos 2\pi \bar{n}_0 t. \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

Das Verhältnis zweier aufeinanderfolgender Amplituden ist also absolut genommen nach (46):

$$\left| \frac{x_{t+n\frac{\bar{T}_0}{2}}}{x_{t+(n+1)\frac{\bar{T}_0}{2}}} \right| = \frac{e^{-\frac{k}{2m}\left(t+n\frac{\bar{T}_0}{2}\right)}}{e^{-\frac{k}{2m}\left(t+(n+1)\frac{\bar{T}_0}{2}\right)}} = e^{\frac{k\bar{T}_0}{4m}}.$$

Nennen wir die Amplituden jetzt einfacher $x_{\mathrm{I}}, x_{\mathrm{II}}, x_{\mathrm{III}} \dots x_N$, so ist nach der letzten Gleichung:

$$(47)\qquad \left|\frac{x_{\mathrm{I}}}{x_{\mathrm{II}}}\right| = \left|\frac{x_{\mathrm{II}}}{x_{\mathrm{III}}}\right| = \left|\frac{x_{\mathrm{III}}}{x_{\mathrm{IV}}}\right| = \left|\frac{x_N}{x_{N+1}}\right| = e^{\frac{k\bar{T}_0}{4m}},$$

d. h. das absolut genommene Verhältnis zweier aufeinanderfolgender

Amplituden ist eine Konstante der betreffenden Schwingung. Die Form derselben legt es nahe, die Logarithmen zu bilden; man hat dann:

(48) $$\lg|x_{\mathrm{I}}| - \lg|x_{\mathrm{II}}| = \ldots \lg|x_N| - \lg|x_{N+1}| = \frac{k\overline{T}_0}{4m}.$$

Man nennt diese Größe das „logarithmische Dekrement" der Schwingung; da die Größen x_{I}, x_{II} ... leicht beobachtet werden können, so ist die Bestimmung des logarithmischen Dekrementes großer Genauigkeit fähig; die Masse m wird auf der Wage, die Schwingungsdauer $\overline{T}_0$ mit der Uhr bestimmt; so erhält man schließlich die Reibungskonstante k.

36. Aperiodische Bewegungen.

Wir betrachten jetzt den Fall, daß der Ausdruck unter der Wurzel in (39)

$$\frac{k^2}{4m^2} - \frac{a^2}{m} > 0$$

ist. Setzen wir zur Abkürzung:

$$-\frac{k}{2m} + \sqrt{\frac{k^2}{4m^2} - \frac{a^2}{m}} = -\beta_1,$$
$$-\frac{k}{2m} - \sqrt{\frac{k^2}{4m^2} - \frac{a^2}{m}} = -\beta_2,$$

so haben wir statt (39):

(49) $$\begin{cases} x_1 = e^{-\beta_1 t}, \\ x_2 = e^{-\beta_2 t}, \end{cases}$$

und das allgemeine Integral wird mit zwei Konstanten A und B:

(50) $$x = A e^{-\beta_1 t} + B e^{-\beta_2 t}.$$

Zur Zeit $t = 0$ sei etwa $x = x_0$, $\frac{dx}{dt} = u_0$. Das liefert zur Bestimmung der Konstanten A, B:

(51) $$\begin{cases} x_0 = A + B, \\ u_0 = -A\beta_1 - B\beta_2, \end{cases}$$

und daraus folgt:

(52) $$\begin{cases} A = \frac{u_0 + x_0\beta_2}{\beta_2 - \beta_1}, \\ B = -\frac{u_0 + x_0\beta_1}{\beta_2 - \beta_1}. \end{cases}$$

Das allgemeine Integral stellt sich als die Summe zweier mit der Zeit abnehmender Exponentialfunktionen dar; dabei ist zu beachten, daß

$$0 < \beta_1 < \beta_2$$

ist. Die Exponentialfunktion mit β_2 nimmt also rascher ab, als die mit β_1.

Trägt man die Kurven $A e^{-\beta_1 t}$ und $B e^{-\beta_2 t}$ unter Berücksichtigung der Gleichung (52) auf, so erhält man zwei verschiedene Fälle, je nachdem $|A| > |B|$ oder $|A| < |B|$. Wir wollen zunächst annehmen:

$$A > 0, \quad B < 0, \quad |A| > |B|,$$

d. h. die positive Anfangsamplitude der Exponentialfunktion, die langsamer abnimmt, sei absolut genommen größer, als die absolut genommene Anfangsamplitude der rascher abnehmenden Exponentialfunktion, die selbst negativ sei. Dem entspricht die Zeichnung der Fig. 39, in der die gestrichelten Linien die beiden Funktionen, die ausgezogene ihre algebraische Summe bedeutet.

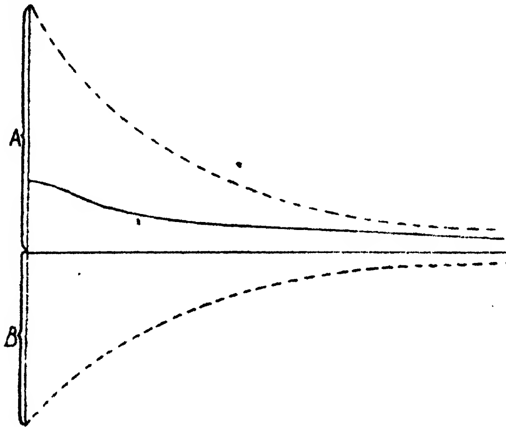


Fig. 39.

In diesem Falle nähert sich der Massenpunkt allmählich der Ruhelage, ohne sie jemals zu überschreiten, woher der Name aperiodische Bewegung herrührt.

Ein zweiter Fall:

$$A > 0, \quad B < 0, \quad |A| < |B|$$

liefert das Bild der Fig. 40.

In diesem Falle findet eine einmalige Überschreitung der Ruhelage und dann asymptotische Annäherung an dieselbe statt. Diese Bewegung ist also wesentlich auch aperiodisch. Die übrigen Fälle liefern nichts wesentlich Neues.

Ein Spezialfall der aperiodischen Bewegung ist der, wenn der Wurzelausdruck

$$\frac{a^2}{m} - \frac{k^2}{4m^2} = 0$$

ist. Dann fallen nämlich die beiden Integrale (49) zusammen in das eine:

(53) $$x_1 = e^{-\frac{k}{2m}t}$$

In diesem Falle muß man noch ein zweites Integral der Differentialgleichung (35) suchen. Das kann in folgender allgemein möglichen Weise geschehen. Wir setzen, wenn x_1 die Lösung (53) und z eine neue Variable bedeutet:

(54) $$x = x_1 . z$$

und wollen diesen Wert in unsere Differentialgleichung

$$m \frac{d^2 x}{d t^2} + k \frac{d x}{d t} + a^2 x = 0$$

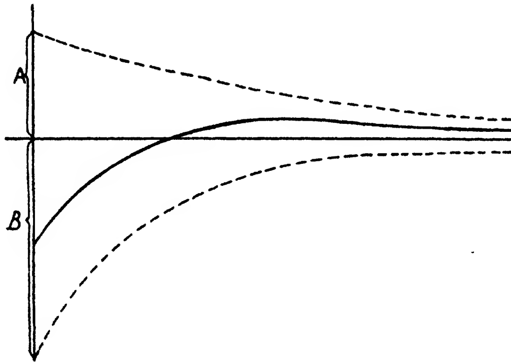


Fig. 40.

eintragen. Wir erhalten aus (54) der Reihe nach:

$$\frac{d x}{d t} = \frac{d x_1}{d t} z + x_1 \frac{d z}{d t},$$

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = \frac{d^2 x_1}{d t^2} z + 2 \frac{d x_1}{d t} \frac{d z}{d t} + x_1 \frac{d^2 z}{d t^2};$$

also durch Einsetzen:

$$m \left\{\frac{d^2 x_1}{d t^2} z + 2 \frac{d x_1}{d t} \frac{d z}{d t} + x_1 \frac{d^2 z}{d t}\right\} + k \left\{\frac{d x_1}{d t} z + x_1 \frac{d z}{d t}\right\} + a^2 x_1 z = 0.$$

Diese Gleichung kann geschrieben werden:

$$z \left\{m \frac{d^2 x_1}{d t^2} + k \frac{d x_1}{d t} + a^2 x_1\right\} + \frac{d z}{d t} \left\{2 m \frac{d x_1}{d t} + k x_1\right\} + \frac{d^2 z}{d t^2} \{m x_1\} = 0.$$

Da aber x_1 eine Lösung der Differentialgleichung ist, so ist der Koeffizient von z identisch gleich Null, also reduziert sich die letzte Gleichung auf die folgende:

$$\frac{d z}{d t} \left\{2 m \frac{d x_1}{d t} + k x_1\right\} + \frac{d^2 x}{d t^2} m x_1 = 0.$$

Nun ist aber, wie durch Differentiation von (53) sofort folgt:

$$\frac{d x_1}{d t} = - \frac{k}{2m} x_1,$$

also wird die letzte Gleichung:

$$\left\{-\frac{2mk}{2m}x_1 + kx_1\right\}\frac{dz}{dt} = m\,x_1\frac{d^2z}{dt^2} = 0,$$

oder, da das erste Glied fortfällt, einfach:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = 0,$$

was die partikulare Lösung ergibt:

$$z = t.$$

Nehmen wir diesen Wert z und setzen ihn in unseren Ansatz (54) ein, so erhalten wir einen Wert für x, der unserer Differentialgleichung (35) genügt, d. h. ein zweites Integral derselben. Wir haben so:

(55) $$x_2 = x_1 z = t \cdot e^{-\frac{k}{2m}t},$$

aus dem man nun durch Kombination mit (53) das allgemeine Integral herstellen kann:

(56) $$x = A\,e^{-\frac{k}{2m}t} + B \cdot t \cdot e^{-\frac{k}{2m}t}.$$

Während das erste Glied wieder eine gewöhnliche Exponentialfunktion darstellt, tritt im zweiten Gliede noch der Faktor t auf. Für sehr große Werte von t jedoch wird diese Funktion auch beliebig klein, da $e^{-\frac{k}{2m}t}$ schneller zu Null abnimmt, als t ansteigt. Der Charakter der Bewegung ist daher nicht wesentlich verändert.

37. Erzwungene Schwingungen ohne Berücksichtigung der Dämpfung.

Die bisher untersuchten Schwingungen können durch das Beiwort „freie" charakterisiert werden, da sie — einmal von außen angeregt — nur unter dem Einfluß der elastischen Kraft vor sich gehen. Im Gegensatz dazu untersuchen wir jetzt den Fall, daß eine äußere gegebene Kraft zu den elastischen Kräften hinzutritt und den Ablauf der Schwingungen beeinflußt. Da der normale Ablauf der Schwingungen durch die äußere Kraft $f(t)$ gestört wird, so nennt man diese Kraft auch „Störungskraft" und die Schwingungen selbst „erzwungene" Schwingungen. Wenn wir den Einfluß der Dämpfung zunächst unberücksichtigt lassen, so liefert das d'Alembertsche Prinzip bei Beschränkung auf die Bewegung des Punktes längs der x-Achse die folgende Bewegungsgleichung:

$$-m\frac{d^2x}{dt^2} - a^2x + f(t) = 0,$$

oder auch:

(57) $$m\frac{d^2x}{dt^2} + a^2x = f(t).$$

Wir müssen zunächst einige Eigenschaften der Gleichung (57) feststellen, die zwar linear ist und konstante Koeffizienten besitzt, aber nicht mehr die Eigenschaft der Homogenität hat, da ein von x und seinen Ableitungen freies Glied, $f(t)$, auftritt. (57) ist also eine „inhomogene“ Differentialgleichung.

Wir wollen nun annehmen, zwei Lösungen dieser Gleichung seien gefunden, etwa x_1 und x_2. Dann gilt identisch:

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2}+a^2x_1\equiv f(t),$$

$$m\frac{d^2x_2}{dt^2}+a^2x_2\equiv f(t);$$

lurch Subtraktion folgt;

$$m\frac{d^2}{dt^2}(x_1-x_2)+a^2(x_1-x_2)\equiv 0, \tag{58}$$

l. h. aber: Die Differenz zweier Lösungen der inhomogenen Gleichung ist keine Lösung derselben mehr, wohl aber ine solche der homogenen Gleichung (die man erhält, wenn nan $f(t)=0$ setzt). Nennen wir die Differenz x_1-x_2 etwa η, so können vir x_1 schreiben:

$$x_1=x_2+\eta\,, \tag{59}$$

nd das heißt: Wenn man zu einem Integral x_2 der inhomoenen Gleichung ein Integral η der homogenen Gleichung inzufügt, so ist die Summe ebenfalls ein Integral (x_1) der ıhomogenen Differentialgleichung. Die Bedeutung dieses Satzes t die folgende: Um das allgemeine Integral von (57) zu finden, welches zwei disponible Konstanten haben muß, genügt es, nach dem obigen heorem, ein beliebiges partikuläres Integral der inhomoenen Gleichung aufzusuchen. Ist dieses gefunden, so adieren wir dazu einfach das uns bekannte, mit zwei dispoiblen Konstanten versehene Integral der homogenen Gleihung. Da die Summe nach dem obigen Satze wieder ein Integral der ihomogenen Gleichung ist und außerdem zwei disponible Konstanten esitzt, so ist sie das allgemeine Integral der inhomogenen Gleichung.

Ein weiterer wichtiger Satz ist der folgende: Es seien zwei verhiedene inhomogene Differentialgleichungen gegeben, die sich nur ırch ihre Störungsglieder $f_1(t)$ bzw. $f_2(t)$ unterscheiden, und je eine ösung x_1 und x_2 derselben, so daß wir die folgenden identisch beehenden Gleichungen haben:

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x_1}{dt^2}+a^2x_1\equiv f_1(t),\\ m\dfrac{d^2x_2}{dt^2}+a^2x_2\equiv f_2(t).\end{cases}$$

...ren wir diese Gleichungen, so folgt:

(61) $$m\frac{d^2}{dt^2}(x_1 + x_2) + a^2(x_1 + x_2) = f_1(t) + f_2(t),$$

d. h. die Summe $x_1 + x_2$ ist eine Lösung derjenigen inhomogenen Gleichung, die statt des Störungsgliedes $f_1(t)$ oder $f_2(t)$ die Summe $f_1(t) + f_2(t)$ enthält. Die Bedeutung dieses Satzes wird klar, wenn man ihn umdreht. Wir wollen annehmen, $f(t)$ sei gegeben als eine Summe von periodischen Funktionen:

(62) $$f(t) = A_1 \cos 2\pi n_1 t + A_2 \cos 2\pi n_2 t + \ldots = \sum_\nu A_\nu \cos 2\pi n_\nu t,$$

d. h. es sei die Differentialgleichung zu lösen:

(63) $$m\frac{d^2 x}{dt^2} + a^2 x = A_1 \cos 2\pi n_1 t + A_2 \cos 2\pi n_2 t + \ldots$$

Dann können wir setzen:

(64) $$x = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots = \sum_\nu x_\nu,$$

und jedes Glied x_ν der einfacheren Gleichung gehorchen lassen:

$$m\frac{d^2 x_1}{dt^2} + a^2 x_1 = A_1 \cos 2\pi n_1 t,$$

$$m\frac{d^2 x_2}{dt^2} + a^2 x_2 = A_2 \cos 2\pi n_2 t,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$m\frac{d^2 x_\nu}{dt^2} + a^2 x_\nu = A_\nu \cos 2\pi n_\nu t,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Sind diese gelöst, so ergibt die Summe der Integrale

$$x_1 + x_2 + \ldots = \sum_\nu x_\nu,$$

das Integral der ursprünglich vorgelegten Differentialgleichung (64) mit dem komplizierten Störungsglied $f(t)$. Man kann also durch diesen Satz die gestellte Aufgabe vereinfachen, indem man sie auf eine Anzahl gleichartiger Aufgaben mit einfacherem Störungsglied zurückführt. Wir wollen nun annehmen, die Funktion $f(t)$ sei stetig und differentiierbar, sowie nach der Zeit periodisch. Unter dieser Einschränkung ist es stets möglich, nach einem von Fourier bewiesenen Satze $f(t)$ in eine Reihe von Kosinussen und Sinussen zu entwickeln. Es ist unter diesen Voraussetzungen in der folgenden Form darstellbar:

(65) $$\begin{cases} f(t) = A_0 + A_1 \cos 2\pi n_1 t + A_2 \cos 2\pi n_2 t + \ldots \\ \qquad + B_1 \sin 2\pi n_1 t + B_2 \sin 2\pi n_2 t + \ldots \end{cases}$$

Es genügt also, wenn wir die einfachere Gleichung betrachten:

(66) $$m\frac{d^2 x}{dt^2} + a^2 x = A \cos 2\pi n t.$$

Denn auf eine Anzahl solcher Gleichungen läßt sich das ursprüngliche allgemeine Problem stets zurückführen. Die störende Kraft ist in diesem

Falle eine harmonische Schwingung mit der Schwingungszahl n. Um den lästigen Faktor 2π nicht dauernd mitschleppen zu müssen, wollen wir

$$2\pi n = \nu$$

setzen. ν ist die Schwingungszahl in 2π Sek., die sogenannte „Frequenz".

Der größeren Gleichmäßigkeit der Behandlung halber wollen wir schon hier von einem Kunstgriff Gebrauch machen, der nachher bei Berücksichtigung der Dämpfung uns die Untersuchung sehr erleichtern wird: wir wollen nämlich gleichzeitig mit (66) noch die folgende Gleichung betrachten:

(66a) $$m\frac{d^2y}{dt^2} + a^2 y = A \sin 2\pi n t = A \sin \nu t,$$

die sich nur dadurch unterscheidet, daß die störende Kraft um ein Viertel ihrer Periode gegen die von (66) verschoben ist. Gleichung (66a) soll nun mit $i = \sqrt{-1}$ erweitert und zu (66) addiert werden. Dann folgt:

(67) $$m\frac{d^2}{dt^2}(x + iy) + a^2(x + iy) = A(\cos \nu t + i \sin \nu t) = A e^{i\nu t},$$

oder wenn wir für $x + iy$ wieder den Buchstaben x setzen:

(68) $$m\frac{d^2x}{dt^2} + a^2 x = A e^{i\nu t}.$$

Natürlich wird so x komplex werden. Wir haben dann aber nur den reellen Teil abzuspalten, um dann nach dem eben bewiesenen Satze die Lösung der Gleichung (66) zu besitzen. Da (68) linear ist und konstante Koeffizienten besitzt, so werden wir wieder ein Integral in Exponentialform ansetzen. Damit die Exponentialfunktion sich, wie bisher, fortheben kann (worin ja der Vorteil dieses Ansatzes besteht), müssen wir dieselbe Exponentialfunktion $e^{i\nu t}$ nehmen, die die Abhängigkeit der störenden Kraft von der Zeit darstellt; dabei ist also jetzt ν (im Gegensatz zu dem früher unbestimmten Faktor ϱ in $e^{\varrho t}$) ganz bestimmt und nicht mehr willkürlich, denn es ist gleich der Frequenz der erzwingenden Kraft. Um aber größere Beweglichkeit im Ansatz zu haben, wollen wir der Exponentialfunktion $e^{i\nu t}$ noch den unbestimmten Faktor B erteilen, was sich auch sofort als notwendig erweisen wird. Wir setzen also versuchsweise an:

(69) $$x = B e^{i\nu t}$$

und das gibt in (68) eingesetzt, wenn wir die Exponentialfunktion gleich fortheben:

(70) $$B(-m\nu^2 + a^2) = A,$$

oder zur Bestimmung von B:

(71) $$B = \frac{\frac{A}{m}}{\frac{a^2}{m} - \nu^2}.$$

Man erkennt hier, daß die Hinzufügung des unbestimmten Faktors B notwendig war. Denn sonst hätten wir statt (70) die Gleichung erhalten $-m\nu^2 + a^2 = A$, und diese ist gar nicht erfüllbar, da m, a, A feste Werte sind, die natürlich im allgemeinen die Gleichung nicht befriedigen werden.

Mit (71) wird dann unser Integral (69):

$$x = \frac{\frac{A}{m} \cdot e^{i\nu t}}{\frac{a^2}{m} - \nu^2},$$

oder, wenn wir den reellen Teil, wie vorher besprochen, abspalten, den wir auch x nennen:

$$(72) \qquad x = \frac{\frac{A}{m} \cos \nu t}{\frac{a^2}{m} - \nu^2}.$$

Darin ist nach Gleichung (10) $\frac{a^2}{m} = 4\pi^2 n_0^2 = \nu_0^2$, wenn wir durch ν_0 die Frequenz der freien ungedämpften Schwingung bezeichnen. Damit haben wir endlich:

$$(73) \qquad x = \frac{\frac{A}{m} \cos \nu t}{\nu_0^2 - \nu^2}$$

als partikuläres (denn es sind keine disponiblen Konstanten da) Integral der vorgelegten Differentialgleichung (66).

Wir wollen uns zunächst mit diesem partikulären Integral beschäftigen und erst nach Untersuchung seiner Eigenschaften das allgemeine Integral bilden.

Man erkennt aus (73) zunächst, daß die erzwungene Schwingung (x) dieselbe Frequenz hat, wie die erzwingende Kraft $A \cos \nu t$. Das ist natürlich kein neues Resultat, sondern war durch unseren Ansatz direkt gefordert; aber die Rechnung zeigt, und das ist der Fortschritt gegen den bloßen Ansatz, daß dieser Ansatz in der Tat bei geeigneter Bestimmung der Konstanten B eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung (66) darstellt. Wir können also sagen: Es ist die Wirkung der Störungskraft, die „freie" Frequenz ν_0 in ν abzuändern. Die Amplitude von x ist $\frac{A/m}{\nu_0^2 - \nu^2}$, also um so größer, je näher ν an ν_0 liegt. Für $\nu = \nu_0$ würde die Amplitude unendlich groß sein. In diesem Falle sagt man: Das schwingende System ist auf die störende Kraft „abgestimmt" oder steht in „Resonanz" mit derselben. Natürlich können die Amplituden in natura nie unendlich werden. Die Abweichung der Theorie rührt daher, daß der Einfluß der Dämpfung, den wir bisher nicht berücksichtigt haben, im Falle der Resonanz unter keinen Umständen vernachlässigt werden darf. Deshalb wird später unsere Untersuchung in dieser Richtung zu vervollständigen

sein. Fig. 41 stellt die Amplitude der erzwungenen Schwingung als Funktion von ν dar.

Nun wollen wir das allgemeine Integral herstellen; dazu addieren wir nur das allgemeine Integral der homogenen Gleichung

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+a^2x=0,$$

das nach Gleichung (14) den Wert hat:

$$C\cos\frac{a}{\sqrt{m}}t+D\sin\frac{a}{\sqrt{m}}t=C\cos\nu_0 t+D\sin\nu_0 t,$$

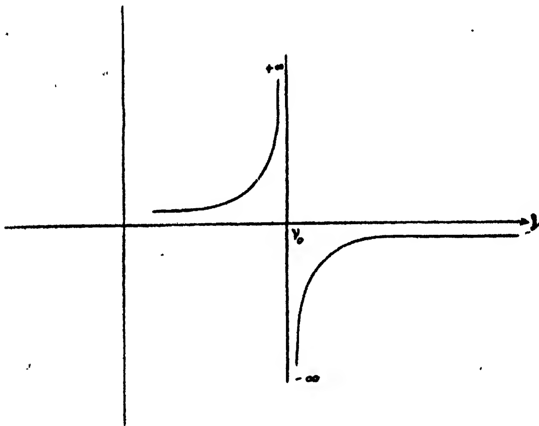


Fig. 41.

wo C und D zwei willkürliche Konstanten sind. Also wird:

$$x=\frac{\frac{A}{m}}{\nu_0^2-\nu^2}\cos\nu t+C\cos\nu_0 t+D\sin\nu_0 t. \tag{74}$$

Wir müssen nun die Anpassung des allgemeinen Integrals an einen willkürlich gegebenen Anfangszustand vornehmen; es sei etwa möglichst einfach:

$$\text{für}\quad t=0\begin{cases}x=0,\\ \dfrac{dx}{dt}=0,\end{cases}$$

das liefert die Bedingungen:

$$\frac{\frac{A}{m}}{\nu_0^2-\nu^2}+C=0,\quad D=0, \tag{75}$$

und das in Gl. (74) eingesetzt das Resultat:

$$(76) \qquad x = \frac{\frac{A}{m}}{\nu_0^2 - \nu^2}\{\cos \nu t - \cos \nu_0 t\}.$$

Wir wollen nun den speziellen Fall betrachten, daß ν von ν_0 nur wenig abweicht, so daß $\nu_0 - \nu$ eine kleine Zahl $= 2\delta$ ist. Wenden wir nun das Additionstheorem des Kosinus an, so ist:

$$\cos \nu t - \cos \nu_0 t = 2 \sin \frac{\nu + \nu_0}{2} t \cdot \sin \frac{\nu_0 - \nu}{2} t,$$

und dafür kann man nach der vorhergehenden Betrachtung setzen:

$$\cos \nu t - \cos \nu_0 t = 2 \sin \delta t \cdot \sin \frac{\nu + \nu_0}{2} t.$$

Also wird (76) unter diesen Umständen:

$$(77) \qquad x = \left\{\frac{2\frac{A}{m}}{\nu_0^2 - \nu^2} \sin \delta t\right\} \sin \frac{\nu + \nu_0}{2} t.$$

Diese Gleichung läßt sich folgendermaßen interpretieren: Wir können (77) auffassen als eine harmonische Schwingung $\sin \frac{\nu + \nu_0}{2} t$ mit

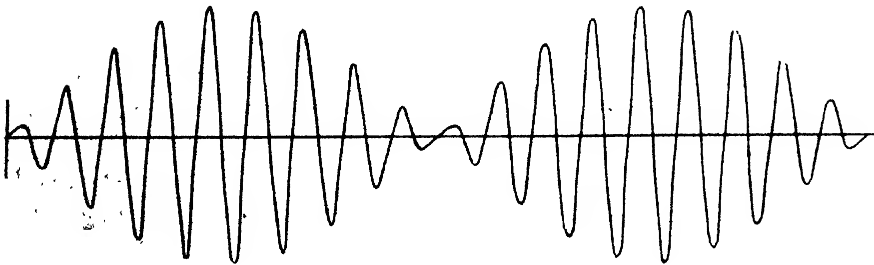


Fig. 42.

der variablen Amplitude $\frac{2A \sin \delta t}{m(\nu_0^2 - \nu^2)}$; die Möglichkeit dieser Deutung beruht darauf, daß $\sin \delta t$ sehr langsam veränderlich gegen $\sin \frac{\nu + \nu_0}{2} t$ ist. Denn das ist der Sinn unserer Voraussetzung, daß $\nu_0 - \nu$ eine sehr kleine Zahl ist. Für $t = 0$ ist die Amplitude von $\sin \frac{\nu + \nu_0}{2} t$ gleich Null, um langsam zuzunehmen, bis $\sin \delta t$ gleich 1 geworden ist. Dann nimmt die Amplitude zu Null ab, sinkt weiter bis zum Betrage -1, wird wieder Null, dann wieder $+1$ usw. Obige Fig. 42 stellt die Schwingung (77) graphisch dar.

Da das Ohr eine Schwingung als Ton vernimmt, so hört man in diesem Falle ein abwechselndes Stärker- und Schwächerwerden des Tones, und zwar offenbar $\frac{\delta}{2\pi}$ mal in der Sekunde. Diese Erscheinung ist in der Akustik als „**Schwebung**" bekannt; sie tritt erst auf, wenn ν nahe ν_0 ist, d. h. unmittelbar in der Nähe der Resonanz. Sie ist eines der schärfsten Mittel, um geringe Tonunterschiede festzustellen.

Gehen wir jetzt direkt zur Resonanz über ($\nu = \nu_0$), so kann man zeigen, daß das dem vorgeschriebenen Anfangszustande angepaßte allgemeine Integral (76) für alle endlichen Zeiten endlich bleibt, obwohl wir doch vorhin gesehen haben, daß das partikuläre Integral (73) dann unendlich wird. Man kann nämlich schreiben:

$$x = \frac{A}{m} \cdot \frac{\cos \nu t - \cos \nu_0 t}{\nu_0^2 - \nu^2} = \left\{\frac{A}{m} \frac{0}{0}\right\}_{\text{für } \nu = \nu_0}$$

d. h. wir haben die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$. Diese bestimmt man, indem man Zähler und Nenner nach ν differentiiert und dann $\nu = \nu_0$ setzt. So folgt:

$$x = \frac{\frac{A}{m}}{2\nu_0} t \cdot \sin \nu_0 t, \tag{78}$$

und das ist eine Schwingung von der Frequenz ν_0, deren Amplitude, $\frac{A t}{2 m \nu_0}$, proportional der Zeit t ist, also in arithmetischer Reihe zunimmt, wie es die Fig. 43 zeigt.

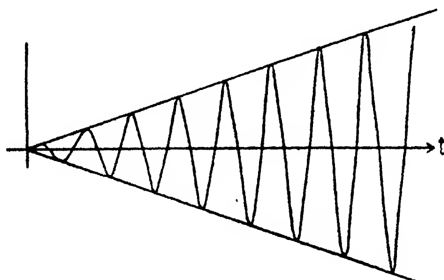


Fig. 43.

Erst für $t = 0$ wird die Amplitude unendlich groß, und dann ist die Lösung unbrauchbar. Dieser Vorgang ist leicht verständlich. Wenn im Moment $t = 0$ die störende Kraft zu wirken anfängt, so beginnt der Massenpunkt „anzuschwingen", wobei er immer mehr Energie von der äußeren Kraft aufnimmt, und so steigert er allmählich seine Amplitude und seine eigene Energie. Unendlich große Amplitude entspricht unendlich großer Energie des Massenpunktes, und eine solche kann von einer endlichen äußeren Kraft erst in unendlich großer Zeit aufgenommen

werden. Man kann dies Anschwingen auch als den Grenzfall der Schwebungen auffassen, da für $\nu = \nu_0$ die Schwebungsdauer unendlich lang sein muß. In der Tat kann man aus Gleichung (77) sofort die letzte Gleichung (78) erhalten. Denn man kann setzen:

$$\nu_0^2 - \nu^2 = (\nu_0 + \nu)(\nu_0 - \nu) = 4\nu_0\,\delta\,;$$

also ist nach (77):

$$(x)_{\delta=0} = \lim_{\delta=0}\left\{\frac{A}{2m\nu_0}\,\frac{\sin\delta t}{\delta}\cdot\sin\frac{\nu+\nu_0}{2}t\right\} = \frac{\frac{A}{m}}{2\nu_0}\cdot t\cdot\sin\nu_0 t,$$

da

$$\lim_{\delta=0}\frac{\sin\delta t}{\delta t} = 1,$$

also

$$\lim_{\delta=0}\frac{\sin\delta t}{\delta} = t$$

ist.

Diese letzte Formel stimmt also wirklich mit (78) überein. Natürlich haben diese Entwickelungen insofern nur mathematische und keine physikalische Bedeutung, als unser einfacher Ansatz, daß die Kraft proportional der Elongation aus der Ruhelage ist, nur für kleine Amplituden gilt. Für große Amplituden können daher die aus den Gleichungen gezogenen Folgerungen nur annähernd zutreffen.

Wir wollen jetzt noch die Lösung eines etwas komplizierteren Problems geben, wenn nämlich die äußere Kraft aus zwei harmonischen Schwingungen von der Frequenz ν_1 und ν_2 besteht. Dann lautet die Differentialgleichung nach (57):

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + a^2 x = A\cos\nu_1 t + B\cos\nu_2 t. \tag{79}$$

Wie diese gelöst wird, haben wir im Vorhergehenden ausführlich besprochen; deshalb genügt es hier, das allgemeine Integral hinzuschreiben (C und D sind disponible Konstanten):

$$x = C\cos\nu_0 t + D\sin\nu_0 t + \frac{\frac{A}{m}}{\nu_0^2-\nu_1^2}\cos\nu_1 t + \frac{\frac{B}{m}}{\nu_0^2-\nu_2^2}\cos\nu_2 t. \tag{80}$$

Dieses Resultat ließe sich natürlich ohne Schwierigkeit verallgemeinern; man erkennt aus (80) das wichtige Ergebnis, daß in der resultierenden Schwingung x nur die Eigenfrequenz ν_0 sowie die Frequenzen ν_1 und ν_2 der störenden Kraft auftreten, daß aber **keine neuen Frequenzen** sich gebildet haben; ferner sind die Amplituden der Schwingungen mit den Frequenzen ν_1 und ν_2 genau **die nämlichen, wie sie auch sein würden, wenn die andere Schwingung gar nicht da wäre.** Denn z. B. ist der Koeffizient von $\cos\nu_1 t$ in (80) genau der nämliche wie in (73); das hinzugefügte Störungsglied $B\cos\nu_2 t$ hat also diese Schwingung nicht im mindesten beeinflußt; sie fügt vielmehr nur

ein neues Glied hinzu, ohne die schon vorhandenen zu ändern. Dieses einfache Resultat beruht, wie wir schon vorher gesehen haben, auf der aus der Linearität der Gleichung folgenden Eigenschaft, daß man die Lösung mit kompliziertem Störungsglied $f(t)$ durch Superposition der Lösung von Gleichungen mit je einem einfachen Störungsglied von der Form $A_\lambda \cos \nu_\lambda t$ erhalten kann. Man nennt diese Erscheinung daher auch das „Gesetz von der ungestörten Superposition" der Schwingungen. In dem Moment, wo die Differentialgleichung nicht mehr linear ist, hört dieses auf zu gelten.

38. Erzwungene Schwingungen mit Berücksichtigung der Dämpfung.

Unter Einführung einer Reibungskraft $-k\frac{dx}{dt}$ erhalten wir nach dem d'Alembertschen Prinzip statt (57) die allgemeinere Gleichung:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + k\frac{dx}{dt} + a^2x = f(t), \tag{81}$$

oder, bei Beschränkung auf eine harmonische Störungskraft:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + k\frac{dx}{dt} + a^2x = A\cos\nu t, \tag{82}$$

oder endlich, indem wir rechts noch das Störungsglied $iA\sin\nu t$ hinzugefügt denken:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + k\frac{dx}{dt} + a^2x = Ae^{i\nu t}. \tag{83}$$

Um ein partikuläres Integral von (83) zu finden, setzen wir, genau wie vorher, versuchsweise an:

$$x = Be^{i\nu t}, \tag{84}$$

wo B eine noch unbestimmte Konstante, dagegen ν die fest gegebene Frequenz der erzwungenen Schwingung ist. Das Einsetzen in (83) liefert die Bestimmungsgleichung für B:

$$B(-m\nu^2 + k\nu i + a^2) = A,$$

oder auch:

$$B = \frac{\frac{A}{m}}{\nu_0^2 - \nu^2 + \frac{k\nu}{m}i}, \tag{85}$$

wobei $\sqrt{\frac{a^2}{m}}$ wieder gleich ν_0, der Eigenfrequenz der ungedämpften freien Schwingung, gesetzt ist. Analytisch besteht, wie man durch Vergleich mit der analogen Gleichung (71) erkennt, der Einfluß des Dämpfungsgliedes darin, die Konstante B komplex zu machen. Wir wollen zunächst (85) noch etwas umformen, indem wir $(\nu_0^2 - \nu^2) + \frac{k\nu}{m}i$ in Polarkoordinaten (ϱ, φ) schreiben:

$$(86)\qquad \begin{cases} \nu_0^2 - \nu^2 = \varrho\cos\psi, \\ \dfrac{k\nu}{m} \quad = \varrho\sin\psi. \end{cases}$$

Dann hat man für ϱ und ψ:

$$(87)\qquad \begin{cases} \varrho = +\sqrt{(\nu_0^2 - \nu^2)^2 + \dfrac{k^2\nu^2}{m^2}}, \\ \operatorname{tg}\psi = \dfrac{\dfrac{k\nu}{m}}{\nu_0^2 - \nu^2}. \end{cases}$$

Dann wird der Nenner von (85):

$$\varrho\cos\psi + i\varrho\sin\psi = \varrho e^{i\psi};$$

also kann man schreiben:

$$(88)\qquad B = \frac{A}{m\varrho}\cdot e^{-i\psi},$$

und das liefert endlich durch Einsetzen in (84) für das partikuläre Integral:

$$(89)\qquad x = \frac{A}{m\varrho}\, e^{i(\nu t - \psi)},$$

was durch Abspaltung des reellen Teiles das gesuchte partikuläre Integral unserer Ausgangsgleichung (82) ergibt:

$$(90)\qquad x = \frac{A}{m\varrho}\cos(\nu t - \psi) = \frac{\dfrac{A}{m}\cos(\nu t - \psi)}{\sqrt{(\nu_0^2 - \nu^2)^2 + \dfrac{k^2\nu^2}{m^2}}}.$$

Wir beschäftigen uns zunächst mit den Eigenschaften dieses partikulären Integrals.

Man erkennt aus (90), daß **die erzwungene Schwingung dieselbe Frequenz** ν **hat, wie die störende Kraft, und zweitens, daß sie ungedämpft ist.** Die Wirkung der äußeren Kraft besteht also darin, **einmal die Dämpfung aufzuheben, ein zweites Mal die Eigenfrequenz** ν_0 **in** ν **abzuändern.** Anderseits macht sich die Dämpfung in dem Auftreten einer Phasenverschiebung vom Betrage ψ in der erzwungenen Schwingung gegenüber der erzwingenden bemerkbar. Denn nach (87) ist $\operatorname{tang}\psi$ proportional dem Reibungskoeffizienten k. Man kann den obigen Sachverhalt unmittelbar erkennen durch eine passende Umformung der äußeren Kraft, wobei wir von der Existenz des partikulären Integrals (90) Gebrauch machen. Man kann nämlich schreiben:

$$A\cos\nu t = A\cos\{(\nu t - \psi) + \psi\} = A\cos(\nu t - \psi)\cos\psi - A\sin(\nu t - \psi)\cdot\sin\psi.$$

Nun ist nach (90):

$$A\cos(\nu t - \psi) = m\varrho x,$$

und durch Differentiation nach t:

$$-A\sin(\nu t-\psi)=\frac{m\varrho}{\nu}\frac{dx}{dt};$$

also kann schließlich die äußere Kraft $A\cos\nu t$ in die Form gebracht werden:

$$A\cos\nu t=m\varrho\,x\cdot\cos\psi+\frac{m\varrho}{\nu}\frac{dx}{dt}\sin\psi.$$

Endlich ist nach (86)

(91) $$A\cos\nu t\equiv m(\nu_0^2-\nu^2)x+k\frac{dx}{dt}.$$

Die äußere Kraft ist demnach zerlegt in einen Bestandteil, der proportional dem Abstand x von der Ruhelage ist, also nach Art einer elastischen Kraft wirkt, und in einen Summanden proportional der Geschwindigkeit, also von der Art einer Reibungskraft, aber anderem Vorzeichen. Betrachten wir nun die Gleichung (81), in der die „Kräftebilanz“ aufgestellt ist, so nimmt diese unter Einführung von (91) folgende Gestalt an:

(92) $$m\frac{d^2x}{dt^2}+k\frac{dx}{dt}+a^2x=m\nu_0^2x-m\nu^2x+k\frac{dx}{dt}.$$

Man sieht zunächst, wie durch den zweiten Summanden der Störungskraft das Reibungsglied gerade aufgehoben wird; ferner wird, wenn man berücksichtigt, daß $\nu_0^2=\frac{a^2}{m}$ ist, die ursprüngliche elastische Kraft $-a^2x$ kompensiert durch $-m\nu_0^2x$, und es bleibt als elastische Kraft nur übrig: $-m\nu^2x$, welches Glied eben die Frequenz ν (an Stelle von ν_0) ergibt. Damit ist die Wirkung der äußeren Kraft vollkommen klargestellt.

Die Größe der Amplitude der erzwungenen Schwingung hängt wesentlich — ähnlich wie ohne Dämpfung — von der Differenz der Frequenzen ν und ν_0 ab; Gleichung (90) zeigt, daß im allgemeinen, je geringer diese Differenz ist, um so größer die Amplitude des Mitschwingens wird. Doch tritt wegen des Zusatzgliedes $\frac{k^2\nu^2}{m^2}$ einerseits niemals — im Gegensatz zu früher — ein unendlicher Wert der Amplitude ein und darin besteht eben die Wirkung der Dämpfungskraft; anderseits bewirkt dieses Zusatzglied, daß das Maximum der Amplitude nicht genau dann eintritt, wenn $\nu=\nu_0$ ist, weil das Zusatzglied selbst Funktion von ν ist. Doch sind die Abweichungen im allgemeinen gering. Das Maximum der Amplitude tritt offenbar ein, wenn

$$\varrho=\sqrt{(\nu_0^2-\nu^2)^2+\frac{k^2\nu^2}{m^2}}$$

ein Minimum ist. Differentiieren wir ϱ nach ν und setzen den Differentialquotienten gleich Null zur Bestimmung des Maximums, so folgt:

$$\frac{d\varrho}{d\nu} = \frac{-2(\nu_0^2 - \nu^2)\nu + \frac{k^2\nu}{m^2}}{\sqrt{(\nu_0^2 - \nu^2)^2 + \frac{k^2\nu^2}{m^2}}} = 0;$$

also ist:

(93)
$$\nu^2_{\text{max.}} = \nu_0^2 - \frac{k^2}{2m^2}.$$

Daraus folgt, daß die Maximalamplitude auftritt für eine Schwingungszahl $\nu_{\text{max.}}$, die etwas kleiner ist als ν_0. Bei kleinen Werten von k ist der Unterschied unmerklich. Es wäre aber unrichtig, nun zu schließen, daß für denselben Wert $\nu_{\text{max.}}$ auch die Energie des Mitschwingens ein Maximum wäre. Denn für die kinetische Energie L findet man nach (90) den Ausdruck:

(94)
$$L = \frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{\nu^2 A^2 \sin^2(\nu t - \psi)}{2m\left\{(\nu_0^2 - \nu^2)^2 + \frac{k^2\nu^2}{m^2}\right\}},$$

welcher bei gegebenem ν sein Maximum hat, wenn der Sinus gleich ± 1 ist; in diesem Falle ist L gleich der gesamten Energie E des Mitschwingens; also ist

(95)
$$E = \frac{\nu^2 A^2}{2m\left\{(\nu_0^2 - \nu^2)^2 + \frac{k^2\nu^2}{m^2}\right\}};$$

und das Maximum von E fällt im allgemeinen nicht zusammen mit dem Minimum des Nenners, das wir vorhin bilden mußten, weil hier der Zähler noch den Faktor ν^2 enthält. Man findet für das Maximum von E:

$$\frac{dE}{d\nu} = 0,$$

woraus sich für die Frequenz $\bar{\nu}_{\text{max.}}$, bei der maximale Energie des Mitschwingens eintritt, folgt:

(96)
$$\bar{\nu}_{\text{max.}} = \nu_0.$$

Die maximale Intensität des Mitschwingens tritt also exakt dann auf, wenn die Frequenz der erzwingenden Kraft gleich derjenigen der ungedämpften Eigenschwingung ist. Dieser Unterschied im Verhalten der Intensität der Amplitude ist zuerst von Max Wien erkannt worden.

Eine weitere wichtige Frage ist diejenige nach der Abhängigkeit der Amplitude und Energie des Mitschwingens von der Größe des Reibungskoeffizienten k. Betrachten wir zunächst einmal den Fall der Resonanz sowohl für Amplitude als für die Energie. Für die Resonanzamplitude B_r erhalten wir nach (90) und (93):

$$B_r = \frac{A}{k\sqrt{\nu_0^2 - \frac{k^2}{4m^2}}}$$

und für die Resonanzintensität E_r nach (95) und (96):

(98) $$E_r = \frac{m}{2}\,\frac{A^2}{k^2}.$$

Daraus folgt zunächst: Die Höhe des Resonanzmaximums ist in beiden Fällen um so größer, je kleiner die Dämpfung ist, und zwar ist die Resonanzamplitude angenähert umgekehrt proportional der ersten Potenz von k, die Resonanzintensität streng umgekehrt proportional der zweiten Potenz von k. Setzt man in (97) und (98) für einen Moment $k = 0$, so erhält man das schon aus der vorhergehenden Nummer bekannte Resultat, daß dann Resonanzamplitude sowohl als auch Resonanzintensität unendlich werden.

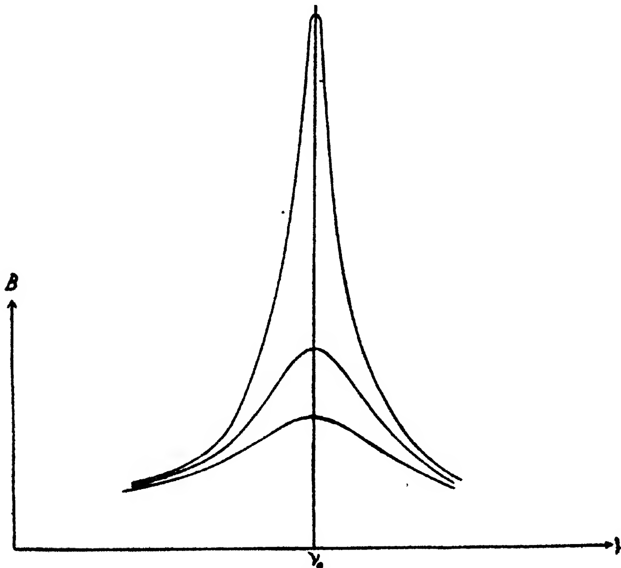


Fig. 44.

Nehmen wir nun aber eine gegebene Differenz zwischen ν und ν_0, sagen wir $\nu^2 - \nu_0{}^2 = \Delta$, an, so schreiben sich Amplitude und Energie der erzwungenen Schwingung als Funktion von k nach (90) und (95) allgemein so:

(99) $$B = \frac{\frac{A}{m}}{\sqrt{\Delta^2 + \frac{\nu^2}{m^2}k^2}}, \quad E = \frac{\nu^2 A^2}{2m\left\{\Delta^2 + \frac{\nu^2}{m^2}k^2\right\}}.$$

Je größer also bei gegebenem Abstande von der Eigenschwingung k ist, desto kleiner die Amplitude der Energie und des Mitschwingens; dies gilt für jeden Wert von Δ, also auch von ν. Man kann also auch sagen:

daß B und E als Funktionen von ν um so kleinere Werte und ein um so flacheres Maximum haben, je größer k ist, oder anders ausgedrückt: Die Erscheinung der Resonanz ist um so ausgesprochener, je kleiner die Reibungskraft ist. Bei kleinen Werten von k kann bei genauer Abstimmung die Amplitude noch immer sehr große Werte erhalten. In Fig. 44 ist B als Funktion von ν für verschiedene Werte k aufgezeichnet.

Nunmehr gehen wir zur Bildung des allgemeinen Integrals über; zu diesem Zwecke addieren wir zu (90) das allgemeine Integral der freien gedämpften Schwingung, das aus den Gleichungen (48) mit Hilfe zweier disponibler Konstanten C und D zusammengesetzt werden kann, und wir erhalten so:

$$x = e^{-\frac{k}{2m}t}\{C\cos\bar{\nu}_0 t + D\sin\bar{\nu}_0 t\} + \frac{A\cos(\nu t - \psi)}{m\varrho}. \tag{100}$$

wenn wir für $2\pi\bar{n}_0$ abkürzend $\bar{\nu}_0$ schreiben.

Setzen wir etwa als Anfangszustand fest:

$$\text{für } t = 0 \begin{cases} x = 0, \\ \dfrac{dx}{dt} = 0, \end{cases} \tag{101}$$

so folgt zur Bestimmung der Konstanten:

$$\begin{cases} 0 = C + \dfrac{A\cos\psi}{m\varrho}, \\ 0 = -\dfrac{k}{2m}C + \bar{\nu}_0 D + \dfrac{A\nu}{m\varrho}\sin\psi. \end{cases} \tag{102}$$

Daraus ergibt sich:

$$\begin{cases} C = -\dfrac{A\cos\psi}{m\varrho}, \\ D = \dfrac{A}{m\varrho\bar{\nu}_0}\left\{-\dfrac{k}{2m}\cos\psi - \nu\sin\psi\right\}. \end{cases} \tag{103}$$

Mit diesen Werten wird aus (100):

$$\begin{cases} x = \dfrac{A}{m\varrho}\Big\{\cos(\nu t - \psi) + e^{-\frac{k}{2m}t}\Big[-\cos\bar{\nu}_0 t\cdot\cos\psi \\ \qquad -\dfrac{\nu}{\bar{\nu}_0}\sin\bar{\nu}_0 t\cdot\sin\psi - \dfrac{k}{2m\bar{\nu}_0}\sin\bar{\nu}_0 t\cdot\cos\psi\Big]\Big\}. \end{cases} \tag{104}$$

Nehmen wir speziell den Fall, daß k sehr klein und $\bar{\nu}_0$ sehr nahe an ν liegt, so ist $\frac{\nu}{\bar{\nu}_0}$ ungefähr gleich 1, das Glied mit dem Faktor $\frac{k}{2m\bar{\nu}_0}$ angenähert zu vernachlässigen, und für eine größere Zahl von Schwingungen ist $e^{-\frac{k}{2m}t}$ von 1 wenig verschieden. Mit diesen Vereinfachungen wird (104):

$$x = \frac{A}{m\varrho}\left[\cos(\nu t - \psi) - e^{-\frac{k}{2m}t}\cos(\bar{\nu}_0 t - \psi)\right], \tag{105}$$

und da endlich, wenn $\bar{\nu}_0 \cong \nu$ ist, ψ nach (87) ungefähr gleich $\pi/2$ ist, so ist noch einfacher:

(106) $$x = \frac{A}{m\varrho}\left[\sin\nu t - e^{-\frac{k}{2m}t}\sin\bar{\nu}_0 t\right].$$

Da für kleine Zeiten, wie wir schon wissen, $e^{-\frac{k}{2m}t}$ nur wenig von 1 abweicht, so haben wir praktisch zu Anfang: $\sin\nu t - \sin\bar{\nu}_0 t$, und das gibt wieder zu Schwebungen Veranlassung, die in dem Maße verklingen, als mit wachsender Zeit der Exponentialfaktor kleiner und kleiner wird. Nach Ablauf hinreichender Zeit sind alle mit demselben behafteten Glieder verschwunden, und es bleibt dann nur noch die erzwungene Schwingung übrig; die den Anschluß an den Anfangszustand vermittelnden Eigenschwingungen sind abgeklungen, der Einfluß des Anfangszustandes auf den Vorgang ist damit erloschen.

Für manche Fälle ist wieder zu beachten, daß der Reibungskoeffizient k keine Konstante ist, sondern unterhalb eines gewissen Minimalwertes der Geschwindigkeit rasch anwächst. Dieses Verhalten bringt gewisse Abweichungen von dem hier untersuchten idealen Falle mit sich.

39. Lineare freie Schwingungen von endlicher Amplitude.

Wir wollen jetzt die Untersuchung der geradlinigen Schwingung eines Massenpunktes, die in Nr. 33 ausgeführt wurde, nach einer anderen Richtung hin ergänzen. Es wurde dort angenommen, daß die Amplitude der Schwingung stets klein war, und deshalb konnte die Kraft gemäß der Gleichung (2) und (3) als lineare Funktion von x betrachtet werden. Dies ist jedoch nicht mehr zutreffend für größere Amplituden, und man muß dann allgemeiner noch die höheren Potenzen berücksichtigen; wir werden jetzt noch das quadratische Glied beibehalten, also statt (3) schreiben, indem wir x_0 sofort gleich 0 setzen:

$$f(x) = f'(0)\cdot x + \tfrac{1}{2}f''(0)\,x^2,$$

oder:

(107) $$f(x) = a^2 x + b x^2.$$

Dann liefert das d'Alembertsche Prinzip die Schwingungsgleichung:

(108) $$m\frac{d^2x}{dt^2} + a^2 x + b x^2 = 0.$$

Der Kraftansatz (107) besagt außer der endlichen Größe der Amplitude auch noch, daß eine Unsymmetrie vorhanden ist. Denn z. B. bei positiven x und b sind beide Glieder des Ausdrucks $a^2 x + b x^2$ positiv, verstärken sich also, während bei negativen x das erste Glied negativ wird, während das zweite positiv bleibt: sie schwächen einander dann. Die Schwingungen sind also unsymmetrisch.

Im allgemeinen sind die Werte von b sehr klein; dies wollen wir von jetzt ab ausdrücklich voraussetzen, und darauf beruht die Methode der

sogenannten „sukzessiven Approximationen", die wir zur Lösung von (108) benutzen werden. Vorweg sei noch bemerkt, daß Gleichung (108) nicht mehr linear ist; daher können wir zwei Integrale derselben nicht mehr durch Addition nach Multiplikation mit beliebigen Konstanten zum allgemeinen Integral zusammensetzen: Das für lineare Gleichungen geltende Gesetz der ungestörten Superposition der Lösungen gilt nicht mehr.

Wir wollen nun die Lösung ansetzen als Potenzreihe, die nach Potenzen der kleinen Größe b fortschreitet:

$$x = \varphi_0 + \varphi_1 b + \varphi_2 b^2 + \varphi_3 b^3 + \cdots, \tag{109}$$

wo natürlich die Größen φ Funktionen von t sein müssen. Ferner wollen wir z. B. als Anfangsbedingungen festsetzen:

$$\text{für } t = 0 \begin{cases} x_0 = c, \\ \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = 0. \end{cases} \tag{110}$$

Nun bilden wir mit (109) die Werte $\frac{d^2 x}{dt^2}$ und x^2. Das liefert:

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d^2 \varphi_0}{dt^2} + \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} b + \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} b^2 + \cdots, \\ x^2 = \varphi_0^2 + 2\varphi_0 \varphi_1 \cdot b + (\varphi_1^2 + 2\varphi_0 \varphi_2) b^2 + \cdots. \end{cases} \tag{111}$$

Setzt man diese Werte in (108) ein, so folgt:

$$m\left\{\frac{d^2\varphi_0}{dt^2} + b\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} + b^2\frac{d^2\varphi_2}{dt^2} + \cdots\right\} + a^2\{\varphi_0 + \varphi_1 b + \varphi_2 b^2 + \cdots\}$$
$$+ b\{\varphi_0^2 + 2\varphi_0\varphi_1 b + (\varphi_1^2 + 2\varphi_0\varphi_2) b^2 + \cdots\} = 0,$$

oder, wenn man nach Potenzen von b ordnet:

$$\begin{cases} \left[m\frac{d^2\varphi_0}{dt^2} + a^2\varphi_0\right] + b\left[m\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} + a^2\varphi_1 + \varphi_0^2\right] \\ \qquad + b^2\left[m\frac{d^2\varphi_2}{dt^2} + a^2\varphi_2 + 2\varphi_0\varphi_1\right] + \cdots = 0. \end{cases} \tag{112}$$

Diese Gleichung kann, für beliebiges b, nur dadurch befriedigt werden, daß die Koeffizienten jeder Potenz von b einzeln verschwinden. Das gibt also folgende Reihe der Gleichungen:

$$\begin{cases} m\frac{d^2\varphi_0}{dt^2} + a^2\varphi_0 = 0, \\ m\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} + a^2\varphi_1 + \varphi_0^2 = 0, \\ m\frac{d^2\varphi_2}{dt^2} + a^2\varphi_2 + 2\varphi_0\varphi_1 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases} \tag{113}$$

Dazu treten wegen der Anfangsbedingungen (110) offenbar noch folgende Gleichungen:

$$(114)\quad \begin{cases} \varphi_0 = c, \quad \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \ldots = 0, \\ \dfrac{d\varphi_0}{dt} = \dfrac{d\varphi_1}{dt} = \dfrac{d\varphi_2}{dt} = \ldots = 0. \end{cases}$$

Die erste Gleichung (113) ist uns nun bereits bekannt. Sie ist identisch mit der Gleichung (5) für einen mit kleiner Amplitude schwingenden Massenpunkt. Das Integral ist also nach (14), wenn wir $\frac{a}{\sqrt{m}} = \nu_0$ setzen:

$$\varphi_0 = A \cos \nu_0 t + B \sin \nu_0 t,$$

und nach der ersten Anfangsbedingung (114) wird daraus:

$$(115)\qquad \varphi_0 = c \cdot \cos \nu_0 t.$$

Mit diesem Werte wird die zweite Gleichung (113):

$$(116)\qquad m \frac{d^2 \varphi_1}{d t^2} + a^2 \varphi_1 = - c^2 \cos^2 \nu_0 t = - \frac{c^2}{2} - \frac{c^2}{2} \cos 2 \nu_0 t.$$

Diese kann man aber vereinfachen, indem man das konstante Glied rechts fortschafft. Das geschieht durch die Substitution:

$$(117)\qquad \varphi_1 = \psi_1 - \frac{c^2}{2a^2}.$$

Dann erhält man für ψ_1 die einfachere Gleichung:

$$(118)\qquad m \frac{d^2 \psi_1}{d t^2} + a^2 \psi_1 = - \frac{c^2}{2} \cos 2 \nu_0 t,$$

und das ist eine Gleichung vom einfachsten Typus der erzwungenen Schwingungen, wie wir sie schon in (66) kennen gelernt haben. Das allgemeine Integral ist also:

$$\psi_1 = C \cos \nu_0 t + D \sin \nu_0 t + \frac{\frac{c^2}{2m}}{3 \nu_0^2} \cos 2 \nu_0 t,$$

und daraus folgt, mit Hilfe der Beziehung (117) für φ_1:

$$\varphi_1 = \frac{c^2}{2a^2} + C \cos \nu_0 t + D \sin \nu_0 t + \frac{c^2}{6 m \nu_0^2} \cos 2 \nu_0 t,$$

und unter Berücksichtigung der zweiten Gleichungen (114):

$$(119)\qquad \varphi_1 = \frac{c^2}{6a^2} \{3 - 4 \cos \nu_0 t + \cos 2 \nu_0 t\}.$$

Bleibt man bei diesem Grade der Annäherung stehen, so ist nach (109) (115) und (119):

$$x = c \cos \nu_0 t + \frac{c^2 b}{6a^2} \{3 - 4 \cos \nu_0 t + \cos 2 \nu_0 t\},$$

oder:

$$(120)\qquad x = \frac{3c^2 b}{6a^2} + \left(c - \frac{2}{3} \frac{c^2 b}{a^2}\right) \cos \nu_0 t + \frac{c^2 b}{6a^2} \cos 2 \nu_0 t$$

d. h. in der Schwingung tritt jetzt noch die doppelte Schwingungszahl $2\nu_0$, oder akustisch gesprochen: neben dem Grundton tritt als Oberton die Oktave auf.

Bilden wir noch die nächste Annäherung, so ist nach (118), (115) und (119):

$$m\frac{d^2\varphi_2}{dt^2}+a^2\varphi_2=-2\varphi_0\varphi_1=-\frac{2c^3}{6a^2}\cos\nu_0 t(3-\psi\cos\nu_0 t+\cos 2\nu_0 t),$$

oder entwickelt:

$$(121)\quad \begin{cases} m\dfrac{d^2\varphi_2}{dt^2}+a^2\varphi^2=\dfrac{2}{3}\dfrac{c^3}{a^2}-\dfrac{7}{6}\dfrac{c^3}{a^2}\cos\nu_0 t \\ \qquad +\dfrac{2}{3}\dfrac{c^3}{a^2}\cos 2\nu_0 t-\dfrac{b^3}{6a^2}\cos 3\nu_0 t, \end{cases}$$

und das ist wieder eine Gleichung für eine erzwungene Schwingung; es tritt dann, wie man leicht sehen kann, auch noch das Glied $\cos 3\nu_0 t$ auf usw.

Natürlich hat das ganze hier geschilderte Verfahren nur dann Sinn, wenn die Reihe (109) für x, von der in (120) die drei ersten Glieder dargestellt sind, konvergent ist; dies bedarf jedesmal einer besonderen Untersuchung.[1])

40. Erzwungene Schwingungen mit endlicher Amplitude; Theorie der Kombinationstöne.

Eine für die Akustik bedeutsame Erweiterung der Untersuchung der vorhergehenden Nummer erhalten wir, wenn wir zu der elastischen Kraft $-(a^2x+bx^2)$ noch äußere periodische Kräfte hinzufügen, und zwar wollen wir $f(t)$ in der Form annehmen: $A\cos pt+B\cos qt$, d. h. also, akustisch gesprochen: zwei harmonische Schwingungen von den Frequenzen p und q wirken auf einen schwingenden Massenpunkt ein und beeinflussen ihn derartig, daß seine Amplitude eine endliche Größe annimmt.

Statt der Gleichung (108) erhalten wir dann nach dem d'Alembertschen Prinzip die Bewegungsgleichung:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+a^2x+bx^2=A\cos pt+B\cos qt.$$

Um in dieser Gleichung keine überflüssigen Konstanten mitzuschleppen — uns kommt es hier wesentlich nur auf die Kenntnis der Frequenzen an, die der schwingende Massenpunkt ausführt —, wollen wir noch durch m dividieren und statt $\frac{b}{m}$, $\frac{A}{m}$, $\frac{B}{m}$ wieder b, A, B schreiben, während für $\frac{a^2}{m}$ die Frequenz ν_0^2 gesetzt wird. Dann haben wir:

---

[1]) Vgl. hierzu: J. Horn, Zeitschr. f. Math. u. Phys., Bd. 47, S. 400, Jahrg. 1902.

(122) $$\frac{d^2x}{dt^2} + \nu_0^2 x + b x^2 = A \cos p t + B \cos q t.$$

Wir wollen wieder nach der Methode der sukzessiven Approximationen den Ansatz machen:

(123) $$x = \varphi_0 + \varphi_1 b + \varphi_2 b^2 + \ldots$$

Damit wird aus (122) folgende Reihe von Differentialgleichungen erhalten, indem wie vorher die zu gleichen Potenzen von b gehörigen Koeffizienten einzeln annulliert werden:

(124) $$\begin{cases} \dfrac{d^2\varphi_0}{dt^2} + \nu_0^2 \varphi_0 = A \cos p t + B \cos q t, \\ \dfrac{d^2\varphi_1}{dt^2} + \nu_0^2 \varphi_1 + \varphi_0^2 = 0, \\ \dfrac{d^2\varphi_2}{dt^2} + \nu_0^2 \varphi_2 + 2\varphi_0 \varphi_1 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Setzen wir als Anfangsbedingung etwa fest:

(125) $$\text{für } t = 0: \quad x = c, \quad \frac{dx}{dt} = 0,$$

so ergeben sich folgende Anfangsbedingungen für die Funktionen φ:

(126) $$\begin{cases} \varphi_0(0) = c, \quad \varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \ldots = 0, \\ \dfrac{d\varphi_0(0)}{dt} = \dfrac{d\varphi_1(0)}{dt} = \dfrac{d\varphi_2(0)}{dt} = \ldots = 0. \end{cases}$$

Die erste der Gleichungen (124) ist die einer gewöhnlichen erzwungenen Schwingung. Wir können daher nach dem Früheren das allgemeine Integral für φ_0 sofort anschreiben, wenn C und D willkürliche Konstanten sind:

$$\varphi_0 = C \cos \nu_0 t + D \sin \nu_0 t + \frac{A}{\nu_0^2 - p^2} \cos p t + \frac{B}{\nu_0^2 - q^2} \cos q t,$$

woraus mit Rücksicht auf die Anfangsbedingung (126) wird:

$$\varphi_0 = \left(c - \frac{A}{\nu_0^2 - p^2} + \frac{B}{\nu_0^2 - q^2}\right) \cos \nu_0 t + \frac{A}{\nu_0^2 - p^2} \cos p t + \frac{B}{\nu_0^2 - q^2} \cos q t.$$

Nun haben wir zwar von der Einführung einer Dämpfung Abstand genommen; dies würde im wesentlichen den Erfolg gehabt haben, die Eigenschwingung von der Frequenz ν_0 mit der Zeit zu beseitigen. Der Einfachheit halber wollen wir aber im folgenden — was durch eine genauere Rechnung bestätigt wird — uns erlauben, das Glied mit $\cos \nu_0 t$ einfach fortzulassen. Dann hat man:

(127) $$\varphi_0 = \frac{A}{\nu_0^2 - p^2} \cos p t + \frac{B}{\nu_0^2 - q^2} \cos q t.$$

Damit lautet die zweite Gleichung (124):

$$\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} + \nu_0^2\varphi_1 = -\varphi_0^2 = -\frac{A^2}{(\nu_0^2 - p^2)^2}\cos^2 pt - \frac{B^2\cos^2 qt}{(\nu_0^2 - q^2)^2} - \frac{2AB\cos pt\cos qt}{(\nu_0^2 - p^2)(\nu_0^2 - q^2)},$$

oder entwickelt:

$$(128)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\varphi_1}{dt^2} + \nu_0^2\varphi_1 = -\dfrac{A^2}{2(\nu_0^2 - p^2)^2} - \dfrac{B^2}{2(\nu_0^2 - q^2)^2} - \dfrac{A^2\cos 2pt}{2(\nu_0^2 - p^2)^2} \\ \qquad - \dfrac{B^2\cos 2qt}{2(\nu_0^2 - q^2)^2} - \dfrac{2AB}{(\nu_0^2 - p^2)(\nu_0^2 - q^2)}\{\cos(p+q)t + \cos(p-q)t\}. \end{cases}$$

Dies ist nun wieder eine Gleichung für eine erzwungene Schwingung, und man erkennt schon ohne Rechnung, daß φ_1 die Frequenzen $2p$, $2q$; $p+q$, $p-q$ enthalten muß, d. h. die Oktaven der ursprünglichen Primärtöne p und q, sowie die Summe und die Differenz der Frequenzen der Primärtöne. Tatsächlich nimmt das Ohr diese Töne wahr: der „Differenzton" ist zuerst von Tartini beobachtet worden, der „Summationston" ist zuerst aus der obigen von Helmholtz herrührenden Theorie von diesem erschlossen und dann auch von ihm beobachtet worden.

Wenn man die Annäherung noch weiter treibt, so erhält man aus den weiteren Gleichungen (124) u. a. noch folgende Töne:

$$(129)\qquad 2p - q,\ 2q - p,\ 3p - 2q,\ 3q - 2p,\ \ldots$$

die als Differenztöne „höherer Ordnung" bezeichnet werden und tatsächlich auch beobachtet worden sind.

Die oben dargelegte Helmholtzsche Theorie ist früher heftig bestritten worden; doch ist durch die neueren Versuche von C. Stumpf und E. Waetzmann festgestellt, daß der weitaus größte Teil der Folgerungen der Helmholtzschen Theorie zutrifft. Dies gilt z. B. für die Amplituden der Differenz- und Summationstöne, oder wie man zusammenfassend sagt, der „Kombinationstöne", hinsichtlich zu den Amplituden der Primärtöne. Die ausführliche Rechnung zeigt, daß folgende Amplitudenverhältnisse vorliegen.

Ton	Amplitude ist proportional:
Primärton p	A
„ q	B
Summations- u. Differenzton $p \pm q$	$A \cdot B$
Differenzton II. Ordnung $2p - q$	AB^2
„ II. „ $2q - p$	A^2B

Nun hat speziell Waetzmann gezeigt, daß die Intensitäten der Differenztöne sich in der Tat so verhalten, wie die obige Tabelle es verlangt.

Daraus kann alllerdings noch nicht der Schluß auf die Richtigkeit der Helmholtzschen Gleichung gezogen werden;

denn es wurde durch den Verfasser gezeigt[1]), daß alle Gleichungen von der Form:

$$(130)\qquad \frac{d^2x}{dt^2} + \nu_0^2 x \pm \sum b_{\alpha\beta} \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} \cdot \frac{d^\beta x}{dt^\beta} = A \cos pt + B \cos qt,$$

wo α und β zwei ganze positive Zahlen mit Einschluß der Null sind, Kombinationstöne liefern, und bei ihnen allen gehorchen die Amplitudenverhältnisse der obigen Tabelle. Es ist also durch die obigen Versuche nur gezeigt, daß die Ursache der Kombinationstöne jedenfalls in einer oder mehreren der Gleichungen vom Typus (130) zu suchen ist, dem die Helmholtzsche Gleichung (122) als Spezialfall angehört, nämlich für $\alpha = \beta = 0$.

Nur ein wichtiger, in der Natur voraussichtlich häufig erfüllter Spezialfall sei von (130) hervorgehoben: $\alpha = \beta = 1$. Dann folgt:

$$(131)\qquad \frac{d^2x}{dt^2} + \nu_0^2 x \pm b\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = A \cos pt + B \cos qt.$$

Darin läßt sich $\pm b\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ als ein Reibungsglied deuten, welches dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional ist und das erfahrungsgemäß fast stets vorhanden ist. Da die Reibungskraft der Geschwindigkeit stets entgegengesetzt ist, so muß das Glied $b\left(\frac{dx}{dt}\right)$ jedesmal sein Vorzeichen wechseln, wenn die Bewegungsrichtung sich umkehrt. Diese Gleichung ergibt nun insofern ein anderes Resultat als die Helmholtzsche, als aus ihr folgt, daß die Intensität der Kombinationstöne ceteribus paribus um so größer ist, je höher die Frequenzen der Primärtöne sind. Dies Verhalten ist nun in einer Arbeit von Waetzmann und Mücke[2]) tatsächlich beobachtet worden, so daß in der Tat in manchen Fällen die Gleichung (131) der Helmholtzschen vorzuziehen ist. Doch ist das letzte Wort in dieser Angelegenheit noch nicht gesprochen.

41. Bewegung eines substantiellen Punktes auf einem vertikalen Kreise: ebenes mathematisches Pendel.

Wir wollen einem der Schwere unterworfenen substantiellen Punkte die Bedingung auferlegen, daß er auf der Peripherie eines in einer vertikalen Ebene befindlichen Kreises sich bewegen soll. Nehmen wir die

[1]) C. Schaefer, Ann. d. Phys. 33, p. 1216, 1910; vgl. auch F. A. Schulze, a. a. O. 34, p. 817, 1911.

[2]) E. Waetzmann u. G. Mücke, Verhandl. d. deutsch. physik. Ges. 1912, pag. 59 ff.

z-Achse vertikal nach oben, die y-Achse horizontal von links nach rechts, so haben wir, da x dauernd gleich 0 ist, nach dem d'Alembertschen Prinzip die Gleichung:

(132) $$\left(-m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(-mg - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z = 0,$$

da $Y = 0$, $Z = -mg$ ist.

Dazu tritt nun die Bedingungsgleichung:

(133) $$\begin{cases} z^2 + y^2 - R^2 = 0, \quad \text{oder:} \\ z\delta z + y\delta y = 0. \end{cases}$$

Wenn wir nach der Vorschrift des d'Alembertschen Prinzips bei beschränkter Bewegungsfreiheit die variierte Form der Bedingungsgleichung

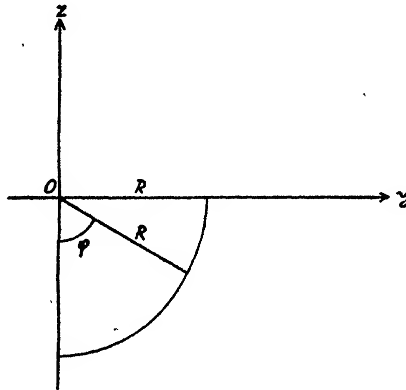


Fig. 45.

mit dem unbestimmten Faktor λ erweitern und zu (132) addieren, so haben wir nach dem Früheren das Gleichungspaar:

(134) $$\begin{cases} m\frac{d^2y}{dt^2} - \lambda y = 0, \\ m\frac{d^2z}{dt^2} - \lambda z + mg = 0. \end{cases}$$

Erweitern wir, um zu einer Integration zu gelangen, die erste Gleichung mit z, die zweite mit y und subtrahieren, so wird der unbekannte Faktor λ eliminiert und wir haben:

(135) $$z\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2z}{dt^2} = gy.$$

Für das Folgende ist es praktisch, ein Polarkoordinatensystem (R, φ) gemäß Fig. 45 einzuführen.

Dann ist offenbar, da der Radiusvektor stets gleich R sein muß:

$$(136) \qquad \begin{cases} y = R \sin \varphi, \\ z = R \cos \varphi, \end{cases}$$

und wenn man die daraus sich ergebenden Werte von $\frac{d^2 y}{dt^2}$ und $\frac{d^2 z}{dt^2}$ in (135) einsetzt, so ergibt sich folgende Gleichung:

$$(137\,\text{a}) \qquad R^2 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + g R \sin \varphi = 0,$$

und nach Kürzung durch R:

$$(137\,\text{b}) \qquad \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{g}{R} \sin \varphi = 0.$$

Dieser Fall kann sehr einfach experimentell realisiert werden, wenn man einen schweren Massenpunkt an einem möglichst leichten Faden

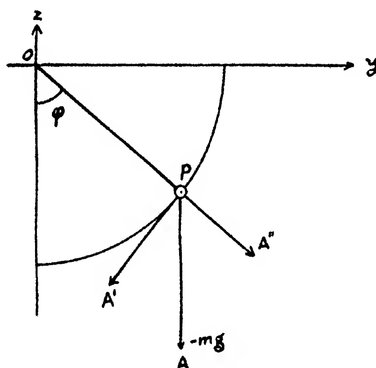


Fig. 46.

von der Länge R befestigt und im Erdfelde schwingen läßt; dieser Apparat ist ein sogenanntes mathematisches Pendel und die Differentialgleichung der Schwingungen haben wir in (137) vor uns.

Man kann diese Gleichung auch durch eine direktere Betrachtung mit Hilfe des d'Alembertschen Prinzips erhalten. Sei in Fig. 46 O der Befestigungspunkt des Pendelfadens von der Länge R; P die augenblickliche Stellung des Massenpunktes.

Im Punkte P greift dann die Kraft $\overrightarrow{PA} = -mg$ an; diese zerlegen wir in eine Komponente $\overrightarrow{PA'}$ senkrecht zu $\overline{OP}$ und $\overrightarrow{PA''}$ parallel zu $\overline{OP}$. Diese letztere Komponente wird vernichtet durch die Bedingungsgleichung, daß der substantielle Punkt die Kreisperipherie nicht verlassen kann (oder physikalisch gesprochen: durch die Spannung des Pendelfadens). Es bleibt also nur die tangentiale Kraftkomponente $\mathfrak{K} = -mg \sin \varphi$.

Nach dem d'Alembertschen Prinzip wird dieser Kraft das Gleichgewicht gehalten durch die tangentiale Komponente $-m\,a_t$ der Trägheitskraft, die z. B. nach (68b) des II. Kap. auf pag. 108 den Wert $-m R \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ hat, da hier $R = \text{Const.}$ ist; also ist:

$$mg \sin\varphi + m R \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0,$$

und das ist wieder die Gleichung (137).

Wir behandeln zunächst den Fall unendlich kleiner Pendelschwingungen; d. h. wir nehmen φ so klein an, daß $\sin\varphi$ durch φ ersetzt werden darf. Dann folgt statt (137):

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{R}\cdot\varphi = 0, \tag{138}$$

die sich somit als von der Form der gewöhnlichen Schwingungsgleichung eines substantiellen Punktes herausstellt. Die allgemeine Lösung ist folglich mit zwei willkürlichen Konstanten A und B:

$$\varphi = A\cos\sqrt{\frac{g}{R}}\,t + B\sin\sqrt{\frac{g}{R}}\,t, \tag{139}$$

also ist die Schwingungsdauer T_0:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}. \tag{140}$$

Da man Schwingungsdauern sehr genau messen kann, so bildet die Beobachtung von Pendelschwingungen nach (140) eine ausgezeichnete Methode, um g zu bestimmen. Es hat sich dabei herausgestellt, daß g eine Funktion der geographischen Breite ist. Wir werden auf die Erklärung dieser Erscheinung in Nr. 44 eingehen.

Es handelt sich nun um die Frage, wie genau diese Annäherung ist. Um dies zu beantworten, könnte man folgendermaßen verfahren. Wir entwickeln $\sin\varphi$ in die bekannte nach φ fortschreitende Potenzreihe:

$$\sin\varphi = \frac{\varphi}{1!} - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \ldots - .$$

Setzt man dies in (137) ein, so folgt:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{R}\left\{\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!}\ldots\right\} = 0, \tag{141}$$

und diese nicht lineare Gleichung könnte nach der Methode der sukzessiven Approximationen ohne Schwierigkeit behandelt werden. Der Vergleich mit der angenäherten Lösung (139) ergäbe dann das Kriterium für die Brauchbarkeit der letzteren.

Wir wollen jedoch die Gleichung (137) mit voller Allgemeinheit behandeln. Multipliziert man (137a) mit $\frac{d\varphi}{dt}$, so kann diese Formel geschrieben werden:

$$\frac{m}{2} R^2 \frac{d}{dt}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - m g R \frac{d}{dt}(\cos\varphi) = 0,$$

also:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{m}{2} R^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - m g R \cos\varphi\right] = 0,$$

also der Klammerausdruck selbst konstant. Diese Gleichung spricht offenbar das Energieprinzip aus, denn $\frac{m}{2} R^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$ ist gleich der kinetischen, $-mgR\cos\varphi$ gleich der potentiellen Energie, und deren Summe ist nach der letzten Gleichung eine Konstante.

Es sei etwa zur Zeit $t = 0$ der Winkel $\varphi = \varphi_0$, und die Geschwindigkeit $c_0 = R\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0$; dann ist nach der letzten Gleichung:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - \frac{g}{R}\cos\varphi = \text{Const.} = \frac{1}{2}\frac{c_0^2}{R^2} - \frac{g}{R}\cos\varphi_0,$$

oder auch:

(142) $$\frac{d\varphi}{dt} = \pm\sqrt{\frac{c_0^2}{R^2} - \frac{2g}{R}\cos\varphi_0 + \frac{2g}{R}\cos\varphi},$$

oder endlich:

(142a) $$R\frac{d\varphi}{dt} = \pm\sqrt{c_0^2 - 2gR\cos\varphi_0 + 2gR\cos\varphi}.$$

Jetzt sind zwei Fälle voneinander zu trennen: es kann sich ereignen, daß zu gewissen Zeiten $R\frac{d\varphi}{dt}$, die Geschwindigkeit, 0 wird: in diesem Falle haben wir es mit einer hin und her schwingenden Bewegung zu tun; oder aber die Geschwindigkeit ist zu allen Zeiten von 0 verschieden: in diesem letzteren Falle durchläuft der Massenpunkt — mit allerdings variabler, aber nie verschwindender Geschwindigkeit — den vertikalen Kreis stets in einer Richtung.

Wir behandeln zunächst den ersten Fall, nehmen also etwa an, daß bei dem Winkel φ_0 die Geschwindigkeit $c = c_0 = 0$ wird. Dann ist statt (142a):

$$R\frac{d\varphi}{dt} = \pm\sqrt{2gR\cos\varphi - 2gR\cos\varphi_0},$$

oder indem $\cos\varphi = 1 - 2\sin^2\frac{\varphi}{2}$, und entsprechend für $\cos\varphi_0$ gesetzt wird:

$$R\frac{d\varphi}{dt} = \pm\sqrt{4gR}\cdot\sqrt{\sin^2\left(\frac{\varphi_0}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)},$$

und endlich:

$$\sqrt{\frac{R}{g}}\,\frac{d\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{dt} = \pm\sqrt{\sin^2\left(\frac{\varphi_0}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}.$$

Setzen wir noch den echten Bruch

$$\sin^2\left(\frac{\varphi_0}{2}\right) = k^2 (< 1),$$

so erhält man für die Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\varphi}{dt}$ aus der letzten Gleichung:

(143) $$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{R}{g}}\,\frac{d\varphi}{dt} = \pm\sqrt{k^2 - \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)},$$

und ferner durch Trennung der Variabeln:

(144) $$\sqrt{\frac{g}{R}}\,dt = \pm\frac{d\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\sqrt{k^2 - \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}},$$

die integriert liefert:

(145) $$\sqrt{\frac{g}{R}}\,t = \pm\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\sqrt{k^2 - \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}}.$$

Hier wird es zweckmäßig, eine neue Variable einzuführen durch die Gleichung:

(146) $$k\sin\psi = \sin\frac{\varphi}{2};$$

dann wird der Nenner:

$$\sqrt{k^2 - \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)} = k\cos\psi,$$

ferner:

$$d\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{k\cos\psi\,d\psi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}};$$

also kann das Integral (145) geschrieben werden:

(147) $$\sqrt{\frac{g}{R}}\,t = \pm\int_{\psi_0}^{\psi}\frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}},$$

und für die Geschwindigkeit wird nach (143):

(148) $$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{R}{g}}\,\frac{d\varphi}{dt} = \pm\sqrt{k^2(1 - \sin^2\psi)} = \pm\,k\cos\psi.$$

Das auf der rechten Seite von (147) auftretende Integral läßt sich nicht auf die bekannten elementaren Funktionen zurückführen, es ist vielmehr ein „elliptisches Integral". Führt man die gebräuchliche Bezeichnung ein, die andeutet, daß das Integral Funktion seiner oberen Grenze oder „Amplitude" ψ und des „Moduls" k ist:

(149) $$\int_0^{\psi}\frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}} = F(k, \psi),$$

so kann (147) offenbar geschrieben werden:

(150) $$\sqrt{\frac{g}{R}}\,t = \pm\,[F(k, \psi) - F(k, \psi_0)].$$

Man nennt das Integral (149) ein „elliptisches Integral erster Gattung in der Legendreschen Normalform". Man sieht sofort aus (149), daß

$$(151) \qquad F(k, 0) = 0$$

ist.

Das Integral ferner

$$(152) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} = F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) \equiv K(k),$$

das nur noch Funktion des Moduls k ist, nennt man das „vollständige elliptische Integral erster Gattung." Für die elliptischen Integrale $F(k, \varphi)$ und $K(k)$ liegen Tabellen vor, die Legendre in seinen „Exercises du calcul intégral"; Bd. III, 1816 berechnet hat; sie sind abgedruckt in dem Tabellenwerk von Jahnke und Emde[1]), S. 54, woselbst auch der Verlauf des Integrals F als Funktion von Modul k und Amplitude ψ graphisch dargestellt ist. Aus diesen Tabellen kann man zu jedem Werte ψ, also auch zu jedem Werte φ, mit Hilfe der Gleichung (150) die zugehörige Zeit finden. Man kann also insbesondere die Schwingungsdauer T feststellen, wozu wir jetzt übergehen wollen.

Wir wollen zunächst die Zeit t_0 bestimmen, die verfließt, bis der substantielle Punkt, der zur Zeit 0 in der festgesetzten Anfangslage φ_0 ist, seine tiefste Lage $\varphi = 0$ erreicht hat. Dann ist nach (146) $\sin\varphi = 0$, und so folgt aus (150) mit Rücksicht auf (151):

$$\sqrt{\frac{g}{R}}\, t_0 = \mp F(k, \psi_0).$$

Da $t_0 > 0$ sein muß, und $F(k, \psi_0)$ ebenfalls > 0 ist, wenn, wie wir voraussetzen wollen im Einklang mit Fig. 46, daß φ_0, also auch $\psi_0 > 0$ ist, so haben wir in (150) das negative Vorzeichen zu wählen; also ist definitiv:

$$(153) \qquad t_0 = \sqrt{\frac{R}{g}}\, F(k, \psi_0).$$

Von dieser Zeit t_0 an wollen wir die Schwingungsdauer T rechnen; man kann (153) benutzen, um die Funktion $F(k, \psi_0)$, die den Anfangszustand enthält, zu eliminieren; denn durch Kombination mit (150) (mit dem negativen Vorzeichen) folgt:

$$(154) \qquad t - t_0 = -\sqrt{\frac{R}{g}}\, F(k, \psi).$$

Von der tiefsten Stelle steigt der Massenpunkt in die Höhe (sagen wir, um die Ideen zu fixieren, nach links, wenn wir $\varphi_0 > 0$ nach rechts an-

[1]) Vgl. die Funktionentafeln von Jahnke u. Emde, B. G. Teubner 1909, pag. 46ff.. Bett.

nehmen, wie es der Fig. 46 entspricht), bis die Geschwindigkeit $\frac{d\varphi}{dt} = 0$ geworden ist. Nach (148) ist dann $k^2 = \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$ oder nach (146) $k^2 = k^2 \sin^2 \psi$, also $\sin \psi = \pm 1$. Hierbei ist das Zeichen — zu wählen, da jetzt nach der vorhergehenden Festsetzung φ und ψ negativ sind. Also kommt der Punkt zur Ruhe zu einer Zeit t_1, für die $\psi = -\frac{\pi}{2}$ ist. Also hat man nach (154):

$$t_1 = t_0 - \sqrt{\frac{R}{g}} F\left(k, -\frac{\pi}{2}\right),$$

oder nach der Definition der Funktion F gemäß Gleichung (149) unter Beachtung von (152):

$$t_1 = t_0 + \sqrt{\frac{R}{g}} F\left(k, +\frac{\pi}{2}\right) = t_0 + \sqrt{\frac{R}{g}} K(k),$$

oder: man erhält für die zwischen dem tiefsten und dem höchsten Punkte verflossene Zeit:

(155) $$t_1 - t_0 = \sqrt{\frac{R}{g}} K(k).$$

Die diesem Viertel des Weges einer ganzen Schwingung entsprechende Zeit ist ein Viertel der ganzen Schwingungsdauer, also haben wir:

(156) $$T = 4(t_1 - t_0) = 4\sqrt{\frac{R}{g}} K(k),$$

womit T bestimmt ist. Wir können durch Entwicklung des $K(k)$ darstellenden Integrals (152) einen beliebig genauen Wert für T finden. Es ist offenbar:

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - k^2 \sin^2 \psi)^{-1/2} d\psi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \left\{1 + \frac{1}{2} k^2 \sin^2 \psi + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} k^4 \sin^4 \psi + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} k^6 \sin^6 \psi\right\}.$$

Diese Reihe ist, da $k \sin \psi < 0$ ist, konvergent und zwar absolut konvergent, da auch die Reihe der absoluten Werte konvergiert. Indem man die Integration gliedweise ausführt, erhält man nach elementaren Rechnungen:

(157) $$K(k) = \frac{\pi}{2}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right) k^6 + \ldots\right\};$$

also ist schließlich die Schwingungsdauer bei endlicher Amplitude φ_0, wenn für k^2 sein Wert $\sin^2\left(\frac{\varphi_0}{2}\right)$ substituiert wird:

(158) $$T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} \left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\varphi_0}{2}\right) + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4\left(\frac{\varphi_0}{2}\right) + \ldots\right\}.$$

Das ist die gewünschte genaue Formel für die Schwingungsdauer, die für sehr kleine Amplituden in unsere alte Formel (140) übergeht. Nehmen wir einen Ausschlagswinkel φ_0 von 1^0 an, so ist:

$$\sin(1^0) = 0{,}0175; \quad \sin^2(1^0) = 0{,}0003; \quad \sin^4(1^0) = 0{,}00000009;$$

also ist die Schwingungsdauer nach (158) und (140):

$$T = T_0\{1 + 0{,}000075 + 0{,}00000002\}.$$

Daraus ergibt sich: Für eine Amplitude von einem Grade beträgt die Abweichung von T gegen den Wert T_0 der Gleichung (140) etwa $^1/_{13000}$ und bei einem Ausschlagswinkel von 5 Grad nicht mehr als $^1/_{2000}$.

Wir haben jetzt noch den zweiten Fall zu erledigen, in dem die Geschwindigkeit nie zu 0 abnimmt. Sie ist ein Minimum offenbar dann, wenn der Punkt gerade am Scheitelpunkt des Kreises sich befindet, ein Maximum, wenn der substantielle Punkt gerade die tiefste Lage $\varphi = 0$ passiert; denn im ersten Falle ist die potentielle Energie ein Maximum, im zweiten ein Minimum. Wir gehen aus von der Gleichung (142):

$$(159) \qquad \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{c_0^2}{R^2} - \frac{2g}{R}\cos\varphi_0 + \frac{2g}{R}\cos\varphi = \text{Const.} + \frac{2g}{R}\cos\varphi,$$

wo φ_0, c_0 irgend zwei zusammengehörige Werte von Ausschlag und Geschwindigkeit sind.

Das Minimum der Geschwindigkeit haben wir nach dem Obigen für $\varphi = \pi$, das Maximum für $\varphi = 0$; für diese beiden Werte ist nach (159):

$$(159\text{a}) \qquad \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_\pi^2 = \text{Const.} - \frac{2g}{R},$$

$$(159\text{b}) \qquad \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0^2 = \text{Const.} + \frac{2g}{R},$$

also:

$$(160) \qquad \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0^2 - \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_\pi^2 = \frac{4g}{R},$$

womit die Konstante eliminiert ist. Wir können nun (159) schreiben:

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \text{Const.} + \frac{2g}{R} - \frac{4g}{R}\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right),$$

oder endlich:

$$(161) \qquad \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \left(\text{Const.} + \frac{2g}{R}\right)\left(1 - \frac{\frac{4g}{R}\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\text{Const.} + \frac{2g}{R}}\right).$$

Nun ist nach Voraussetzung $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_\pi^2 > 0$, also die Konstante, die in unserer Gleichung vorkommt, nach (159a) größer als $\frac{2g}{R}$, mithin der Ausdruck in (161)

$$\frac{\frac{4g}{R}}{\text{Const.} + \frac{2g}{R}} < 1.$$

Setzen wir diesen Bruch gleich k^2, so haben wir:

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \left(\text{Const.} + \frac{2g}{R}\right)\left(1 - k^2 \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right).$$

Nach Definition von k^2 ist:

$$\text{Const.} + \frac{2g}{R} = \frac{4g}{R}\,\frac{1}{k^2},$$

also schließlich:

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{4g}{R}\,\frac{1}{k^2}\left(1 - k^2 \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right),$$

oder:

$$k\sqrt{\frac{R}{g}}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \pm\sqrt{1 - k^2 \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}.$$

Setzen wir fest, daß der Kreis im positiven Sinne durchlaufen werden soll, so ist $\frac{d\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{dt} > 0$; also ist auch rechts das $+$-Zeichen zu wählen. Also:

(162)
$$\frac{1}{k}\sqrt{\frac{g}{R}}\,t = +\int\limits_{\frac{\varphi_0}{2}}^{\frac{\varphi}{2}} \frac{d\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}}$$

oder, wenn wir φ_0, d. h. den Ausschlag für $t = 0$, gleich 0 setzen:

(162a)
$$\frac{1}{k}\sqrt{\frac{g}{R}}\,t = +\int\limits_{0}^{\frac{\varphi}{2}} \frac{d\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}} = +F\left(k, \frac{\varphi}{2}\right).$$

In dieser Gleichung besitzen wir die Lösung, indem wir für jedes φ das zugehörige t aus den zitierten Tabellen finden können. Wollen wir nun umgekehrt, was mechanisch das Gewöhnlichere ist, φ als Funktion von t ausdrücken, so hat man die Funktion (162) umzukehren; man erhält dann, da $\left(\frac{\varphi}{2}\right)$ die „Amplitude" des Integrals genannt wird:

(163)
$$\varphi = 2\,\text{ampl.}\left(\frac{1}{k}\sqrt{\frac{g}{R}}\,t\right) = 2\,\text{am}\,\frac{1}{k}\sqrt{\frac{g}{R}}\,t,$$

wobei für die Amplitude das übliche Funktionszeichen „am" gebraucht ist. Für die Umlaufzeit T' findet man aus (162a), indem man $\varphi = 2\pi$ setzt:

$$\frac{1}{k}\sqrt{\frac{g}{R}}\,T' = \int\limits_{0}^{\pi} \frac{d\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}} = F(k, \pi) = 2K(k).$$

oder mit Rücksicht auf die Reihenentwicklung (158):

(164) $$T' = \frac{\pi k}{2}\sqrt{\frac{R}{g}}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \ldots\right\}.$$

Damit ist auch dieser Fall vollkommen erledigt. Die Verbindung zwischen diesem und dem Fall der schwingenden Bewegung stellt der Spezialfall her, daß die Winkelgeschwindigkeit für $\varphi = \pi$, d. h. für den Scheitelpunkt des Kreises gleich 0 wird; dann ist $k = 1$. In diesem Falle nähert sich der Massenpunkt mit stets abnehmender Geschwindigkeit dem Scheitel, ohne ihn jemals zu erreichen: die nach (164) berechnete Größe T' wird dann unendlich.

42. Bewegung eines substantiellen Punktes auf einer Kugelfläche; räumliches Pendel.

Viel komplizierter als der eben behandelte ist der Fall, wenn ein substantieller Punkt sich auf einer Kugelfläche bewegen muß, wenn also die Pendelbewegung eine räumliche ist. Wir wollen nur den Spezialfall der kleinen Schwingungen des räumlichen Pendels näher untersuchen, der uns eine Vorbereitung für die nachher zu behandelnde Theorie des Foucaultschen Pendelversuches liefern wird.

Das Koordinatensystem befinde sich im Mittelpunkt der Kugelfläche vom Radius R; die positive z-Achse sei vertikal nach oben gegerichtet, dann ist:

$$X = Y = 0, \quad Z = -mg.$$

Das d'Alembertsche Prinzip liefert also die Gleichung:

(165) $$-m\frac{d^2x}{dt^2}\,\delta x - m\frac{d^2y}{dt^2}\,\delta y - \left(mg + m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z = 0,$$

wozu die Gleichung der Kugelfläche hinzutritt:

(166) $$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0, & \text{oder} \\ x\delta x + y\delta y + z\delta z = 0. \end{cases}$$

Erweitert man die variierte Form der Bedingungsgleichung mit einem unbestimmten Faktor λ und addiert sie zu (165), so folgen in bekannter Weise die Bewegungsgleichungen:

(167) $$\begin{cases} m\frac{d^2x}{dt^2} - \lambda x = 0, \\ m\frac{d^2y}{dt^2} - \lambda y = 0, \\ m\frac{d^2z}{dt^2} - \lambda z = -mg. \end{cases}$$

Diese Gleichungen sind zunächst ganz allgemein und können auch noch allgemein weiterbehandelt werden: die Voraussetzung der Kleinheit

der Schwingungen werden wir erst an einer späteren Stelle einführen.

Man kann aus (167) zwei andere Gleichungen ableiten, die eine einmalige Integration gestatten. Zunächst erweitern wir dieselben resp. mit $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ und addieren sie. Dann folgt sofort:

$$m\left[\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dz}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}\right]$$
$$-\lambda\left[x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}+z\frac{dz}{dt}\right]=-m\frac{d}{dt}(gz),$$

oder, da wegen (166)

$$x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}+z\frac{dz}{dt}=0$$

ist:

$$\frac{m}{2}\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]+m\frac{d}{dt}\left[gz\right]=0,$$

und endlich:

$$\left[\frac{m}{2}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\}\right]+mgz=\frac{m}{2}A, \tag{168}$$

wo A eine Konstante bedeutet. Dies ist die Gleichung der Energie: der Term in eckigen Klammern ist die kinetische, mgz die potentielle Energie; ihre Summe ist konstant. Dividieren wir durch den überflüssigen Faktor $\frac{m}{2}$, so wird (168), wenn wir für die Geschwindigkeit c setzen:

$$c^2+2gz=A. \tag{169}$$

In dieser Gleichung ist — darin besteht eben ihr Vorteil — die unbekannte Funktion λ fortgefallen. Eine zweite derartige Gleichung erhalten wir durch Erweiterung der ersten Gleichung (167) mit y, der zweiten mit x und darauffolgende Subtraktion. Das ergibt sofort:

$$x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}=0,$$

oder integriert:

$$x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}=B, \tag{170}$$

wo B eine zweite Konstante bedeutet. Auch diese Gleichung hat eine einfache Bedeutung, auf die wir nachher eingehen wollen.

Jetzt ist es zweckmäßig, räumliche Polarkoordinaten (R, φ, ϑ) einzuführen, die der Fig. 18 auf pag. 28 entsprechen:

$$x=R\sin\vartheta\cdot\cos\varphi,$$
$$y=R\sin\vartheta\cdot\sin\varphi,$$
$$z=R\cos\vartheta.$$

Damit werden, wie man in leichter Rechnung sieht, (169) und (170):

(171) $$R^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + R^2\sin^2\vartheta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + 2gR\cos\vartheta = A,$$

(172) $$R^2\sin^2\vartheta\frac{d\varphi}{dt} = B.$$

In dieser Form ist die Bedeutung der Gleichung (172) besonders leicht zu erkennen. $R\sin\vartheta$ ist die Projektion des Radiusvektors R auf die xy-Ebene. Diese Projektion nennen wir der Kürze wegen r. Dann ist $\frac{1}{2}r^2\frac{d\varphi}{dt}$ die von dieser Projektion in der xy-Ebene pro Zeiteinheit überstrichene Fläche, die nach (172) konstant ist, oder anders ausgedrückt: die von der Projektion des Radiusvektors auf die xy-Ebene überstrichene Fläche ist proportional der Zeit; dieser Satz ist identisch mit dem zweiten Keplerschen Gesetz und wird der „Flächensatz" genannt.

Die Konstanten A und B wollen wir noch durch die Anfangsbedingungen ausdrücken. Nehmen wir etwa der Einfachheit halber an, die Anfangsgeschwindigkeit sei horizontal gerichtet, sei gleich c_0 und habe die Komponenten u_0, v_0, während $w_0 = 0$ sei. Ferner sei für $t = 0$:

$$\vartheta = \vartheta_0, \quad \text{dagegen } \varphi_0 = 0.$$

Dann ist offenbar:

(173) $$\begin{cases} A = c_0^2 + 2gR\cos\vartheta_0, \\ B = R\sin\vartheta_0 \cdot v_0 = R^2\sin^2\vartheta_0\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0. \end{cases}$$

Nun wollen wir die Vereinfachung eintreten lassen, daß die Schwingungen klein sind, d. h. daß der Winkel ϑ von π nur um einen so kleinen Winkel δ abweicht, daß wir schreiben können:

$$\sin\delta = \delta.$$
$$\cos\delta = 1 - \frac{\delta^2}{2},$$

also da $\vartheta = \pi - \delta$ ist, folgt für ϑ:

(174) $$\begin{cases} \sin\vartheta \cong \pi - \vartheta, \\ \cos\vartheta \cong 1 + \frac{(\pi-\vartheta)^2}{2}. \end{cases}$$

Da wir nun vorhin $R\sin\vartheta = r$ gesetzt haben, so ist auch $R(\pi - \vartheta) = r$, und dies wollen wir als die eine Variable in (171) und (172) einführen. Man erhält in elementarer Rechnung:

(175) $$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \frac{g}{R}r^2 = c_0^2 + \frac{g}{R}r_0^2,$$

wo $r_0 = R\sin\vartheta_0 = R(\pi - \vartheta_0)$ gesetzt ist, und:

(176) $$r^2\frac{d\varphi}{dt} = B = r_0^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0 = r_0 c_0.$$

Man erkennt aus der letzten Gleichung leicht folgendes: Ist $B \neq 0$,

d. h. entweder r_0 oder c_0 gleich 0, so ist $\frac{d\varphi}{dt} = 0$, also $\varphi = Const$; also, da $\varphi_0 = 0$ ist, ist φ stets gleich 0. Die Bewegung ist dann also eine ebene, und zwar in der xz-Ebene, und wir erhalten den Fall der vorigen Nummer.

Die beiden Gleichungen (175) und (176) gestatten nun eine vollständige Integration. Aus der letzten folgt:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{r_0 c_0}{r^2}.$$

Setzt man diesen Wert in (175) ein, so haben wir eine Differentialgleichung für r allein, nämlich:

$$\pm \frac{dr}{dt} = \sqrt{\left(c_0^2 + \frac{g}{R} r_0^2\right) - \frac{g}{R} r^2 - \frac{r_0^2 c_0^2}{r^2}},$$

oder:

$$\pm \sqrt{\frac{R}{g}}\, r \frac{dr}{dt} = \sqrt{-r^4 + \left(\frac{R}{g} c_0^2 + r_0^2\right) r^2 - \frac{R r_0^2 c_0^2}{g}},$$

oder endlich:

$$\text{(177)} \qquad \sqrt{\frac{g}{R}}\, dt = \frac{\pm r\, dr}{\sqrt{-r^4 + \left(\frac{R c_0^2}{g} + r_0^2\right) r^2 - \frac{R r_0^2 c_0^2}{g}}}.$$

Der unter der Wurzel stehende Ausdruck ist nur brauchbar, solange er positiv ist, denn nur dann ist die rechte Seite reell. Um den Bereich der r-Werte festzustellen, in dem dies der Fall ist, müssen wir also die Wurzeln der quadratischen Gleichung bestimmen:

$$r^4 - \left(\frac{R c_0^2}{g} + r_0^2\right) r^2 + \frac{R r_0^2 c_0^2}{g} = 0.$$

Man findet für r^2 die beiden Werte α^2 und β^2:

$$r_1^2 \equiv \alpha^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{R c_0^2}{g} + r_0^2\right) + \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{R c_0^2}{g} + r_0^2\right)^2 - \frac{4 R r_0^2 c_0^2}{4g}},$$

$$r_2^2 \equiv \beta^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{R c_0^2}{g} + r_0^2\right) - \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{R c_0^2}{g} + r_0^2\right)^2 - \frac{4 R r_0^2 c_0^2}{4g}},$$

oder ausgerechnet:

$$\text{(178)} \qquad \begin{cases} r_1^2 \equiv \alpha^2 = \dfrac{R c_0^2}{g}, \\ r_2^2 \equiv \beta^2 = r_0^2. \end{cases}$$

Nun ist ferner leicht zu sehen, daß für $r = 0$ der Wurzelausdruck in (177) negativ, nämlich gleich $-\frac{R r_0^2 c_0^2}{g}$ ist; er bleibt negativ, bis er zum ersten Male, etwa für $r^2 = r_1^2 = \alpha^2$ Null wird, bleibt dann positiv, bis er zum zweiten Male für $r^2 = r_2^2 = \beta^2$ Null wird, um dann dauernd negativ zu werden. Bezeichnen wir den Ausdruck unter der Wurzel kurz mit $F(r^2)$, so ist nach dieser Auseinandersetzung:

$$
(179)\quad \begin{cases} F(r^2) < 0, & \text{für } 0 \leqq r^2 \leqq \alpha^2, \\ F(\alpha^2) = 0, & \\ F(r^2) > 0, & \text{für } \alpha^2 \leqq r^2 \leqq \beta^2, \\ F(\beta^2) = 0, & \\ F(r^2) < 0, & \text{für } \beta^2 \leqq r^2 \leqq \infty. \end{cases}
$$

Die Fig. 47 stellt das Verhalten von $F(r^2)$ qualitativ dar.

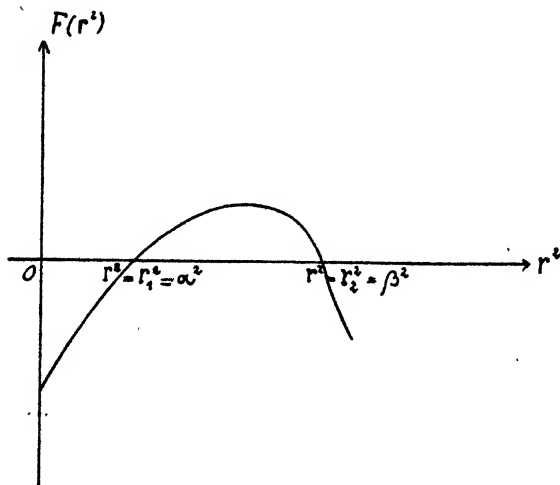


Fig. 47.

Es muß also in Gleichung (177) r^2 stets zwischen dem Werte $\frac{R c_0^2}{g}$ und r_0^2 bleiben. Die Gleichung $r^2 = \text{Const.}$ stellt nun auf der Kugel offenbar einen horizontalen Breitenkreis dar; dann folgt also das Resultat, daß

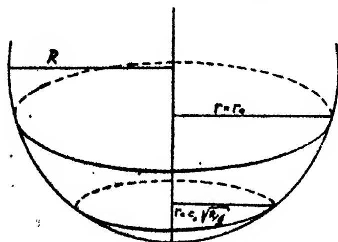


Fig. 48.

der substantielle Punkt stets innerhalb zweier Breitenkreise, und zwar vom Radius r_0 und $c_0\sqrt{\frac{R}{g}}$ eingeschlossen bleibt, und diesen Bereich nicht verlassen kann (Fig. 48).

In unserer Darstellung in Fig. 48 ist angenommen, daß $c_0 \sqrt{\frac{R}{g}} < r_0$ sei; das hängt, wie man sieht, ceteris paribus von der Anfangsgeschwindigkeit c_0 ab, die dem Punkte erteilt worden ist.

Da $r = R(\pi - \vartheta)$ ist, und r zwischen r_1 und r_2 schwankt, so ist der Ausschlagswinkel $\pi - \vartheta = \delta$ dadurch ebenfalls vollkommen bestimmt. Die Ausweichung des räumlichen Pendels von der Vertikalen schwankt zwischen den Winkeln:

(180)
$$\left\{\begin{aligned} \delta_1 &= \frac{r_1}{R} = \frac{c_0\sqrt{\frac{R}{g}}}{R} = \frac{c_0}{\sqrt{Rg}}\,, \\ \delta_2 &= \frac{r_2}{R} = \frac{r_0}{R} \end{aligned}\right.$$

beständig hin und her, ohne jemals diese Grenze überschreiten zu können.

Nach diesen Vorbereitungen wollen wir nun Gleichung (177) etwas umformen. Wir schreiben den Wurzelausdruck $F(r^2)$ zunächst in folgender Weise:

$$F(r^2) = -r^4 + (r_1^2 + r_2^2)r^2 - r_1^2 r_2^2\,,$$

und daraus folgt leicht:

(181)
$$F(r^2) = -\left(r^2 - \frac{r_1^2 + r_2^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{r_1^2 - r_2^2}{2}\right)^2.$$

Dann setzen wir den Ausdruck:

(182)
$$r^2 - \frac{r_1^2 + r_2^2}{2} = \frac{1}{2}(r_1^2 - r_2^2)\,U\,,$$

wo U eine neue Variable bedeutet; es ist also:

(182a)
$$4r\,dr = (r_1^2 - r_2^2)\,dU\,.$$

Damit wird die zu integrierende Gleichung (177):

$$2\sqrt{\frac{g}{R}}\,dt = \frac{\pm\,dU}{\sqrt{1-U^2}}\,.$$

Um das Vorzeichen zu bestimmen, müssen wir bedenken, daß zur Zeit Null $r = r_0$ ist. Nun ist nach unserer Annahme, die auch unserer Zeichnung 48 entspricht, r_0 der größte Breitenkreis, der in der Bewegung des Punktes auftreten kann. Es wird also im nächsten Augenblick r abnehmen, also $\frac{dr}{dt} < 0$ sein. Da dU proportional dr ist, aber nach (182a) das entgegengesetzte Vorzeichen hat und die linke Seite der letzten Gleichung größer als Null ist, so müssen wir rechts das Pluszeichen nehmen, damit auch sie größer als Null ausfällt. Also ist endgültig:

(183)
$$2\sqrt{\frac{g}{R}}\,dt = +\frac{dU}{\sqrt{1-U^2}}\,,$$

was integriert sofort liefert:

$$2\sqrt{\frac{g}{R}}\,t + \text{Const.} = \arcsin U = \arcsin\left\{\frac{2r^2 - (r_1^2 + r_2^2)}{r_1^2 - r_2^2}\right\}.$$

Für $t = 0$ wird $r = r_0$; also haben wir zur Bestimmung der Konstanten, da $r_2 = r_0$ ist:

$$\text{Const.} = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2};$$

folglich ergibt sich:

$$2\sqrt{\frac{g}{R}}\,t - \frac{\pi}{2} = \arcsin\frac{2r^2 - (r_1^2 + r_2^2)}{r_1^2 - r_2^2},$$

oder:

(184) $$\frac{2r^2 - (r_1^2 + r_2^2)}{r_1^2 - r_2^2} = +\sin\left\{2\sqrt{\frac{g}{R}}\,t - \frac{\pi}{2}\right\} = -\cos 2\sqrt{\frac{g}{R}}\,t.$$

Berücksichtigt man, daß

$$\cos 2\sqrt{\frac{g}{R}}\,t = \cos^2\sqrt{\frac{g}{R}}\,t - \sin^2\sqrt{\frac{g}{R}}\,t$$

ist, so erhält man schließlich für r^2 den Wert:

(185) $$r^2 = r_2^2\cos^2\sqrt{\frac{g}{R}}\,t + r_1^2\sin^2\sqrt{\frac{g}{R}}\,t,$$

woraus hervorgeht, daß r^2 periodisch und zwar mit der Periode $\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$ ist. Mit (185) ist schließlich auch der Winkel ϑ als Funktion der Zeit bestimmt, da $r = R(\pi - \vartheta)$ ist; es folgt also:

(185a) $$(\pi - \vartheta)^2 = \frac{1}{R^2}\left[r_2^2\cos^2\sqrt{\frac{g}{R}}\,t + r_1^2\sin^2\sqrt{\frac{g}{R}}\,t\right].$$

Setzt man den in (185) erhaltenen Wert von r^2 in Gleichung (176) ein, so folgt:

(186) $$d\varphi = \frac{r_0 c_0\,dt}{r_2^2\cos^2\sqrt{\frac{g}{R}}\,t + r_1^2\sin^2\sqrt{\frac{g}{R}}\,t},$$

und diese Gleichung läßt sich integrieren mit Hilfe der Substitution:

(187) $$\operatorname{tang}\sqrt{\frac{g}{R}}\,t = V,$$

woraus folgt:

$$\frac{\sqrt{\frac{g}{R}}\,dt}{\cos^2\sqrt{\frac{g}{R}}\,t} = dV.$$

Also wird (186):

$$d\varphi = \frac{r_0 c_0\sqrt{\frac{R}{g}}\,dV}{r_2^2 + r_1^2 V^2} = \frac{\frac{r_2 r_0}{r_1 r_2^2}\,c_0\sqrt{\frac{R}{g}}\,d\left(\frac{r_1}{r_2}V\right)}{1 + \left(\frac{r_1}{r_2}V\right)^2}$$

oder integriert:

$$\varphi + \text{Const.} = \frac{r_2 r_0 c_0}{r_1 r_2^2}\sqrt{\frac{R}{g}}\,\text{arc tang}\left[\frac{r_1}{r_2} V\right],$$

oder, wenn wir für r_1, r_2, V die Werte einsetzen:

$$\varphi + \text{Const.} = \text{arc tang}\left[\frac{c_0}{r_0}\sqrt{\frac{R}{g}}\,\text{tang}\sqrt{\frac{g}{R}}\,t\right],$$

und da zur Zeit Null $\varphi = \varphi_0 = 0$ sein soll, folgt für die Konstante der Wert Null, so daß wir endgültig haben:

(188a) $$\varphi = \text{arc tang}\left[\frac{c_0}{r_0}\sqrt{\frac{R}{g}}\,\text{tang}\sqrt{\frac{g}{R}}\,t\right],$$

oder:

(188b) $$\text{tang}\,\varphi = \frac{c_0}{r_0}\sqrt{\frac{R}{g}}\,\text{tang}\sqrt{\frac{g}{R}}\,t.$$

Gleichung (188a) erlaubt, die Werte $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ zu bestimmen; man erhält dafür offenbar:

(189) $$\begin{cases} \sin\varphi = \dfrac{\dfrac{c_0}{r_0}\sqrt{\dfrac{R}{g}}\,\text{tang}\sqrt{\dfrac{g}{R}}\,t}{\sqrt{1 + \dfrac{c_0^2 R}{r_0^2 g}\,\text{tang}^2\sqrt{\dfrac{g}{R}}\,t}}, \\[2ex] \cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{c_0^2 R}{r_0^2 g}\,\text{tang}^2\sqrt{\dfrac{g}{R}}\,t}}. \end{cases}$$

Da nun $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ ist, so gewinnt man aus (185) x und y als Funktion von t, und durch Elimination der Zeit schließlich die Bahn, die die Projektion des substantiellen Punktes in der xy-Ebene beschreibt.

Wir erhalten durch Multiplikation von (185) mit resp. $\cos^2\varphi$ und $\sin^2\varphi$:

(190) $$\begin{cases} x^2 = r_0^2\cos^2\sqrt{\dfrac{g}{R}}\,t, \\[1ex] y^2 = \dfrac{c_0^2 R}{g}\sin^2\sqrt{\dfrac{g}{R}}\,t, \end{cases}$$

und durch Elimination der Zeit folgt:

(191) $$\frac{x^2}{r_0^2} + \frac{y^2}{\left(\dfrac{c_0^2 R}{g}\right)} = 1;$$

d. h. die Projektion der Bahn auf die xy-Ebene ist eine Ellipse, deren Halbachsen resp. r_0 und $c_0\sqrt{\frac{R}{g}}$ sind.

Die Umlaufzeit T_0 beträgt nach (190) offenbar:

(192) $$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}.$$

also übereinstimmend — was für kleine Amplituden zu erwarten war — mit der Schwingungsdauer des ebenen Pendels gleichfalls für kleine Amplituden.

Damit ist die kleine Bewegung des räumlichen Pendels vollkommen bestimmt; die weitere Spezialdiskussion kann dem Leser überlassen werden. Wir gehen jetzt über zur Untersuchung des sogenannten Foucaultschen Pendelversuches in einem besonders einfachen Falle.

43. Der Foucaultsche Pendelversuch.

Wir wollen jetzt das Experiment mit der Theorie vergleichen. Zu diesem Zwecke begeben wir uns auf den Nordpol der Erde (was ja jetzt möglich ist) und lassen dort ein Pendel schwingen. Wir geben ihm keine Anfangsgeschwindigkeit ($c_0 = 0$), sondern eine Elongation r_0 parallel der x-Achse, d. h. $x_0 = r_0$, $y_0 = 0$ oder $\varphi_0 = 0$. Dann muß nach der oben auseinandergesetzten Theorie das Pendel ebene Schwingungen in der

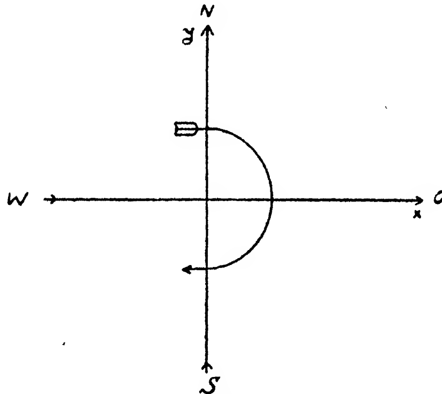


Fig. 49.

xz-Ebene ausführen; denn die Konstante B der Gleichung (176) ist dann Null, also der Winkel φ dauernd gleich Null. Man beobachtet aber bei sorgfältiger Anordnung des Versuches etwas anderes: Die Ebene der Pendelschwingungen dreht sich aus der xz-Ebene heraus und durchläuft mit gleichmäßiger Winkelgeschwindigkeit alle Richtungen der Windrose in ungefähr 24 Stunden; der Fehler dieser Angabe beträgt nach den Messungen von Kamerlingh Onnes etwa 7 Minuten; nach dieser Zeit erst ist die ursprüngliche Schwingungsebene wieder hergestellt.

Nehmen wir etwa, um die Ideen zu fixieren, an, die positive x-Richtung sei nach Osten, die positive y-Richtung nach Norden gerichtet, die z-Achse vertikal nach oben, wie es die Fig. 49 zeigt, so erfolgt die Drehung der Pendelebene am Nordpol der Erde in der Richtung des Pfeiles, also von Osten über Süden nach Westen.

Die Winkelgeschwindigkeit ω, mit der die Pendelebene sich dreht, hat nach den obigen Angaben ungefähr den Wert:

$$(193) \qquad \omega = \frac{2\pi}{86400} \sec^{-1},$$

ist also eine außerordentlich kleine Größe.

Was lehrt nun diese Beobachtung, die zuerst von Léon Foucault im Jahre 1850 gemacht worden ist? Ist die Theorie falsch? Das würde bedeuten, daß die Gleichungen der Mechanik unrichtig wären. Zu dieser Annahme wird man sich angesichts der vielen glänzenden Erfolge derselben schwer entschließen können. Halten wir die Gleichungen der Mechanik aber fest, so ist nur ein anderer Ausweg möglich: was wir beobachten, ist ja eine relative Drehung von Erde und Pendelebene. Nun führt die Annahme, daß die Erde ruht, die Pendelebene sich dreht, zu dem Widerspruch gegen die Gleichungen der Mechanik; es bleibt also noch rein kinematisch die Möglichkeit offen, anzunehmen, daß die Pendelebene ruht und die Erde sich mit der entgegengesetzten Winkelgeschwindigkeit von Westen über Süden nach Osten dreht. Die Begriffe Ruhe und Bewegung sind hierbei natürlich in bezug auf das noch unbekannte Fundamentalsystem der Dynamik zu verstehen. Bei der ersten Auffassung (ruhende Erde) ist also ein in der Erde befestigtes Koordinatensystem als Fundamentalsystem angenommen, aber diese Annahme hat sich als unmöglich erwiesen, bei der zweiten dagegen nicht. Stellen wir uns auf diesen letzteren Standpunkt, so ist eine Möglichkeit vorhanden, die Abweichungen des Experimentes von der Theorie zu erklären; denn die Bewegungsgleichungen der Mechanik gelten nicht für ein System, welches relativ zum Fundamentalsystem rotiert. Vielmehr haben wir, wenn die z-Achse, wie hier, die Rotationsachse ist, die Gleichungen (22) des II. Kapitels auf pag. 85 anzuwenden, wobei wir aber ξ, η, ζ hier durch die Buchstaben x, y, z ersetzen wollen.

Welchen Anhaltspunkt gibt nun der Foucaultsche Pendelversuch zur Bestimmung des Fundamentalsystems? Das ist sicher: von dem Fundamentalsystem aus betrachtet, darf die Rotation der Pendelebene nicht stattfinden, oder anders ausgedrückt: relativ zur Erde muß das Fundamentalsystem in derselben Weise rotieren, wie die Pendelebene beim Foucaultschen Pendelversuch. Ein solches System erhalten wir folgendermaßen: Als Koordinatenanfangspunkt halten wir den Erdmittelpunkt, als z-Achse die Erdachse fest. Senkrecht zu der letzteren durch den Erdmittelpunkt legen wir die Äquatorialebene, die wir als xy-Ebene wählen. In dieser Ebene ziehen wir vom Mittelpunkt der

Erde zwei zueinander senkrechte Gerade nach zwei Fixsternen, die als x- bzw. y-Achse derart genommen werden, daß das ganze System rechtshändig wird. Gegen dieses System dreht sich die Erde um ihre Achse nach Definition der Sekunde in Nr. 2 einmal in 86164 Sekunden, oder umgekehrt: dieses System dreht sich scheinbar in 86164 Sekunden von Osten über Süden nach Westen um die Erdachse. Die Zahl 86164 Sekunden stimmt bis auf 4 Minuten mit der Zahl 86400 Sekunden überein, ist also innerhalb der auf 7 Minuten geschätzten Fehlergrenze des Foucaultschen Pendelversuches.

Soweit also die Genauigkeit des Foucaultschen Pendelversuches reicht, können wir behaupten, daß ein solches durch die Erdachse und den Fixsternhimmel bestimmtes System als Fundamentalsystem brauchbar ist; dagegen ist ein in der Erde festes System nach der obigen Diskussion mit den Gesetzen der Mechanik nicht verträglich. Wir werden auf die Frage des Fundamentalsystems im V. Kapitel noch einmal beim Zweikörperproblem und der Planetenbewegung einzugehen haben. Dort wird sich zeigen, daß für die Himmelsmechanik auch das hier benützte System noch nicht das Fundamentalsystem sein kann.

Die Gleichungen (22) des II. Kapitels (pag. 85) für einen völlig freien Massenpunkt lauten:

$$(194)\quad \begin{cases} X + 2m\omega \dfrac{dy}{dt} + m\omega^2 x = m\dfrac{d^2x}{dt^2}, \\ Y - 2m\omega \dfrac{dx}{dt} + m\omega^2 y = m\dfrac{d^2y}{dt^2}, \\ Z = m\dfrac{d^2z}{dt^2}, \end{cases}$$

die sich durch das Hinzutreten der Coriolisschen und Zentrifugal-(Führungs-)kraft von den gewöhnlichen Gleichungen der Mechanik unterscheiden. Nach unseren Festsetzungen ist $X = Y = 0$, $Z = -mg$. Aber der Massenpunkt ist hier nicht frei, sondern gezwungen, auf einer Kugelfläche zu bleiben, also genügen die Koordinaten der Bedingung:

$$(195)\quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad \text{oder:} \\ x\,\delta x + y\,\delta y + z\,\delta z = 0. \end{cases}$$

Infolgedessen können die Gleichungen (194) nicht einzeln für sich gelten, sondern nach dem d'Alembertschen Prinzip haben wir die eine Gleichung:

$$(196)\quad \begin{cases} \left(2\omega\dfrac{dy}{dt} + \omega^2 x - \dfrac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(-2\omega\dfrac{dx}{dt} + \omega^2 y - \dfrac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y \\ \qquad + \left(-g - \dfrac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z = 0, \end{cases}$$

wobei die Verrückungen δx, δy, δz der zweiten Gleichung (195) zu gehorchen haben, also nicht vollkommen frei sind. Multiplizieren wir die variierte Form der Bedingungsgleichung (195) mit einem unbestimmten

Faktor λ und addieren sie zu (196), so zerfällt die entstandene Gleichung in bekannter Weise in die drei Einzelgleichungen:

$$(197)\quad \begin{cases} 2\omega \frac{dy}{dt} + \omega^2 x + \lambda x = \frac{d^2x}{dt^2}, \\ -2\omega \frac{dx}{dt} + \omega^2 y + \lambda y = \frac{d^2y}{dt^2}, \\ -g + \lambda z = \frac{d^2z}{dt^2}. \end{cases}$$

Wir haben nun zu zeigen, daß diese Gleichungen sich in der Tat mit dem Experiment in Übereinstimmung befinden.

Wir bilden, genau wie in der vorhergehenden Nummer, zwei Gleichungen, die den Energiesatz und den Flächensatz aussprechen. Durch Erweiterung der Gleichungen (197) mit $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ und Addition erhalten wir:

$$\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{dt} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{dz}{dt} = \omega^2\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right)$$
$$+ \lambda\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt}\right) - g\frac{dz}{dt} = 0,$$

oder, wenn A eine Konstante bedeutet und die Geschwindigkeit mit c bezeichnet wird:

$$(198)\quad c^2 - \omega^2(x^2 + y^2) + 2gz = A.$$

Die Erweiterung der ersten Gleichung mit y, der zweiten mit x, und Subtraktion der ersten von der zweiten liefert:

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = -2\omega\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right),$$

oder, wenn B eine zweite Konstante bezeichnet:

$$(199)\quad x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} + \omega(x^2 + y^2) = B.$$

Die Gleichungen (198) und (199) entsprechen genau den Gleichungen (168) und (169) der vorhergehenden Nummer.

Wir wollen nun die Anfangsbedingungen festsetzen; es sei für

$$t = 0:\ y_0 = 0,\ x = x_0;\ z = z_0;\ \text{dagegen}\ c_0 = 0.$$

Diese Festsetzung würde im Falle der vorhergehenden Nummer genügt haben, B gleich Null zu machen; hier dagegen liefert der Term $\omega(x^2 + y^2)$ ein von Null verschiedenes B. Führen wir wieder Polarkoordinaten ein und beschränken uns auf kleine Schwingungen, so gehen (198) und (199) in den früheren Bezeichnungen durch leichte Rechnung über in:

$$(200)\quad \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - \omega^2 r^2 + \frac{g}{R}r^2 = r_0^2\left(\frac{g}{R} - \omega^2\right),$$

(201) $$r^2 \frac{d\varphi}{dt} + \omega r^2 = \omega r_0^2.$$

Dabei ist r_0 der Wert von r für $t = 0$, d. h. $= \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$, also nach den festgesetzten Anfangsbedingungen gleich x_0; d. h. das Argument φ ist für $t = 0$ ebenfalls gleich Null. Diese Gleichungen entsprechen genau den Gleichungen (175) und (176) der vorhergehenden Nummer.

Wir behandeln nun diese Gleichungen (200) und (201) genau so weiter, wie die entsprechenden der vorhergehenden Nummer: wir bilden aus (201) $\frac{d\varphi}{dt}$, setzen den Wert in (200) ein, die dann eine Differentialgleichung für r allein liefert. So erhalten wir nach einigen Rechnungen, wenn wir das Vorzeichen genau so wählen wie in der vorhergehenden Nummer:

(202) $$\sqrt{\frac{g}{R}}\, dt = \frac{-r\,dr}{\sqrt{-r^4 + r_0^2\left(1 + \frac{\omega^2 R}{g}\right) r^2 - \frac{\omega^2 r_0^4 R}{g}}},$$

die von genau derselben Form ist wie (177) und dieser auch entspricht. Bilden wir jetzt — immer genau wie vorher — die Wurzeln der unter der Quadratwurzel stehenden Gleichung, so erhält man — analog (178) — den Minimal- und den Maximalwert von r^2:

(203) $$\begin{cases} r_1^2 = r_0^2 \omega^2 \frac{R}{g}, \\ r_2^2 = r_0^2, \end{cases}$$

und es ergeben sich die nämlichen Folgerungen wie dort: der substantielle Punkt bewegt sich auf der Kugel innerhalb der beiden Breitenkreise vom Radius $r_0 \omega \sqrt{\frac{R}{g}}$ und r_0. Ebenso liefert die Integration von (202) die Gleichung, die (185) analog ist, und sich nur durch die Werte von r_1 und r_2 davon unterscheidet:

(204) $$r^2 = r_0^2 \cos^2 \sqrt{\frac{g}{R}}\, t + \frac{r_0^2 \omega^2 R}{g} \sin^2 \sqrt{\frac{g}{R}}\, t.$$

Weiter haben wir jetzt die Gleichung (201) zu integrieren, indem wir den Wert von r aus (204) einsetzen. Das liefert:

(205) $$\frac{d\varphi}{dt} + \omega = \frac{\omega}{\cos^2 \sqrt{\frac{g}{R}}\, t + \frac{\omega^2 R}{g} \sin^2 \sqrt{\frac{g}{R}}\, t}.$$

Die linke Seite läßt sich als Differentialquotient von $(\varphi + \omega t)$, welche Summe wir durch ψ bezeichnen wollen, darstellen; die rechte Seite ist von der nämlichen Form wie die analoge Gleichung (186) und kann durch die nämliche Substitution (187) weiter behandelt werden, so daß sich unmittelbar ergibt, wenn gleichzeitig auf die Anfangsbedingung $\varphi_0 = 0$ Rücksicht genommen wird:

(206a) $$\psi \equiv \varphi + \omega t = \operatorname{arc\,tang} \omega \sqrt{\frac{R}{g}} \left[\operatorname{tang} \sqrt{\frac{g}{R}}\, t\right],$$

oder auch:

(206b) $$\operatorname{tang} \psi \equiv \operatorname{tang}(\varphi + \omega t) = \omega \sqrt{\frac{R}{g}} \cdot \operatorname{tang} \sqrt{\frac{g}{R}}\, t.$$

Die Gleichungen (206a) und (206b) entsprechen vollkommen den Gleichungen (188a) und (188b) und es ergibt sich weiter, analog (189):

(207) $$\begin{cases} \sin(\varphi + \omega t) = \dfrac{\omega \sqrt{\frac{R}{g}} \operatorname{tang} \sqrt{\frac{g}{R}}\, t}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2 R}{g} \operatorname{tang}^2 \sqrt{\frac{g}{R}}\, t}}, \\ \cos(\varphi + \omega t) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2 R}{g} \operatorname{tang}^2 \sqrt{\frac{g}{R}}\, t}}. \end{cases}$$

Der wesentliche Unterschied dieser Formeln (207) gegen (189) besteht darin, daß hier $\psi \equiv \varphi + \omega t$ an Stelle von φ getreten ist. Führen wir nun ein Hilfskoordinatensystem (ξ, η) durch die Festsetzung ein:

(208) $$\begin{cases} \xi = r \cos \psi, \\ \eta = r \sin \psi, \end{cases}$$

so erhält man durch Multiplikation von (204) mit $\cos^2 \psi$ bzw. $\sin^2 \psi$ folgende Werte von ξ und η als Funktionen von t:

(209) $$\begin{cases} \xi^2 = r_0^2 \cos^2 \sqrt{\frac{g}{R}}\, t, \\ \eta^2 = \dfrac{r_0^2 \omega^2 R}{g} \sin^2 \sqrt{\frac{g}{R}}\, t, \end{cases}$$

die durch Elimination von t liefern:

(210) $$\frac{\xi^2}{r_0^2} + \frac{\eta^2}{r_0^2 \omega^2 \frac{R}{g}} = 1,$$

die ebenso wie (191) ausspricht, daß bezogen auf das System (ξ, η) die Projektion der Bahn auf die mit der xy-Ebene zusammenfallende Ebene eine Ellipse mit den Halbachsen r_0 bzw. $r_0 \omega \sqrt{\frac{R}{g}}$ ist.

Nun ist aber, wie oben hervorgehoben, die Winkelgeschwindigkeit ω sehr klein, und daher das Achsenverhältnis $\omega \sqrt{\frac{R}{g}}$ eine im allgemeinen außerordentlich kleine Größe, wenn $\frac{R}{g}$ nicht extrem groß ist, was bei den experimentellen Anordnungen nicht der Fall ist. Die Ellipse ist also praktisch mit sehr großer Annäherung eine gerade Linie parallel

der ξ-Achse. Dies folgt sofort aus (209), da mit diesem Grade der Annäherung $\eta = 0$, $\xi = r_0 \cos\sqrt{\frac{g}{R}}\, t$ ist.

Wir können also mit hinreichender Genauigkeit sagen: In bezug auf das (ξ, η)-System ist die Projektion der Bahn des Massenpunktes auf die xy-Ebene eine geradlinige Schwingung parallel der ξ-Achse. Es ist nur noch die Frage zu beantworten: Wie verhält sich das System (ξ, η) zu unserem in der Erde fest verankerten (x, y)? Die Antwort ergibt sich aus den Definitionsgleichungen (208) in Verbindung mit dem Werte $\psi = \varphi + \omega t$. Danach ist:

$$\xi = r\cos(\varphi + \omega t) = r\cos\varphi\cdot\cos\omega t - r\sin\varphi\cdot\sin\omega t,$$
$$\eta = r\sin(\varphi + \omega t) = r\sin\varphi\cdot\cos\omega t + r\cos\varphi\cdot\sin\omega t,$$

oder unter Benutzung der Werte von x und y:

$$\xi = x\cos\omega t - y\sin\omega t,$$
$$\eta = x\sin\omega t + y\cos\omega t.$$

Diese Gleichungen liefern nach x und y aufgelöst:

$$(211)\qquad \begin{cases} x = \quad \xi\cos\omega t + \eta\sin\omega t, \\ y = -\xi\sin\omega t + \eta\cos\omega t. \end{cases}$$

Ein Vergleich mit den Gleichungen (141) des ersten Kapitels auf pag. 66 zeigt sofort, daß das System (ξ, η) ein solches ist, das um die gemeinschaftliche z-Achse mit der Winkelgeschwindigkeit $-\omega$ sich gegen das in der Erde ruhende System (x, y) dreht. D. h. in der Bezeichnungsweise der Fig. 49: das System (ξ, η) dreht sich von Westen über Norden nach Osten gegen das System (x, y). In bezug auf das System (ξ, η) bleibt die Pendelebene erhalten; diese dreht sich also — genau wie es das Experiment ergibt — gegenüber einem in der Erde festen System (x, y) in der Richtung des Pfeiles der Fig. 49. Das Experiment stimmt also jetzt mit der Theorie überein.

Da bei unserer Annäherung $\xi = r_0\cos\sqrt{\frac{g}{R}}\, t$, $\eta = 0$, so ist auf das (x, y)-System bezogen:

$$(212)\qquad \begin{cases} x = \quad \xi\cos\omega t = \quad r_0\cos\sqrt{\frac{g}{R}}\, t\cdot\cos\omega t, \\ y = -\xi\sin\omega t = -r_0\cos\sqrt{\frac{g}{R}}\, t\cdot\sin\omega t. \end{cases}$$

Um die Schwingungsbahn des Foucaultschen Pendels zeichnen zu können, muß man eine sehr langsame Pendelschwingung annehmen. Setzen wir $\omega = \frac{\sqrt{\frac{g}{R}}}{10}$, d. h. nehmen wir eine so langsame Pendelschwingung an, daß in 10 Schwingungen eine einmalige vollständige Umdrehung

der Pendelebene erfolgt, so ist es allerdings nicht mehr zulässig, an Stelle der elliptischen Bewegung (209) und (210) eine geradlinige Schwingung zu setzen, d. h. $\eta = 0$ zu nehmen. Denn dann ist das Verhältnis der Halbachsen der Ellipse (210) $\omega \sqrt{\frac{R}{g}} = \frac{1}{10}$ und es ergibt sich dann, daß r nie gleich Null, sondern höchstens gleich $\frac{r_0}{10}$ werden kann. Die genaue Zeichnung Fig. 50 zeigt, daß die Kurve einerseits wie vorher ganz innerhalb des Kreises mit dem Radius r_0 liegt, anderseits ganz außerhalb des Kreises mit dem Radius $r_0 \omega \sqrt{\frac{R}{g}} = \frac{r_0}{10}$, den sie tangiert. Wir erhalten also dann folgendes Bild: (Fig. 50)

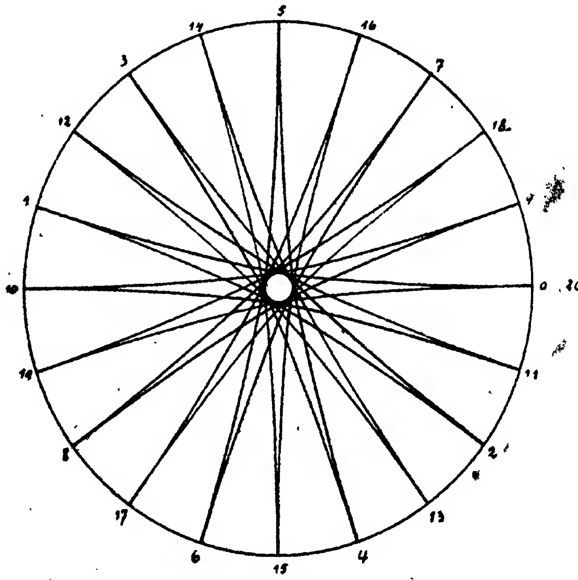


Fig. 50.

Wir haben im vorstehenden den einfachsten und durchsichtigsten Fall des **Foucaultschen** Pendelversuches behandelt, indem wir uns auf den Nordpol begaben, d. h. auf einen solchen Punkt, an dem die Richtung der Schwere mit der der Rotationsachse übereinstimmt. An anderen Punkten der Erde ist dies natürlich nicht der Fall, und wenn der Versuch an einem Orte von der geographischen Breite χ gemacht wird, so erfolgt eine ganze Umdrehung der Pendelebene nicht in 24 Stunden, sondern in $\frac{24}{\sin \chi}$ Stunden, was durch Experiment und Theorie gleichmäßig bestätigt wird. Für die allgemeine Theorie sei etwa auf **Kirchhoffs** Vorlesungen über Mechanik (S. 86) verwiesen.

Zusammenfassend können wir also sagen: Durch den Foucaultschen Pendelversuch wird auf Grund der Gleichungen der Mechanik bewiesen, daß die Erde relativ zum Fundamentalsystem sich dreht; es ist also in unserer Mechanik nicht möglich, die Erde als ruhend zu betrachten und eine entgegengesetzte Rotation des Fixsternhimmels anzunehmen. Kinematisch und geometrisch läuft das allerdings auf dasselbe hinaus, aber die Newtonsche Mechanik liefert eine Entscheidung zwischen beiden Möglichkeiten.

44. Einfluß der Erdrotation auf die Schwerebeschleunigung.

Wenn die Erde ruhte und eine vollständige Kugel wäre, so müßte schon aus Symmetriegründen die Richtung der Schwerkraft an der Erdoberfläche mit der des Radiusvektors R vom Mittelpunkte nach dem betreffenden Punkte der Erde übereinstimmen. Die Kosinusse der Winkel, die R mit den Koordinatenachsen bildet, sind offenbar:

$$\cos(R,x) = \sin\vartheta\cos\varphi\,,\quad \cos(R,y) = \sin\vartheta\sin\varphi\,,\quad \cos(R,z) = \cos\vartheta\,. \tag{213}$$

Die Winkel ϑ und φ sind dabei so gewählt, wie es der Fig. 18 (pag. 28) entspricht: ϑ ist die sogenannte Zenitdistanz, φ das Azimut in der xy-Ebene. Das Koordinatensystem ist so gewählt worden, wie in der vorhergehenden Nummer. Die Komponenten der Schwerebeschleunigung der ruhenden Erde am Punkte (R, ϑ, φ) sind dann nach (213), wenn die Gesamtbeschleunigung durch G bezeichnet wird, resp.:

$$-G\sin\vartheta\cos\varphi\,,\qquad -G\sin\vartheta\sin\varphi\,,\qquad -G\cos\vartheta\,. \tag{214}$$

Denken wir uns nun einen Körper auf der Erdoberfläche ruhend, so ist in den hier anzuwendenden Gleichungen (194)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = 0$$

zu nehmen; für X, Y, Z haben wir die mit m multiplizierten Werte (214) zu setzen. Es wirken also auf der bewegten Erde scheinbar die Kräfte:

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{K}_x &= -mG\sin\vartheta\cos\varphi + m\omega^2 R\sin\vartheta\cos\varphi\,,\\ \mathfrak{K}_y &= -mG\sin\vartheta\sin\varphi + m\omega^2 R\sin\vartheta\sin\varphi\,,\\ \mathfrak{K}_z &= -mG\cos\vartheta\,. \end{aligned}\right. \tag{215}$$

Durch die Wirkung der Zentrifugalkräfte (die Coriolisschen Kräfte verschwinden jetzt) wird also die Schwere der Größe und Richtung nach abgeändert; was wir beobachten, sind die Komponenten $\mathfrak{K}_x, \mathfrak{K}_y, \mathfrak{K}_z$, nicht die Komponenten der Schwerkraft $-mG$; die Quotienten $\frac{-\mathfrak{K}_x, -\mathfrak{K}_y, -\mathfrak{K}_z}{m}$ wollen wir durch g_x, g_y, g_z bezeichnen; diese stellen also die Komponenten der auf der bewegten Erde tatsächlich beobachteten Schwerebeschleunigung vor. Aus (215) folgt zunächst für die Größe g der wirklich beobachteten Schwerebeschleunigung:

$$g = \sqrt{g_x^2 + g_y^2 + g_z^2} = \sqrt{(G - \omega^2 R)^2 \sin^2\vartheta + G^2 \cos^2\vartheta},$$

oder

(216) $$g = G\sqrt{1 - \frac{2\omega^2 R}{G}\sin^2\vartheta + \left(\frac{\omega^2 R}{G}\right)^2 \sin^2\vartheta}.$$

Nun ist aber $\omega = \frac{2\pi}{86164}$, $R = \frac{1}{2\pi}$ 40000000 cm; G ist, wie man aus der letzten Gleichung sieht, am Nordpol, d. h. für $\vartheta = 0$, mit g, das beobachtet werden kann, identisch. Aus den schon früher erwähnten Pendelbestimmungen ergibt sich durch Extrapolation einer rein empirischen Formel, die g als Funktion der geographischen Breite darstellt, am Nordpol:

$$g_{\text{Nordpol}} = G = 983{,}09 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2},$$

also ist $\frac{\omega^2 R}{g} = \frac{1}{291}$, und das Quadrat dieses Ausdruckes kann neben 1 vernachlässigt werden. Mit dieser Genauigkeit ergibt sich dann:

$$g = G\sqrt{1 - \frac{2\omega^2 R}{G}\sin^2\vartheta},$$

oder, indem die Wurzel entwickelt wird, mit derselben Genauigkeit:

(217) $$g = G\left(1 - \frac{\omega^2 R}{G}\sin^2\vartheta\right) = G\left(1 - \frac{\sin^2\vartheta}{291}\right).$$

Rein empirisch hat man eine ebenso gebaute Formel gefunden:

(218) $$g = G\left(1 - \frac{\sin^2\vartheta}{191}\right).$$

Der Unterschied in den Zahlenfaktoren ist jedoch sehr beträchtlich; er rührt davon her, daß die Erde keine Kugel, sondern angenähert ein an den Polen abgeplattetes Rotationsellipsoid ist. Diese Abplattung für sich — ohne Rotation — würde in derselben Weise wirken wie die Zentrifugalkraft; wir kommen darauf später eingehend zurück. Eben wegen dieser Diskrepanz in den Zahlenwerten ist die Abhängigkeit der Schwere von ϑ nicht so beweisend für die Erdrotation wie der Foucaultsche Versuch.

Eine Bemerkung betreffend die Gleichung (197) muß hier noch Platz finden. Es geht aus den obigen Darlegungen hervor, daß in (197) für die Schwerebeschleunigung der Wert auf der ruhenden Erde zu nehmen ist, den wir im vorhergehenden mit G bezeichnet haben. Es ist jedoch dieser Wert am Nordpol identisch mit g, und daher rechtfertigt sich in (197) die gewöhnliche Bezeichnung.

Von derselben Größenordnung wie in (218) ist die Abweichung der Richtung der Schwerkraft von der Richtung des Radiusvektors nach diesem Punkte. Nach (213) und (215) haben wir offenbar:

$$\cos(R,x) = \sin\vartheta\cos\varphi\,, \qquad \cos(g,x) = \frac{(G-\omega^2 R)\sin\vartheta\cos\varphi}{g}\,,$$

$$\cos(R,y) = \sin\vartheta\sin\varphi\,, \qquad \cos(g,y) = \frac{(G-\omega^2 R)\sin\vartheta\sin\varphi}{g}\,,$$

$$\cos(R,z) = \cos\vartheta\,. \qquad \cos(g,z) = \frac{G\cos\vartheta}{g}\,.$$

Indem die horizontal nebeneinanderstehenden Glieder miteinander multipliziert und dann die drei Produkte addiert werden, erhält man sofort:

$$\cos(g,R) = \frac{(G-\omega^2 R)\sin^2\vartheta + G\cos^2\vartheta}{g}\,,$$

oder unter Benutzung der Gleichung (216):

$$\cos(g,R) = \frac{1-\frac{\omega^2 R}{G}\sin^2\vartheta}{\sqrt{1-\frac{2\omega^2 R}{G}\sin^2\vartheta + \left(\frac{\omega^2 R}{G}\right)^2\sin^2\vartheta}}\,.$$

Daraus folgt in elementarer Rechnung für den $\sin(g,R)$ angenähert:

$$\sin(g,R) = \frac{\frac{\omega^2}{2}\,\frac{R}{G}}{\sqrt{1-\frac{2\omega^2 R}{G}\sin^2\vartheta}}\sin 2\vartheta\,,$$

oder, da (g, R) klein ist, der Sinus also mit dem Bogen vertauscht werden darf, mit demselben Grade von Genauigkeit:

$$\sphericalangle(g,R) = \frac{\omega^2 R}{2G}\sin 2\vartheta\,. \tag{219}$$

Um diesen Winkel weicht die Richtung der Schwere (also die Vertikale) von der des Radiusvektors ab.

Außer den hier besprochenen Erscheinungen gibt es noch eine Anzahl andere — namentlich die Abweichung von den einfachen Fall- und Wurfgesetzen —, die das Vorhandensein einer „absoluten“ Rotation, d. h. einer Rotation der Erde gegen das Fundamentalsystem, beweisen; doch erreicht keiner dieser Versuche die Genauigkeit des Foucaultschen Pendelversuches, weshalb wir hier nicht näher darauf eingehen.

Viertes Kapitel.

Allgemeine Dynamik eines Systems materieller Punkte.

45. Das Newtonsche Reaktionsprinzip.

Bisher betrachteten wir immer nur einen Massenpunkt, an dem gegebene Kräfte angreifend gedacht wurden, ohne uns darum zu kümmern, woher die Kräfte kamen. Aber diese Betrachtung ist einseitig, und wir sind darauf im Laufe unserer Untersuchungen schon zweimal hingewiesen worden. Einmal nämlich verstanden wir mit Newton unter der auf einen Massenpunkt wirkenden Kraft gewisse äußere objektive Bedingungen, die dem Massenpunkt eine Beschleunigung erteilen: die Kraft, die auf einen Massenpunkt wirkt, stammt nicht aus dem Massenpunkt selbst, sondern ist in seinem Verhältnis zur Außenwelt begründet. Zweitens sahen wir, daß der hieraus fließende Satz von der Unabhängigkeit der Kraft vom Koordinatensystem nur so mit dem Relativitätsprinzip der Mechanik in Einklang gebracht werden kann, daß wir annehmen, daß im analytischen Ausdruck der Kraft nur Koordinatendifferenzen vorkommen, nämlich die Differenzen der Koordinaten des beschleunigten Massenpunktes (x_a, y_a, z_a) und der Koordinaten gewisser anderer Massenpunkte (x_b, y_b, z_b). Wir haben bereits damals die Ausdrucksweise eingeführt: „Die Kraft greife an dem ersteren Punkte an" und „gehe von den letzteren Punkten aus".

Wir wollen das jetzt genauer untersuchen: Nach der wiederholt dargelegten Grundanschauung der Newtonschen Mechanik, daß die auf einen Massenpunkt wirkende Kraft nicht aus ihm selbst stammt, können auf einen einzigen, im leeren Raume isolierten Massenpunkt keine Kräfte wirken. Damit dies der Fall sei, ist also mindestens die Anwesenheit noch eines, im allgemeinen mehrerer, Massenpunkte erforderlich.

Betrachten wir jetzt außer den bisher allein ins Auge gefaßten beschleunigten Massenpunkten auch alle diejenigen oder einen Teil derjenigen, deren Vorhandensein für das Zustandekommen der Beschleunigung des ersteren maßgebend ist, von denen also, wie wir ganz allgemein sagen wollen, die Kraftwirkungen ausgehen, so nennen wir die Gesamtheit der in Betracht gezogenen substantiellen Punkte ein „System von materiellen Punkten" oder ein „materielles System" oder kurz, wo keine Mißverständnisse möglich sind, ein „System".

Wir haben im folgenden die Bewegungen eines solchen Systems, d. h. die Bewegungen jedes materiellen Punktes des Systems, zu untersuchen. Die Grundlage dafür hat Newton geschaffen, indem er über die Kraftwirkungen zwischen den einzelnen Punkten des Systems ein Gesetz aufstellte, welches von der Erfahrung im Gebiete der Mechanik stets bestätigt worden ist. Es zeigt sich nämlich, daß die Kraftwirkung eine gegenseitige ist, daß also, wenn von einem Punkte (x_a, y_a, z_a) auf einen Punkt (x_b, y_b, z_b) eine Kraft ausgeübt wird, die wir $\mathfrak{K}_{a,b}$ nennen wollen, daß dann auch stets vom Punkte (b) rückwärts eine Kraft auf den Punkt (a), die wir entsprechend $\mathfrak{K}_{b,a}$ nennen, ausgeübt wird. Dieser Satz gilt nach Newton allgemein: in einem System kann man die Massenpunkte also nicht in zwei verschiedene Teile trennen, von denen die einen diejenigen wären, auf die von den anderen Kräfte ausgeübt würden, und die anderen die die Kräfte ausübenden wären, sondern wenn auf einen Massenpunkt des Systems von einer Anzahl anderer Kräfte ausgeübt werden (d. h. dieser Punkt infolge der Anwesenheit anderer Massenpunkte eine bestimmte Beschleunigung erfährt), so übt er auch rückwärts auf die anderen Punkte Kräfte aus (d. h. er erteilt ihnen infolge seiner Anwesenheit gleichfalls Beschleunigungen).

Wir wollen nun weitergehend ein ganz einfaches System von zwei Massenpunkten ins Auge fassen. Die beiden substantiellen Punkte üben aufeinander die Kräfte $\mathfrak{K}_{12}$ bzw. $\mathfrak{K}_{21}$ aus; bei der Formulierung bedienen wir uns im folgenden der Vektorsymbolik, um außer der Größe auch die Richtung der Kräfte anzudeuten. Dann behauptet das erwähnte Newtonsche Gesetz, daß stets sei:

$$(1) \qquad \mathfrak{K}_{12} = - \mathfrak{K}_{21},$$

d. h. die von dem substantiellen Punkte (1) auf den substantiellen Punkt (2) ausgeübte Kraft soll gleich und entgegengesetzt der Kraft sein, die (2) auf (1) ausübt.

Man nennt die Kraft $\mathfrak{K}_{12}$ mit einem kurzen Ausdruck die „Aktion" von (1) auf (2), und dementsprechend $\mathfrak{K}_{21}$ die „Reaktion" von (2) auf (1). Das dritte Newtonsche Bewegungsgesetz sagt nun für eine beliebige Anzahl von Massenpunkten aus: „Jeder Aktion entspricht eine gleich große, entgegengesetzt gerichtete Reaktion".

In dem speziellen Falle eines Systems von zwei Punkten haben wir nach Koordinatenzerlegung von (1) also die Gleichungen:

$$(2) \qquad \begin{cases} X_{12} + X_{21} = 0, \\ Y_{12} + Y_{21} = 0, \\ Z_{12} + Z_{21} = 0, \end{cases}$$

und in einem allgemeinen System von n Massenpunkten gilt für zwei beliebige Punkte a und b ebenso:

$$(3)\qquad \begin{cases} X_{ab} + X_{ba} = 0, \\ Y_{ab} + Y_{ba} = 0, \\ Z_{ab} + Z_{ba} = 0. \end{cases}$$

Wenn wir diese Gleichungen nun über sämtliche Massenpunkte summieren, d. h. a und b der Reihe nach alle Werte von 1 bis n annehmen lassen, und dann alle so gebildeten Gleichungen (3) addieren, so erhalten wir:

$$(4)\qquad \left.\begin{cases} \frac{1}{2}\sum\limits_{a}^{1,n}\sum\limits_{b}^{1,n}\{X_{ab} + X_{ba}\} = 0 \\ \frac{1}{2}\sum\limits_{a}\sum\limits_{b}\{Y_{ab} + Y_{ba}\} = 0 \\ \frac{1}{2}\sum\limits_{a}\sum\limits_{b}\{Z_{ab} + Z_{ba}\} = 0 \end{cases}\right\} a \neq b.$$

Der Faktor $\frac{1}{2}$ muß hinzugefügt werden, weil jeder Massenpunkt einmal als a, einmal als b auftritt.

Der Zusatz $a \neq b$ ist notwendig, weil ein Massenpunkt auf sich selbst keine Kraft ausüben kann. Natürlich kann man die Gleichungen (4) in eine Vektorgleichung zusammenfassen:

$$(5)\qquad \frac{1}{2}\sum_{a}^{1,n}\sum_{b}^{1,n}(\mathfrak{K}_{ab} + \mathfrak{K}_{ba}) = 0, \quad a \neq b.$$

Es sind nun, nachdem das System abgegrenzt ist, zwei Fälle möglich. Entweder sind die auf jeden Punkt des Systems wirkenden Kräfte sämtlich auf solche zurückführbar, die von anderen Punkten des Systems ausgehen, oder dies ist nur zum Teil möglich, indem auch noch Kräfte von fremden Massenpunkten, die dem System nicht angehören, wirksam sind. Im ersteren Falle nennt man die Kräfte sinngemäß „innere", im zweiten Falle hat man auch noch „äußere" heranzuziehen. **Wirken nur innere Kräfte an einem System, so heißt dasselbe ein „freies" oder ein „abgeschlossenes" System; im anderen Falle ist das System „unfrei".** Es ist klar, daß man ein unfreies System dadurch zu einem freien machen kann, daß man die Massenpunkte, von denen die äußeren Kräfte ausgehen, noch mit in das System einbezieht.

Wir wollen zunächst den Fall nehmen, daß das System frei sei. Dann stellen die Kraftsummen der Gleichung (5) sämtliche an den Massenpunkten des Systems wirkende Kräfte dar, andere Kräfte gibt es nicht, und dann kann man (5) etwas einfacher formulieren. Wir wollen einen Massenpunkt ν beliebig herausgreifen und nun sämtliche von den übrigen $(\nu - 1)$ Punkten auf ihn ausgeübten Kräfte summieren, d. h. die auf den Punkt ν wirkende **resultierende Kraft** bilden, die wir durch $\mathfrak{K}_\nu$ bezeichnen. Es ist also:

$$\mathfrak{K}_\nu = \mathfrak{K}_{1\nu} + \mathfrak{K}_{2\nu} + \cdots \mathfrak{K}_{\nu-1,\nu} + \mathfrak{K}_{\nu+1,\nu} + \cdots \mathfrak{K}_{n,\nu}$$

Wenn das geschehen ist, lassen wir nacheinander ν sämtliche Werte von 1 bis n durchlaufen, d. h. wir bilden die resultierende Kraft $\mathfrak{K}_1$ für den ersten, $\mathfrak{K}_2$ für den zweiten, ... $\mathfrak{K}_n$ für den letzten Punkt des Systems, und davon bilden wir nochmals die Resultante: $\sum_{\nu}^{1,n} \mathfrak{K}_\nu$.

Nun ist es klar, daß $\sum_{\nu}^{1,n} \mathfrak{K}_\nu$ die Resultante sämtlicher Kräfte des Systems darstellt, also genau dasselbe bedeutet, nur in anderem Gewande, wie Gleichung (5). Also können wir (5) schreiben:

(6) $$\sum_{\nu}^{1,n} \mathfrak{K}_\nu = 0,$$

d. h. in einem freien System ist die Resultante sämtlicher Kräfte gleich Null. In Koordinatendarstellung lautet (6) offenbar:

(7) $$\sum_{\nu} X_\nu = \sum_{\nu} Y_\nu = \sum_{\nu} Z_\nu = 0.$$

Für ein unfreies System gelten die Gleichungen (6) und (7) natürlich nicht, da dann noch die äußeren Kräfte hinzutreten, deren Summe selbstverständlich im allgemeinen nicht verschwindet.

Bezeichnen wir die Masse des νten Massenpunktes durch m_ν, seine Beschleunigung durch $\mathfrak{a}_\nu$ und ihre Komponenten resp. durch $\frac{d^2 x_\nu}{dt^2}$, $\frac{d^2 y_\nu}{dt^2}$, $\frac{d^2 z_\nu}{dt^2}$, so haben wir nach dem zweiten Newtonschen Bewegungsgesetz statt (6) und (7) für ein freies System:

(8) $$\sum_{\nu}^{1,n} m_\nu \mathfrak{a}_\nu = 0,$$

bzw.

(9) $$\begin{cases} \sum_{\nu} m_\nu \frac{d^2 x_\nu}{dt^2} = 0, \\ \sum_{\nu} m_\nu \frac{d^2 y_\nu}{dt^2} = 0, \\ \sum_{\nu} m_\nu \frac{d^2 z_\nu}{dt^2} = 0. \end{cases}$$

Zum Schlusse dieser Nummer sei nochmals betont, daß das Reaktionsprinzip ein Erfahrungssatz ist. Wenn derselbe auch in der Mechanik stets bisher bestätigt worden ist, so kann doch grundsätzlich nicht die Möglichkeit von neuen Erfahrungen ausgeschlossen werden, die ihm widersprechen. Solche scheinen neuerdings auf dem Gebiete der Elektrodynamik vorzuliegen; dort (im zweiten Bande dieses Buches) werden wir darauf genauer einzugehen haben.

46. Massenmittelpunkt oder Schwerpunkt.

Wir wollen uns zunächst mit den Bewegungen eines freien Systems unter dem Einfluß der inneren Kräfte beschäftigen, welch letztere die Gleichungen (9) erfüllen. Um allgemeine Resultate zu erhalten, ist es zweckmäßig, einen neuen Begriff einzuführen, zu dem die Form der Gleichungen (9) schon hinleitet.

Wir wollen nämlich einen Punkt mit dem Koordinaten $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ derartig bestimmen, daß letztere den Gleichungen gehorchen:

$$(10) \quad \begin{cases} \mathfrak{x}\sum_{\nu}^{1,n} m_\nu = \sum_{\nu}^{1,n} m_\nu x_\nu, \\ \mathfrak{y}\sum_{\nu} m_\nu = \sum_{\nu} m_\nu y_\nu, \\ \mathfrak{z}\sum_{\nu} m_\nu = \sum_{\nu} m_\nu z_\nu. \end{cases}$$

Dieser so bestimmte Punkt wird als „Massenmittelpunkt" oder „Schwerpunkt" bezeichnet. Man erkennt aus den Definitionsgleichungen leicht den Grund für die erstere Benennung; seine Koordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$, stellen ja offenbar in bestimmter Weise gebildete Mittelwerte aus den Massen und Koordinaten der einzelnen Systempunkte dar. Die Bestimmung dieses Punktes ist also, wenn die Massen und die Lage der Punkte des Systems gegeben sind, eine stets lösbare Aufgabe; es ist ein geometrischer Punkt, der dadurch festgelegt wird und der keineswegs mit einem Massenpunkt zusammenzufallen braucht.

Die experimentelle Bestimmung des Massenmittelpunktes ist aus den Elementen bekannt. Wir gehen darauf nicht näher ein. Hier sei nur noch eine Bemerkung eingefügt für den besonderen Fall, daß die Massenpunkte des Systems sehr zahlreich sind und außerordentlich dicht beieinander liegen. Solche Systeme sind nach der Vorstellung der Physik fast alle ausgedehnten Körper, die man sich aus Molekülen aufgebaut denkt. Diese liegen so dicht für unsere Sinne, daß viele Körper für manche Zwecke als kontinuierlich betrachtet werden können. Wenn wir also jetzt zu einem kontinuierlichen Körper übergehen, so haben wir nach (10) jedes unendlich kleine Massenelement dm mit seinem Abstande x von der yz-Ebene zu multiplizieren usw., so daß wir z. B. für die erste Gleichung (10) erhalten:

$$\mathfrak{x}\sum dm = \sum dm \cdot x,$$

und dann kann man die Summen wegen der unendlichen Kleinheit des Massenelementes durch Integrationen über die Gesamtmasse des Körpers ersetzen; also:

$$\mathfrak{x}\int dm = \int dm \cdot x.$$

Nennen wir noch das Volumen eines solchen Massenelementes dm etwa $d\tau$ und den Quotienten

$$\frac{dm}{d\tau} = s, \tag{11}$$

so ist s offenbar die Masse pro Volumeinheit, die als „spezifische Dichte des Körpers" bezeichnet wird. Dann hat man, wenn man dm durch $s\,d\tau$ ersetzt:

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{x}\int s\,d\tau &= \int s\,x\,d\tau, \\ \mathfrak{y}\int s\,d\tau &= \int s\,y\,d\tau, \\ \mathfrak{z}\int s\,d\tau &= \int s\,z\,d\tau. \end{aligned}\right. \tag{12}$$

Wenn die Dichte als Funktion des Ortes gegeben ist, so kann man in gewissen einfachen Fällen die Integrationen ausführen und so den Schwerpunkt finden. Für eine homogene Kugel z. B. erhält man das Resultat,

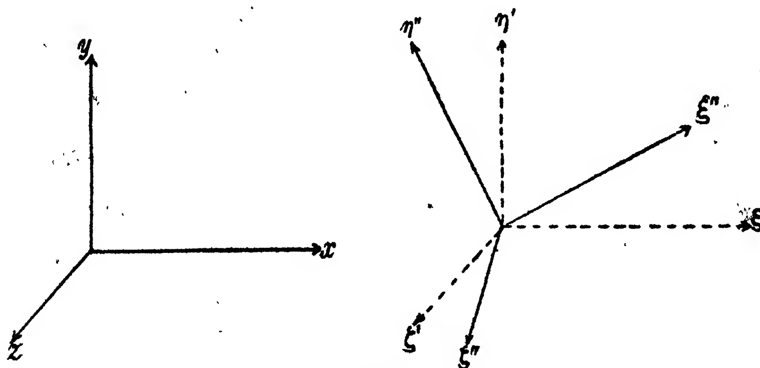


Fig. 51.

daß ihr Schwerpunkt mit dem geometrischen Mittelpunkte zusammenfällt usw.

Wir müssen nun beweisen, daß der Schwerpunkt ein durch die Massen und die geometrische Konfiguration des Systems bestimmter Punkt, d. h. **unabhängig von der Lage und Art des gewählten Koordinatensystems ist.**

Zu dem Zwecke müssen wir zeigen, daß, wenn wir statt des Systems (x, y, z) ein beliebiges anderes (ξ'', η'', ζ'') wählen, wir zu **demselben** Punkte kommen. Die beiden Systeme (x, y, z) und (ξ'', η'', ζ'') mögen etwa die in der Fig. 51 angedeutete Lage zueinander haben, und zwar seien die Koordinaten des Anfangspunktes von (ξ'', η'', ζ'') in bezug auf (x, y, z) etwa (A, B, C). Nun denken wir uns durch den Punkt (A, B, C) parallel zu den Achsen des ursprünglichen Systems (x, y, z) drei Achsen (ξ', η', ζ') gezogen (in Fig. 51 punktiert). Dann sieht man

sofort folgendes ein: Das System (ξ'', η'', ζ'') kann dadurch aus (x, y, z) hervorgebracht gedacht werden, daß man erstens das System (x, y, z) parallel zu sich selbst verschiebt, bis sein Anfangspunkt im Punkte (A, B, C) liegt: das gibt das Hilfssystem (ξ', η', ζ'). Dreht man dies endlich um den Anfangspunkt (A, B, C) in geeigneter Weise, so kann man es offenbar mit (ξ'', η'', ζ'') zur Deckung bringen. Also: Das System (ξ'', η'', ζ'') kann aus (x, y, z) durch eine Parallelverschiebung und eine Drehung hervorgebracht werden.

Wir können uns also darauf beschränken, zu zeigen, daß sowohl bei einer Parallelverschiebung als auch bei einer Drehung um einen festen Anfangspunkt man zu demselben Schwerpunkte gelangt.

Zwischen den Koordinaten (ξ', η', ζ') und (x, y, z) eines und desselben Punktes bestehen offenbar folgende Beziehungen:

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \xi' + A, \\ y &= \eta' + B, \\ z &= \zeta' + C. \end{aligned}\right.$$

Bilden wir nun den Schwerpunkt für das Koordinatensystem (ξ', η', ζ') nach Vorschrift der Gleichung (10), so haben wir für seine Koordinaten $(\mathfrak{x}', \mathfrak{y}', \mathfrak{z}')$ zu setzen:

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{x}' \sum m_\nu &= \sum m_\nu \xi_\nu', \\ \mathfrak{y}' \sum m_\nu &= \sum m_\nu \eta_\nu', \\ \mathfrak{z}' \sum m_\nu &= \sum m_\nu \zeta_\nu'. \end{aligned}\right.$$

Anderseits ist nach (10), wenn wir mit Hilfe von (13) x_ν, y_ν, z_ν durch ξ_ν', η_ν', ζ_ν' ausdrücken:

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{x} \sum m_\nu &= \sum m_\nu \xi_\nu' + A \sum m_\nu, \\ \mathfrak{y} \sum m_\nu &= \sum m_\nu \eta_\nu' + B \sum m_\nu, \\ \mathfrak{z} \sum m_\nu &= \sum m_\nu \zeta_\nu' + C \sum m_\nu, \end{aligned}\right.$$

oder, wenn wir für $\Sigma m_\nu \xi_\nu' \ldots$ die aus (14) folgenden Werte einsetzen und durch den gemeinsamen Faktor Σm_ν kürzen:

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{x} &= \mathfrak{x}' + A, \\ \mathfrak{y} &= \mathfrak{y}' + B, \\ \mathfrak{z} &= \mathfrak{z}' + C. \end{aligned}\right.$$

Das ist aber gemäß (13) genau diejenige Relation zwischen $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ und $(\mathfrak{x}', \mathfrak{y}', \mathfrak{z}')$, die zwischen den Koordinaten eines und desselben Punktes, einmal bezogen auf das System (x, y, z) das zweite Mal bezogen auf (ξ', η', ζ'), bestehen muß. Also stellen in der Tat $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ und $(\mathfrak{x}', \mathfrak{y}', \mathfrak{z}')$ denselben Punkt in bezug auf zwei Koordinatensysteme dar, die eine Parallelverschiebung gegeneinander erlitten haben. Also: Eine Parallelverschiebung des Koordinatensystems läßt den Schwerpunkt des Systems ungeändert.

Endlich geht das System (ξ'', η'', ζ'') aus (ξ', η', ζ') durch eine Drehung hervor. Es bestehen also zwischen ξ'', η'', ζ'' und ξ', η', ζ' die Relationen der Gleichung (33) des ersten Kapitels (pag. 23):

$$(17)\qquad \begin{cases} \xi'' = \xi' \cos\alpha_1 + \eta' \cos\beta_1 + \zeta' \cos\gamma_1, \\ \eta'' = \xi' \cos\alpha_2 + \eta' \cos\beta_2 + \zeta' \cos\gamma_2, \\ \zeta'' = \xi' \cos\alpha_3 + \eta' \cos\beta_3 + \zeta' \cos\gamma_3, \end{cases}$$

wobei natürlich zwischen den α, β, γ noch Beziehungen bestehen, die uns aber hier gleichgültig sind. Bilden wir, immer nach Vorschrift von (10), die Koordinaten $(\mathfrak{x}'', \mathfrak{y}'', \mathfrak{z}'')$ des Schwerpunktes in Bezug auf das System (ξ'', η'', ζ''), so haben wir zunächst:

$$(18)\qquad \begin{cases} \mathfrak{x}'' \sum m_\nu = \sum m_\nu \xi_\nu'', \\ \mathfrak{y}'' \sum m_\nu = \sum m_\nu \eta_\nu'', \\ \mathfrak{z}'' \sum m_\nu = \sum m_\nu \zeta_\nu'', \end{cases}$$

oder nach (17):

$$(19)\qquad \begin{cases} \mathfrak{x}'' \sum\limits_\nu m_\nu = \sum\limits_\nu m_\nu \{\xi_\nu' \cos\alpha_1 + \eta_\nu' \cos\beta_1 + \zeta_\nu' \cos\gamma_1\}, \\ \mathfrak{y}'' \sum\limits_\nu m_\nu = \sum\limits_\nu m_\nu \{\xi_\nu' \cos\alpha_2 + \eta_\nu' \cos\beta_2 + \zeta_\nu' \cos\gamma_2\}, \\ \mathfrak{z}'' \sum\limits_\nu m_\nu = \sum\limits_\nu m_\nu \{\xi_\nu' \cos\alpha_3 + \eta_\nu' \cos\beta_3 + \zeta_\nu' \cos\gamma_3\}, \end{cases}$$

oder, nach (14), wenn der gemeinsame Faktor $\Sigma\, m_\nu$ gestrichen wird:

$$(20)\qquad \begin{cases} \mathfrak{x}'' = \mathfrak{x}' \cos\alpha_1 + \mathfrak{y}' \cos\beta_1 + \mathfrak{z}' \cos\gamma_1, \\ \mathfrak{y}'' = \mathfrak{x}' \cos\alpha_2 + \mathfrak{y}' \cos\beta_2 + \mathfrak{z}' \cos\gamma_2, \\ \mathfrak{z}'' = \mathfrak{x}' \cos\alpha_3 + \mathfrak{y}' \cos\beta_3 + \mathfrak{z}' \cos\gamma_3. \end{cases}$$

Da dies nach (17) dieselben Relationen zwischen den Koordinaten des auf (ξ'', η'', ζ'') und auf (ξ', η', ζ') bezogenen Schwerpunktes sind, die auch zwischen den Koordinaten eines und desselben Punktes, der einmal auf (ξ'', η'', ζ''), das andere Mal auf (ξ', η', ζ') bezogen ist, bestehen müssen, so stellt wirklich $(\mathfrak{x}'', \mathfrak{y}'', \mathfrak{z}'')$ denselben Punkt dar, wie $(\mathfrak{x}', \mathfrak{y}', \mathfrak{z}')$, und folglich auch wie $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$. Also folgt das wichtige Resultat: die Lage des Schwerpunktes ist von dem gewählten Koordinatensysteme gänzlich unabhängig.

47. Bewegung des Schwerpunktes eines beliebigen Systems; Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes für ein freies System.

Wir wollen zunächst ein beliebiges (unfreies) System ins Auge fassen, auf das also neben den inneren auch äußere Kräfte wirken. Die Resultante der inneren und äußeren Kräfte, die auf den beliebigen Massen-

punkt ν wirkt, nennen wir wie vorher $\mathfrak{K}_\nu$, und es ist dann nach dem zweiten Newtonschen Bewegungsgesetz:

(21) $$\mathfrak{K}_\nu = m_\nu \mathfrak{a}_\nu .$$

Wir wollen nun sämtliche Kräfte, die an dem System wirksam sind, addieren, also den Ausdruck $\sum_\nu^{1,n} \mathfrak{K}_\nu$ bilden. Dieser ist jetzt keineswegs gleich Null, denn die Gleichung (6) gilt nur für ein freies System. Wir werden also aus (21) erhalten, wenn wir gleichzeitig eine Koordinatenzerlegung vornehmen:

(22) $$\left\{\begin{aligned} \sum_\nu^{1,n} X_\nu &= \sum_\nu m_\nu \frac{d^2 x_\nu}{d t^2}, \\ \sum_\nu Y_\nu &= \sum_\nu m_\nu \frac{d^2 y_\nu}{d t^2}, \\ \sum_\nu Z_\nu &= \sum_\nu m_\nu \frac{d^2 z_\nu}{d t^2}. \end{aligned}\right.$$

Führen wir nun die Koordinaten des Schwerpunktes gemäß Gleichung (10) ein, so wird aus (22):

(23) $$\left\{\begin{aligned} \sum X_\nu &= \frac{d^2 \mathfrak{x}}{d t^2} \sum m_\nu = M \frac{d^2 \mathfrak{x}}{d t^2}, \\ \sum Y_\nu &= \frac{d^2 \mathfrak{y}}{d t^2} \sum m_\nu = M \frac{d^2 \mathfrak{y}}{d t^2}, \\ \sum Z_\nu &= \frac{d^2 \mathfrak{z}}{d t^2} \sum m_\nu = M \frac{d^2 \mathfrak{z}}{d t^2}, \end{aligned}\right.$$

wenn wir $\sum_\nu m_\nu$, die Gesamtsumme des Systems, durch M bezeichnen. Die Gleichungen (23) haben genau die Form der Newtonschen Bewegungsgleichungen. Links stehen die x-, y-, z-Komponenten der auf das System wirkenden resultierenden Kraft; rechts die Produkte aus der Gesamtmasse des Systems in die entsprechenden Beschleunigungskomponenten des Schwerpunktes. Wir erhalten also den Satz: „Der Schwerpunkt eines Systems materieller Punkte bewegt sich so, als ob in ihm die Gesamtmasse des Systems konzentriert wäre und an ihm die Resultante sämtlicher Systemkräfte angriffe. Da die inneren Kräfte des Systems sich nach Gleichung (6) gegenseitig kompensieren, so kann man unter ΣX_ν, ... in Gleichung (23) auch allein die Summe der äußeren Kräfte verstehen. Der Schwerpunkt eines Systems bewegt sich also wie ein einzelner substantieller Punkt. Darauf beruht es, daß wir in den Betrachtungen des zweiten Kapitels statt substantieller Punkte ausgedehnte Körper, z. B. Kugeln, nehmen konnten und lediglich die Bewegung ihres Schwerpunktes (also hier des Kugelmittelpunktes) betrachteten. Das erhält jetzt seine Rechtferti-

gung. Auch der Name Schwerpunkt erfährt jetzt seine Erklärung. Betrachten wir einen Körper, so greift die Schwere an seinen sämtlichen Massenpunkten, also an seinen sämtlichen Molekülen an. Statt dessen können wir nach dem obigen Satze die Schwere auch im Massenmittelpunkte, in dem wir die Gesamtmasse konzentrieren, angreifend denken, und daher hat dieser Punkt ursprünglich den Namen Schwerpunkt erhalten, der aber, wie man sieht, zu eng ist, da der obige Satz für alle äußeren Kräfte gilt.

Die Gleichungen (22) und (23) gestatten eine anschauliche Formulierung mit Hilfe der in Nr. 32 eingeführten Begriffe der „Stoßkraft" und des „Impulses". Denn wir können (22) zusammenfassen in die folgende Vektorgleichung:

(22a)
$$\sum_{\nu}^{1,n} \mathfrak{K}_\nu = \frac{d}{dt} \sum_{\nu}^{1,n} m_\nu \mathfrak{c}_\nu,$$

deren Form eine Integration nach der Zeit, etwa von t_0 bis t_1 nahelegt. Dann folgt:

(22b)
$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{\nu}^{1,n} \mathfrak{K}_\nu\, dt = \sum_{\nu}^{1,n} \int_{t_0}^{t_1} \mathfrak{K}_\nu\, dt = \Big[\sum_\nu m_\nu \mathfrak{c}_\nu\Big]_{t_1} - \Big[\sum_\nu m_\nu \mathfrak{c}_\nu\Big]_{t_0}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist offenbar die resultierende Stoßkraft, die rechte stellt die Differenz der gesamten Bewegungsgröße $\mathfrak{Q} = \sum_\nu \mathfrak{Q}_\nu = \sum_{\nu}^{1,n} m_\nu \mathfrak{c}_\nu$ zu den Zeiten t_1 und t_0 dar. Also können wir schreiben:

(22c)
$$\sum_{\nu}^{1,n} \int_{t_0}^{t_1} \mathfrak{K}_\nu\, dt = \mathfrak{Q}_1 - \mathfrak{Q}_0,$$

eine Gleichung, die mit (22) und (23) äquivalent ist und folgendermaßen formuliert werden kann:

Die resultierende Stoßkraft ist gleich der Zunahme des Gesamtimpulses des Systems. In dieser Form heißt der Schwerpunktsatz auch der erste Impulssatz; man nennt aber auch häufig die Gleichungen (23) oder (22a) so.

Wenn wir jetzt zu einem freien System übergehen, so sind nach Gleichung (6) die Kraftsummen auf der linken Seite von (23) gleich Null, und es folgt für die Bewegung des Schwerpunktes eines freien Systems:

(24)
$$\frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2} = \frac{d^2\mathfrak{y}}{dt^2} = \frac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2} = 0,$$

in Worten: Der Schwerpunkt eines freien Systems führt eine unbeschleunigte, d. h. geradlinige und gleichförmige Bewegung aus, oder auch: „Der Schwerpunkt eines freien Systems ist kräftefrei".

„Geradlinig“ und „unbeschleunigt“ ist natürlich relativ zum Fundamentalsystem zu verstehen. Da nun jedes relativ zum Fundamentalsystem in gleichmäßiger Translationsbewegung befindliche Koordinatensystem diesem äquivalent ist, so kann man den Anfangspunkt des Koordinatensystems, das wir zugrunde legen, stets mit dem Schwerpunkt eines freien Systems zusammenfallen und sich mit diesem bewegen lassen. Dann kann man also behaupten: mit unserer Mechanik ist die Auffassung verträglich, d. h. durch kein mechanisches Experiment widerlegbar, daß der Schwerpunkt eines freien Systems „absolut“ ruht.

Man nennt den in (24) enthaltenen Satz: den Satz von der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes; Beispiele für denselben bietet das tägliche Leben in Hülle und Fülle: der Schwerpunkt des Systems Kanone-Kugel bleibt nach Abfeuerung des Schusses in Ruhe; das Herausfliegen der Kugel nach vorne würde den Schwerpunkt nach vorn verlegen, aber das wird kompensiert durch eine Rückwärtsbewegung der Kanone, den „Rückstoß“. Ein Segelschiff kann dadurch nicht vorwärts bewegt werden, daß im Boot befindliche Personen Wind ins Segel blasen, während dies möglich ist, wenn die betreffenden Personen außerhalb des Bootes sich befinden. Das sind natürlich gleichzeitig alles Beispiele für das Prinzip von der Gleichheit von actio und reactio.

Die Integration von (24) liefert zunächst für die Geschwindigkeit des Schwerpunktes, wenn ihre Komponenten zur Zeit $t=0$ mit $\mathfrak{u}_0$, $\mathfrak{v}_0$, $\mathfrak{w}_0$ bezeichnet werden:

$$(25)\quad \begin{cases} \dfrac{d\mathfrak{x}}{dt} = \mathfrak{u}_0, \\ \dfrac{d\mathfrak{y}}{dt} = \mathfrak{v}_0, \\ \dfrac{d\mathfrak{z}}{dt} = \mathfrak{w}_0, \end{cases}$$

und für die Lage desselben zur Zeit t:

$$(26)\quad \begin{cases} \mathfrak{x} = \mathfrak{u}_0 t + \mathfrak{x}_0, \\ \mathfrak{y} = \mathfrak{v}_0 t + \mathfrak{y}_0, \\ \mathfrak{z} = \mathfrak{w}_0 t + \mathfrak{z}_0, \end{cases}$$

wenn $\mathfrak{x}_0$, $\mathfrak{y}_0$, $\mathfrak{z}_0$ die Koordinaten desselben zur Zeit $t = 0$ sind.

Durch Einführung des Begriffes der Bewegungsgröße oder des Impulses kann man die Gleichung (25) noch etwas anders formulieren. Denn multiplizieren wir die Gleichung (25) mit $\Sigma m_\nu = M$, so folgt, wenn wir $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ durch ihre Werte nach Gleichung (10) wieder ersetzen:

$$(27)\quad \begin{cases} \sum m_\nu \dfrac{dx_\nu}{dt} = M\mathfrak{u}_0, \\ \sum m_\nu \dfrac{dy_\nu}{dt} = M\mathfrak{v}_0, \\ \sum m_\nu \dfrac{dz_\nu}{dt} = M\mathfrak{w}_0, \end{cases}$$

oder in einer Vektorgleichung zusammengefaßt, wenn $\mathfrak{c}_\nu$ die Geschwindigkeit des ν^{ten} Massenpunktes bedeutet:

(28) $$\sum m_\nu \mathfrak{c}_\nu = M \bar{\mathfrak{c}}_0 .$$

Dann ist die linke Seite offenbar die gesamte Bewegungsgröße (oder der Gesamtimpuls), die wir wieder $\mathfrak{Q} = \sum_\nu \mathfrak{Q}_\nu$ nennen, indem $\mathfrak{Q}_\nu$ wie vorher die Bewegungsgröße des ν^{ten} Massenpunktes bedeutet. Dann kann man (28) bzw. das identische (27) so formulieren: „Die Bewegungsgröße oder der Gesamtimpuls eines freien Systems bleibt konstant."

Da wir unter Impuls diejenige spezielle Stoßkraft verstehen, die das betrachtete System aus dem Zustande der Ruhe in seinen augenblicklichen Geschwindigkeitszustand überführt, so hat der eben ausgesprochene Satz eine einfache, mechanisch anschauliche Bedeutung: Betrachten wir das in Frage stehende freie System zu verschiedenen Zeiten, so werden seine einzelnen Massenpunkte m_ν im allgemeinen verschiedene Geschwindigkeiten $\mathfrak{c}_\nu$ besitzen. Für jeden einzelnen Massenpunkt m_ν wird also der Impuls $\mathfrak{Q}_\nu = m_\nu \mathfrak{c}_\nu$ mit der Zeit sich ändern, aber der Gesamtimpuls $\sum_\nu \mathfrak{Q}_\nu$ nicht; er verteilt sich nur anders auf die verschiedenen Massenpunktes des Systems. Betrachten wir also unser freies System auch in den verschiedensten Zuständen: stets ist dieselbe Stoßkraft erforderlich, um es aus der Ruhe in den gerade ins Auge gefaßten Geschwindigkeitszustand zu bringen.

Der Schwerpunktssatz liefert für ein freies System stets ein Integral der Bewegungsgleichungen mit sechs disponiblen Konstanten. Beispiele werden wir im nächsten Kapitel kennen lernen.

48. Das Vektorprodukt.

Zur Vorbereitung auf die folgende Nummer ist es zweckmäßig, einen neuen Begriff der Vektoranalysis einzuführen. Wir haben bereits in Nr. 27 ein Produkt von Vektoren, das sogenannte skalare (oder „innere") Produkt, kennen gelernt, und zwar hatten wir es dahin definiert, daß unter dem skalaren Produkte der Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ der Ausdruck

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = |\mathfrak{A}| \cdot |\mathfrak{B}| \cos (\mathfrak{A}\mathfrak{B})$$

verstanden werden sollte. Dieses Produkt ist ein Skalar. Man kann jedoch auch ein anderes Produkt von Vektoren definieren, welches man im Gegensatz zu dem Obigen das „äußere" oder das „Vektorprodukt" nennt.

Wir verstehen unter dem Vektorprodukt $\mathfrak{C}$ der Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ geschrieben

(29) $$\mathfrak{C} = [\mathfrak{A}.\ \mathfrak{B}],$$

einen Vektor $\mathfrak{C}$, dessen Richtung senkrecht auf der Ebene der beiden Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ steht, dessen absoluter Betrag $|\mathfrak{C}|$

(29a) $$|\mathfrak{C}| = |\mathfrak{A}| \cdot |\mathfrak{B}| \sin(\mathfrak{A}\mathfrak{B}),$$

d. h. gleich dem Flächeninhalte des aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ konstruierten Parallelogramms ist; dabei ist der Winkel $(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$ stets spitz oder stumpf, der Sinus also positiv zu nehmen.

In dieser Definition ist die positive Richtung des Vektors $\mathfrak{C} = [\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$ noch zweideutig, da die Normale auf der Ebene von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ nach oben und nach unten gezogen werden kann. Um diese Zweideutigkeit zu beseitigen, setzen wir noch fest, daß die Richtung der Vektoren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C} = [\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$ zueinander dieselbe sein soll, wie die der x-, y-, z-Achsen unseres rechtshändigen Koordinatensystems.

Wenn also die Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gegeben sind (Fig. 52a), so ist damit die Richtung des Vektorproduktes $\mathfrak{C} = [\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$ ebenfalls festgelegt (Fig. 52b).

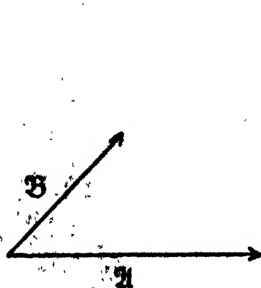


Fig. 52a.

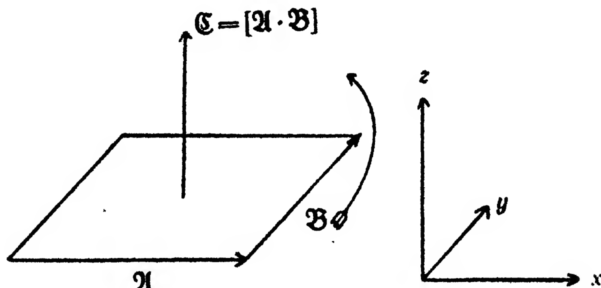


Fig. 52b.

Man sieht in der Tat, daß die Richtungen von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ aufeinander folgen, wie die Richtungen der drei Achsen x, y, z. Man kann dies noch etwas anders ausdrücken: denken wir uns einen Punkt den Umfang des Parallelogramms beschreiben, und zwar so, daß er zunächst den im Produkt $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$ an erster Stelle stehenden Vektor $\mathfrak{A}$ und dann $\mathfrak{B}$, beide in ihrer positiven Richtung, durchläuft, so wird das Parallelogramm in einem bestimmten Sinne umkreist (Pfeilrichtung in Fig. 52b). Entspricht dieser Umlaufsinn, wie in Fig. 52b, dem Sinne, in dem man auf dem kürzesten Wege von der positiven x- zur positiven y-Achse gelangt, so stimmt die Richtung der Normale auf der Ebene von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ mit der Richtung der positiven z-Achse überein. Dies ist offenbar nur eine andere Formulierung, die manchmal bequemer ist.

Wir wollen nun fragen nach der Bedeutung des Vektorproduktes $[\mathfrak{B}\mathfrak{A}]$. Der absolute Betrag desselben ist $|[\mathfrak{B}\mathfrak{A}]| = |\mathfrak{B}| \cdot |\mathfrak{A}| \cdot \sin(\mathfrak{B}\mathfrak{A})$, also genau der nämliche, wie der Betrag von $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$. Wie steht es nun mit der Richtung? Legen wir die Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ von Fig. 52a zugrunde, so haben wir Fig. 53.

Umkreisen wir das Parallelogramm, indem zuerst der Vektor $\mathfrak{B}$ und dann $\mathfrak{A}$ in ihrer positiven Richtung durchlaufen werden (Pfeilrichtung in Fig. 53), so erkennt man, daß diese Umkreisungsrichtung entgegengesetzt ist derjenigen in Fig. 52b. Also muß auch die Normale in diesem Falle positiv nach unten gerichtet sein. Der Vektor $\mathfrak{C}' = [\mathfrak{B}\mathfrak{A}]$ hat also denselben Betrag, aber die umgekehrte Richtung wie $\mathfrak{C} = [\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$, also folgt das wichtige Resultat:

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = -[\mathfrak{B}\mathfrak{A}]. \tag{30}$$

d. h. das kommutative Gesetz der gewöhnlichen Multiplikation gilt für das Vektorprodukt nicht mehr.

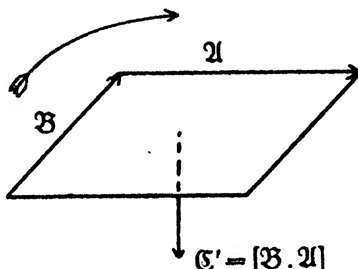


Fig. 53.

Wir wollen nun zur Komponentendarstellung des Vektors $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$ übergehen, d. h. die Ausdrücke $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]_x$, $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]_y$, $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]_z$ bilden. Die Richtung von $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]_x$ ist ja selbstverständlich: es ist die positive x-Richtung, und genau so ist es mit den übrigen Komponenten. Den Betrag erhalten wir offenbar, indem wir den Flächeninhalt $|\mathfrak{A}|\cdot|\mathfrak{B}|\sin(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$ auf die yz-Ebene projizieren; die Projektion dieser Fläche gibt dann den Betrag von $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]_x$ an. In der yz-Ebene kommen von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ nur die Komponenten $\mathfrak{A}_y$, $\mathfrak{A}_z$, $\mathfrak{B}_y$, $\mathfrak{B}_z$ in Betracht, die sich in dieser Ebene bzw. zu den Resultanten $\sqrt{\mathfrak{A}_y^2+\mathfrak{A}_z^2}$ bzw. $\sqrt{\mathfrak{B}_y^2+\mathfrak{B}_z^2}$ zusammensetzen. Der Kosinus des Winkels φ zwischen ihnen ist offenbar:

$$\frac{\mathfrak{A}_y\mathfrak{B}_y + \mathfrak{A}_z\mathfrak{B}_z}{\sqrt{\mathfrak{A}_y^2+\mathfrak{A}_z^2}\cdot\sqrt{\mathfrak{B}_y^2+\mathfrak{B}_z^2}},$$

also ergibt sich für den zu bildenden Sinus φ:

$$\sin\varphi = +\sqrt{1 - \frac{(\mathfrak{A}_y\mathfrak{B}_y + \mathfrak{A}_z\mathfrak{B}_z)^2}{(\mathfrak{A}_y^2+\mathfrak{A}_z^2)\cdot(\mathfrak{B}_y^2+\mathfrak{B}_z^2)}}.$$

Also erhalten wir für den Betrag von $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]_x$:

$$|[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]_x| = \sqrt{\mathfrak{A}_y^2+\mathfrak{A}_z^2}\cdot\sqrt{\mathfrak{B}_y^2+\mathfrak{B}_z^2}\cdot\sqrt{1 - \frac{(\mathfrak{A}_y\mathfrak{B}_y + \mathfrak{A}_z\mathfrak{B}_z)^2}{(\mathfrak{A}_y^2+\mathfrak{A}_z^2)\cdot(\mathfrak{B}_y^2+\mathfrak{B}_z^2)}}$$

und die Ausrechnung ergibt das einfache Resultat:

$$(31)\quad \begin{cases} [\mathfrak{A}\mathfrak{B}]_x = \mathfrak{A}_y\mathfrak{B}_z - \mathfrak{A}_z\mathfrak{B}_y, \\ [\mathfrak{A}\mathfrak{B}]_y = \mathfrak{A}_z\mathfrak{B}_x - \mathfrak{A}_x\mathfrak{B}_z, \\ [\mathfrak{A}\mathfrak{B}]_z = \mathfrak{A}_x\mathfrak{B}_y - \mathfrak{A}_y\mathfrak{B}_x. \end{cases}$$

Man kann sich die Komponenten von $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$ leicht merken, indem man die symbolische Determinante betrachtet:

$$\Delta = \begin{vmatrix} (x) & (y) & (z) \\ \mathfrak{A}_x & \mathfrak{A}_y & \mathfrak{A}_z \\ \mathfrak{B}_x & \mathfrak{B}_y & \mathfrak{B}_z \end{vmatrix}.$$

Entwickelt man diese nach den Gliedern der ersten Horizontalreihe, so folgt:

$$(32)\quad \Delta = (x)\{\mathfrak{A}_y\mathfrak{B}_z - \mathfrak{A}_z\mathfrak{B}_y\} + (y)\{\mathfrak{A}_z\mathfrak{B}_x - \mathfrak{A}_x\mathfrak{B}_z\} = (z)\{\mathfrak{A}_x\mathfrak{B}_y - \mathfrak{A}_y\mathfrak{B}_x\}.$$

Der Vergleich von (31) und (32) ergibt, daß die Koeffizienten von (x), (y), (z) bzw. die x-, y-, z-Komponenten des Vektorproduktes darstellen. Durch Benutzung der Komponentenausdrücke folgt nun auch leicht die Gültigkeit des distributiven Gesetzes der gewöhnlichen Multiplikation, d. h. die Richtigkeit der Formel:

$$(33)\quad [\mathfrak{A} + \mathfrak{B}, \mathfrak{C}] = [\mathfrak{A}\mathfrak{C}] + [\mathfrak{B}\mathfrak{C}],$$

wo $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ irgend drei Vektoren sind. Denn z. B. für die x-Komponente haben wir nach (31):

$$[\mathfrak{A}+\mathfrak{B}, \mathfrak{C}]_x = (\mathfrak{A}+\mathfrak{B})_y\mathfrak{C}_z - (\mathfrak{A}+\mathfrak{B})_z\mathfrak{C}_y = (\mathfrak{A}_y\mathfrak{C}_z - \mathfrak{A}_z\mathfrak{C}_y) + (\mathfrak{B}_y\mathfrak{C}_z - \mathfrak{B}_z\mathfrak{C}_y),$$

also:

$$[\mathfrak{A} + \mathfrak{B}, \mathfrak{C}]_x = [\mathfrak{A}\mathfrak{C}]_x + [\mathfrak{B}\mathfrak{C}]_x.$$

Analog für die übrigen Komponenten; also folgt in der Tat durch vektorielle Zusammenfassung die Gleichung (33).

Eine wichtige Bemerkung muß noch gemacht werden. Das Vektorprodukt ist seiner Richtung nach nicht mehr definiert, wenn entweder $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B}$ oder der Winkel $(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$ verschwindet; in allen drei Fällen ist aber der absolute Betrag gleich Null. Umgekehrt sei die Gleichung

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = 0$$

vorgelegt. Diese hat nach dem obigen die drei Lösungen:

$$\mathfrak{A} = 0, \quad \text{oder} \quad \mathfrak{B} = 0, \quad \text{oder} \quad \sin(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = 0.$$

Nach diesen Vorbereitungen kehren wir wieder zu unserem System von Massenpunkten zurück.

49. Die Rotationsmomente.

Wenn der Schwerpunkt eines Massensystems im Raume festgehalten wird, so wird dadurch die Bewegungsmöglichkeit des Systems natürlich in erheblicher Weise eingeschränkt. Man erkennt aber sofort, daß in

jedem Falle noch Rotationsbewegungen um durch den Schwerpunkt gehende Achsen möglich sind. Diese Erkenntnis führt uns zu der Aufstellung eines wichtigen Begriffes, nämlich des Begriffes des „Rotationsmoments“ oder des „Drehmoments“ um eine bestimmte Achse.

Die Gleichungen (21) für einen beliebigen Massenpunkt m des Systems lauten in Komponentendarstellung:

$$(33a)\qquad \begin{cases} X_\nu = m_\nu \dfrac{d^2 x_\nu}{d t^2}, \\ Y_\nu = m_\nu \dfrac{d^2 y_\nu}{d t^2}, \\ Z_\nu = m_\nu \dfrac{d^2 z_\nu}{d t^2}. \end{cases}$$

Erweitern wir die erste mit y_ν, die zweite mit x_ν, und subtrahieren die erste von der zweiten, so folgt:

$$Y_\nu x_\nu - X_\nu y_\nu = m_\nu \left\{\frac{d^2 y_\nu}{d t^2} x_\nu - \frac{d^2 x_\nu}{d t^2} y_\nu\right\}.$$

Wir erkennen hier diejenige Operation wieder, die wir schon einige Male z. B. in Nr. 41 (Gleichung 135 auf pag. 148), Nr. 42 (Gleichung 170 auf pag. 158), Nr. 43 (Gleichung 199 auf pag. 168) angewendet haben, um zu einer einmaligen Integration der Bewegungsgleichungen zu gelangen. Jetzt untersuchen wir den allgemeinen Fall dieser Methode.

Summieren wir die letzte Gleichung, über alle Massenpunkte ν von 1 bis n, und machen die nämliche Operation mit bzw. der zweiten und dritten, und der dritten und ersten Gleichung, was einfach durch zyklische Vertauschung der Buchstaben x_ν, y_ν, z_ν bzw. X_ν, Y_ν, Z_ν in der letzten Gleichung geschehen kann, so erhalten wir folgende drei Gleichungen:

$$(34)\qquad \begin{cases} \sum\limits_\nu \left\{Y_\nu x_\nu - X_\nu y_\nu\right\} = \sum\limits_\nu m_\nu \left\{\dfrac{d^2 y_\nu}{d t^2} x_\nu - \dfrac{d^2 x_\nu}{d t^2} y_\nu\right\}, \\ \sum\limits_\nu \left\{Z_\nu y_\nu - Y_\nu z_\nu\right\} = \sum\limits_\nu m_\nu \left\{\dfrac{d^2 z_\nu}{d t^2} y_\nu - \dfrac{d^2 y_\nu}{d t^2} z_\nu\right\}, \\ \sum\limits_\nu \left\{X_\nu z_\nu - Z_\nu x_\nu\right\} = \sum\limits_\nu m_\nu \left\{\dfrac{d^2 x_\nu}{d t^2} z_\nu - \dfrac{d^2 z_\nu}{d t^2} x_\nu\right\}. \end{cases}$$

Darin läßt sich stets die rechte Seite als ein vollständiger Differentialquotient nach der Zeit darstellen. Man überzeugt sich in der Tat leicht von der Richtigkeit dieser Behauptung; z. B. ist:

$$\frac{d^2 y_\nu}{d t^2} x_\nu - \frac{d^2 x_\nu}{d t^2} y_\nu = \frac{d}{d t}\left\{\frac{d y_\nu}{d t} x_\nu - \frac{d x_\nu}{d t} y_\nu\right\},$$

usw. Also kann man (34) schreiben, wobei wir die Reihenfolge der Gleichungen etwas ändern:

$$
(35)\quad \left\{\begin{aligned}
\sum\left(Z_\nu y_\nu - Y_\nu z_\nu\right) &= \frac{d}{dt}\sum m_\nu\left(\frac{dz_\nu}{dt}\,y_\nu - \frac{dy_\nu}{dt}\,z_\nu\right),\\
\sum\left(X_\nu z_\nu - Z_\nu x_\nu\right) &= \frac{d}{dt}\sum m_\nu\left(\frac{dx_\nu}{dt}\,z_\nu - \frac{dz_\nu}{dt}\,x_\nu\right),\\
\sum\left(Y_\nu x_\nu - X_\nu y_\nu\right) &= \frac{d}{dt}\sum m_\nu\left(\frac{dy_\nu}{dt}\,x_\nu - \frac{dx_\nu}{dt}\,y_\nu\right).
\end{aligned}\right.
$$

Dabei sind X_ν, Y_ν, Z_ν die Komponenten des Kraftvektors $\mathfrak{K}_\nu$, und x_ν, y_ν, z_ν die Komponenten des Radiusvektors $\mathfrak{r}_\nu$, der vom Koordinaten-Anfangspunkte nach dem ν^{ten} Massenpunkte gezogen ist (Fig. 54), der sich im Punkte P befinden möge; in P ist der Größe und Richtung nach die an diesem Massenpunkte angreifende Kraft $\mathfrak{K}_\nu$ angesetzt $(\overrightarrow{PQ})$.

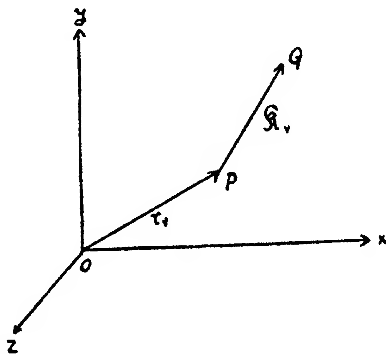


Fig. 54.

Schreiben wir statt $X_\nu : \mathfrak{K}_{\nu x}$ usw., statt $\frac{dx_\nu}{dt} : \mathfrak{c}_{\nu x}$ usw., wo $\mathfrak{c}_\nu$ die Geschwindigkeit des ν^{ten} Massenpunktes bedeutet, so können die Gleichungen (35) geschrieben werden:

$$
(36)\quad \left\{\begin{aligned}
\sum_\nu\left\{\mathfrak{K}_{\nu z}\cdot\mathfrak{r}_{\nu y} - \mathfrak{K}_{\nu y}\cdot\mathfrak{r}_{\nu z}\right\} &= \frac{d}{dt}\sum m_\nu\left\{\mathfrak{c}_{\nu z}\cdot\mathfrak{r}_{\nu y} - \mathfrak{c}_{\nu y}\cdot\mathfrak{r}_{\nu z}\right\},\\
\sum_\nu\left\{\mathfrak{K}_{\nu x}\cdot\mathfrak{r}_{\nu z} - \mathfrak{K}_{\nu z}\cdot\mathfrak{r}_{\nu x}\right\} &= \frac{d}{dt}\sum m_\nu\left\{\mathfrak{c}_{\nu x}\cdot\mathfrak{r}_{\nu z} - \mathfrak{c}_{\nu z}\cdot\mathfrak{r}_{\nu x}\right\},\\
\sum_\nu\left\{\mathfrak{K}_{\nu y}\cdot\mathfrak{r}_{\nu x} - \mathfrak{K}_{\nu x}\cdot\mathfrak{r}_{\nu y}\right\} &= \frac{d}{dt}\sum m_\nu\left\{\mathfrak{c}_{\nu y}\cdot\mathfrak{r}_{\nu x} - \mathfrak{c}_{\nu x}\cdot\mathfrak{r}_{\nu y}\right\},
\end{aligned}\right.
$$

und man erkennt unter Heranziehung des Begriffes des Vektorproduktes sofort, daß z. B. $(\mathfrak{K}_{\nu z}\mathfrak{r}_{\nu y} - \mathfrak{K}_{\nu y}\mathfrak{r}_{\nu z})$ die x-Komponente des Vektorproduktes $[\mathfrak{r}_\nu\,\mathfrak{K}_\nu]$ usw. ist. Man kann also statt (36) schreiben, indem man die drei Gleichungen in einer Vektorgleichung zusammenfaßt:

$$
(37)\quad \sum_\nu^{1,n}\left[\mathfrak{r}_\nu\,\mathfrak{K}_\nu\right] = \frac{d}{dt}\sum^{1,n} m_\nu\left[\mathfrak{r}_\nu\,\mathfrak{c}_\nu\right].
$$

Man nennt den Ausdruck $\mathfrak{M}_\nu = [\mathfrak{r}_\nu \mathfrak{K}_\nu]$ das Rotationsmoment oder Drehmoment der Kraft $\mathfrak{K}_\nu$ um diejenige durch den Koordinatenanfangspunkt gehende Achse, die senkrecht auf der Ebene der Vektoren $\mathfrak{r}_\nu$ und $\mathfrak{K}_\nu$ steht, also parallel dem Vektor $[\mathfrak{r}_\nu \mathfrak{K}_\nu]$ gerichtet ist. Seinem absoluten Betrage nach ist es das Produkt aus der Kraft $\mathfrak{K}_\nu$ in den Abstand des Angriffspunktes $\mathfrak{r}_\nu$ der Kraft vom Koordinatenanfangspunkte, multipliziert mit dem Sinus des eingeschlossenen Winkels. Entsprechend nennt man $[\mathfrak{r}_\nu \mathfrak{c}_\nu]$ das Rotationsmoment der Geschwindigkeit $\mathfrak{c}_\nu$, das genau ebenso gebildet ist; deshalb heißen die Gleichungen (35) und (37) kurz „die Momentengleichungen".

Wir wollen uns den Ausdruck „Drehmoment um eine Achse" verständlich machen. Zu dem Zwecke denken wir uns in Fig. 55 den Punkt P starr mit O verbunden, so daß der absolute Betrag von $\mathfrak{r}_\nu$ sich nicht ändern kann. Zerlegen wir nun die Kraft $\mathfrak{K}_\nu$ in der Ebene

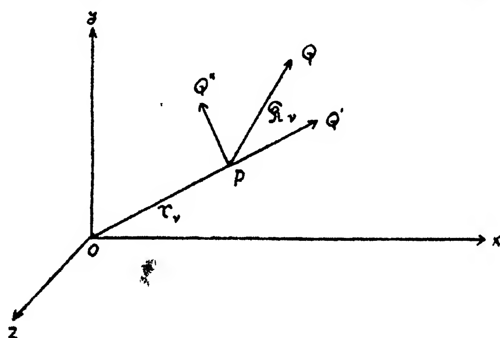


Fig. 55.

von $\mathfrak{r}_\nu$ und $\mathfrak{K}_\nu$ in zwei Komponenten, eine parallel, $\overrightarrow{PQ'}$, eine senkrecht, $\overrightarrow{PQ''}$, zu $\mathfrak{r}_\nu$. Die Wirkung der parallel $\mathfrak{r}_\nu$ wirkenden Kraftkomponente $\overrightarrow{PQ'}$ wird durch die starre Verbindung von P mit O aufgehoben; es kann also nur $\overrightarrow{PQ''}$ wirken, und das hat offenbar eine Drehung um eine durch O gehende Achse zur Folge, die senkrecht zur Ebene der Vektoren $\mathfrak{r}_\nu$ und $\overrightarrow{PQ''}$ liegt. Die Beziehung zum Namen Drehmoment liegt daher auf der Hand.

Speziell ist $[\mathfrak{r}_\nu \mathfrak{K}_\nu]_x = \mathfrak{M}_{\nu x}$ ein Drehungsmoment um die x-Achse, $[\mathfrak{r}_\nu \mathfrak{K}_\nu]_y$ ebenso um die y-Achse usw. Die Resultante von $[\mathfrak{r}_\nu \mathfrak{K}_\nu]_x$, $[\mathfrak{r}_\nu \mathfrak{K}_\nu]_y \ldots$ ist natürlich $[\mathfrak{r}_\nu \mathfrak{K}_\nu] = \mathfrak{M}_\nu$. Das ist, wie schon vorher gesagt, ein Drehungsmoment um eine durch O gehende, senkrecht zur Ebene von $\mathfrak{r}_\nu$ und $\mathfrak{K}_\nu$ stehende Achse; $\mathfrak{M}_\nu = [\mathfrak{r}_\nu \mathfrak{K}_\nu]$ als Resultante der drei Drehungsmomente um die x-, y-, z-Achse wird das „Hauptdrehmoment" genannt. Die Summe $\sum_{1,n} \mathfrak{M}_\nu$ bezeichnen wir der Kürze halber durch $\mathfrak{M}$.

Wir können (35) bzw. die gleichwertigen (36) und (37) also folgendermaßen formulieren: „Die Summe der Rotationsmomente der Kräfte um die Koordinatenachsen ist gleich der Änderung pro Zeiteinheit der Summe der Rotationsmomente der Geschwindigkeiten um resp. dieselben Achsen."

Wegen der Form von (37) liegt es nahe, die Gleichung nach der Zeit, etwa von t_0 bis t_1 zu integrieren. Das liefert:

$$(37\text{a})\qquad \int_{t_0}^{t_1} \sum_\nu [\mathfrak{r}_\nu \mathfrak{K}_\nu]\, dt = \left\{\sum_\nu^{1,n} [\mathfrak{r}_\nu, m_\nu \mathfrak{c}_\nu]\right\}_{t_1} - \left\{\sum_\nu^{1,n} [\mathfrak{r}_\nu, m_\nu \mathfrak{c}_\nu]\right\}_{t_0}.$$

Für Drehbewegungen ist diese Gleichung das völlige Analogon zu der Gleichung (22b) dieses Kapitels, die für die fortschreitende Bewegung gilt. Deshalb wollen wir, um diese Analogie hervortreten zu lassen, zwei neue Bezeichnungen einführen; wir nennen:

$$(38)\qquad \mathfrak{T}_\nu = \int_{t_0}^{t_1} [\mathfrak{r}_\nu \mathfrak{K}_\nu]\, dt$$

den „Drehstoß" der Kraft $\mathfrak{K}_\nu$, und

$$(38\text{a})\qquad \mathfrak{T} = \sum_\nu \mathfrak{T}_\nu = \int_{t_0}^{t_1} \sum_\nu [\mathfrak{r}_\nu \mathfrak{K}_\nu]\, dt$$

den „Gesamtdrehstoß" oder „resultierenden Drehstoß"; der Drehstoß entspricht dem Begriffe der „Stoßkraft". Ferner nennen wir:

$$(39)\qquad \mathfrak{U}_\nu = [\mathfrak{r}_\nu, m_\nu \mathfrak{c}_\nu]$$

den „Drehimpuls" des ν^{ten} Massenpunktes, und

$$(39\text{a})\qquad \mathfrak{U} = \sum_\nu \mathfrak{U}_\nu = \sum_\nu [\mathfrak{r}_\nu, m_\nu \mathfrak{c}_\nu]$$

den „Gesamtdrehimpuls" des Punktsystems.

Gleichung (37) kann in dieser Bezeichnungsweise geschrieben werden:

$$(40)\qquad \mathfrak{M} = \frac{d\mathfrak{U}}{dt},$$

d. h. die Änderung pro Zeiteinheit des Drehimpulses ist gleich dem wirkenden Gesamtmomente $\mathfrak{M}$.

Ebenso läßt sich Gleichung (37a) schreiben:

$$(40\text{a})\qquad \mathfrak{T} = \mathfrak{U}_1 - \mathfrak{U}_0,$$

d. h. der Gesamtdrehstoß ist gleich der Zunahme des Gesamtdrehimpulses des Systems. In dieser Form nennt man (40) oder (40a) den II. Impulssatz, eine Bezeichnung, die auch häufig auf die Gleichung (37) oder (35) angewandt wird. Dem Begriff des Drehimpulses $\mathfrak{U}$ läßt sich vermittelst (40a) eine anschauliche Deutung geben. Denn betrachten wir den Fall, daß vor Einwirkung des Drehstoßes $\mathfrak{T}$ das System in Ruhe war (alle $\mathfrak{c}_\nu = 0$), so ist $\mathfrak{U}_0 = 0$; nach dem Stoße seien die Geschwindigkeiten $\mathfrak{c}_\nu$, also $\mathfrak{U}_1 = \sum [\mathfrak{r}_\nu, m_\nu \mathfrak{c}_\nu] = \mathfrak{U}$.

Aus (40a) folgt dann: der Drehimpuls ist derjenige Drehstoß, welcher das System aus dem Zustande der Ruhe heraus in seinen augenblicklichen Geschwindigkeitszustand überführt.

Es ist bei der obigen Betrachtung wohl zu beachten, daß der Punkt, von dem aus die Lagevektoren $\mathfrak{r}_\nu$ konstruiert werden, der Koordinatenanfangspunkt unseres ruhenden Koordinatensystems, d. h. ein im Raume (nicht relativ zum Massensystem) fester Punkt ist. Man nennt allgemein den Punkt, von dem aus die Vektoren $\mathfrak{r}_\nu$ konstruiert werden, den „Momentenpunkt". Wir werden gleich auf die Frage einzugehen haben, wie sich die Verhältnisse ändern, wenn statt des Koordinatenanfangspunktes ein beliebiger anderer fester oder beweglicher Punkt als Momentenpunkt genommen wird. Konstruieren wir z. B. die Vektoren statt von O von einem beliebigen anderen festen Punkte O' aus (Fig. 56).

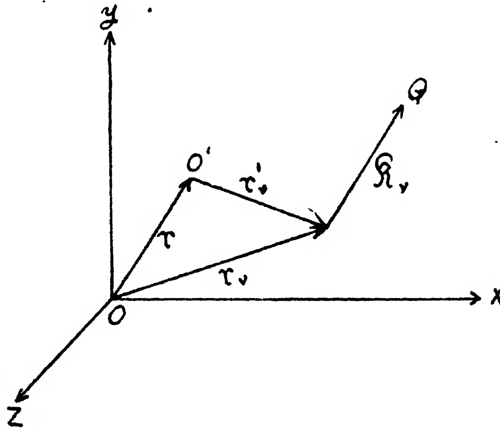


Fig. 56.

Was ändert sich dann? Diese Frage muß getrennt behandelt werden für die Rotationsmomente der Kräfte und der Geschwindigkeiten. Sie erledigt sich am einfachsten durch Anschluß an die Vektorgleichung (37). Nennen wir den Lagevektor des neuen Momentenpunktes O' in Bezug auf unser Koordinatensystem $\mathfrak{r}$ und die von O' aus konstruierten Lagevektoren $\mathfrak{r}_\nu'$, so ist offenbar nach der Figur:

$$\mathfrak{r}_\nu = \mathfrak{r} + \mathfrak{r}_\nu'.$$

Also ist für die Summe der Rotationsmomente der Kräfte $\sum_\nu [\mathfrak{r}_\nu \mathfrak{K}_\nu]$

$$\sum [\mathfrak{r}_\nu \mathfrak{K}_\nu] = \sum [(\mathfrak{r} + \mathfrak{r}_\nu'), \mathfrak{K}_\nu],$$

und das ist, wegen der Gültigkeit des distributiven Gesetzes, gleich:

$$\sum [\mathfrak{r}_\nu \mathfrak{K}_\nu] = [\mathfrak{r}, \sum \mathfrak{K}_\nu] + \sum [\mathfrak{r}_\nu' \mathfrak{K}_\nu].$$

$\mathfrak{r}$ kann man vor das Summenzeichen setzen, da es für alle Massenpunkte konstant ist. $\sum[\mathfrak{r}_\nu' \mathfrak{K}_\nu]$ ist offenbar die Summe der Drehmomente um eine durch den neuen Momentenpunkt O' gehende Achse; denn es ist genau so gebildet mit Bezug auf O', wie $\sum[\mathfrak{r}_\nu \mathfrak{K}_\nu]$ in Bezug auf O. Man erkennt sofort aus der letzten Gleichung, daß die Summe der Rotationsmomente der Kräfte nur dann in ihrer Form ungeändert bleibt, wenn:

$$[\mathfrak{r}, \sum \mathfrak{K}_\nu] = 0$$

ist.

Wann ist dieses Vektorprodukt Null? — Erstens offenbar dann, wenn einer der Vektoren $\mathfrak{r}$ und $\sum \mathfrak{K}_\nu$ verschwindet; $\mathfrak{r}$ kann nach Voraussetzung nicht verschwinden, also ist die erste Möglichkeit:

(41) $$\sum \mathfrak{K}_\nu = 0,$$

d. h. aber nach Gleichung (6), daß das betreffende System ein freies ist. Also: für ein freies System ist die Summe der Rotationsmomente der Kräfte unabhängig von der Wahl des Momentenpunktes.

Zweitens aber kann das Vektorprodukt $[\mathfrak{r}, \sum \mathfrak{K}_\nu]$ verschwinden, gemäß der Definition des Vektorproduktes, wenn der Sinus des eingeschlossenen Winkels verschwindet, d. h. wenn $\mathfrak{r}$ und $\sum \mathfrak{K}_\nu$ dieselbe Richtung haben; es ist also die Wahl des Momentenpunktes auch dann ohne Einfluß auf die Summe der Rotationsmomente der Kräfte, wenn die Verschiebung des Momentenpunktes von O nach O' in der nämlichen Richtung liegt, die die Resultante $\sum \mathfrak{K}_\nu$ sämtlicher Systemkräfte besitzt, — was natürlich ein ganz spezieller Fall ist.

Wie verhält es sich mit den Rotationsmomenten der Geschwindigkeit? Da die Geschwindigkeit $\mathfrak{c}_\nu$ durch eine derartige Verschiebung gar nicht beeinflußt wird, so haben wir nach (38):

$$\sum[\mathfrak{r}_\nu \mathfrak{c}_\nu] = [\mathfrak{r}, \sum \mathfrak{c}_\nu] + \sum[\mathfrak{r}_\nu', \mathfrak{c}_\nu],$$

also:

(42) $$\sum m_\nu [\mathfrak{r}_\nu \mathfrak{c}_\nu] = [\mathfrak{r}, \sum m_\nu \mathfrak{c}_\nu] + \sum[\mathfrak{r}_\nu', m_\nu \mathfrak{c}_\nu].$$

Führen wir jetzt mit Hilfe von (28) die Gesamtmasse M und die Geschwindigkeit $\mathfrak{c}_0$ des Schwerpunktes ein, so haben wir:

(43) $$\sum m_\nu [\mathfrak{r}_\nu \mathfrak{c}_\nu] = M[\mathfrak{r}, \mathfrak{c}_0] + \sum[\mathfrak{r}_\nu', m_\nu \mathfrak{c}_\nu].$$

Der skalare Faktor M kann außerhalb des [ ]-Zeichens gesetzt werden, wie leicht zu sehen.

Die Summe der Rotationsmomente der Geschwindigkeit bewahrt also ihre Gestalt unabhängig von der Wahl des Momentenpunktes nur unter der Bedingung, daß

$$[\mathfrak{r}\, \mathfrak{c}_0] = 0.$$

wird, d. h. also, entweder dann, wenn

$$\bar{\mathfrak{c}}_0 = 0$$

ist, d. h. wenn der Schwerpunkt des Systems ruht, oder wenn

$$\sin(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{c}}_0) = 0$$

ist, d. h. wenn die Richtung der Verschiebung von O nach O' übereinstimmt mit der Richtung der Geschwindigkeit des Schwerpunktes des Systems, was im allgemeinen natürlich nicht der Fall ist.

Setzen wir nun in der Momentengleichung (37) an Stelle von $\mathfrak{r}_\nu$ die Summe $\mathfrak{r}+\mathfrak{r}_\nu'$. Dann folgt:

$$\sum_\nu^{1,n}\left[\mathfrak{r}+\mathfrak{r}_\nu', \mathfrak{K}_\nu\right] = \frac{d}{dt}\sum_\nu^{1,n} m_\nu\left[\mathfrak{r}+\mathfrak{r}_\nu', \mathfrak{c}_\nu\right],$$

oder:

$$\left[\mathfrak{r}\sum_\nu \mathfrak{K}_\nu\right] + \sum_\nu\left[\mathfrak{r}_\nu' \mathfrak{K}_\nu\right] = \frac{d}{dt}\left[\mathfrak{r}, \sum_\nu m_\nu \mathfrak{c}_\nu\right] + \frac{d}{dt}\sum_\nu\left[\mathfrak{r}_\nu', m_\nu \mathfrak{c}_\nu\right].$$

Führt man rechts die Differentiationen aus, so erhält man:

$$\left[\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\sum m_\nu \mathfrak{c}_\nu\right] + \left[\mathfrak{r}, \sum_\nu m_\nu \frac{d\mathfrak{c}_\nu}{dt}\right] + \sum_\nu^{1,n}\left[\frac{d\mathfrak{r}_\nu'}{dt}, m_\nu \mathfrak{c}_\nu\right] + \sum_\nu^{1,n}\left[\mathfrak{r}_\nu', m_\nu \frac{d\mathfrak{c}_\nu}{dt}\right]$$

Nun ist aber offenbar:

$$\frac{d\mathfrak{r}_\nu'}{dt} = \mathfrak{c}_\nu,$$

$$\frac{d\mathfrak{r}}{dt} = 0.$$

Die letzte Gleichung gilt, weil $\mathfrak{r}$ nach Größe und Richtung konstant ist, da O' festliegt. Deshalb fallen das erste und das dritte Glied der obigen vier Terme fort; das dritte läßt sich ja schreiben:

$$\sum_\nu^{1,n}[\mathfrak{c}_\nu, m_\nu \mathfrak{c}_\nu],$$

und das ist Null, weil der Winkel zwischen den beiden Vektoren $\mathfrak{c}_\nu$ und $m_\nu \mathfrak{c}_\nu$ Null ist. Also erhält man schließlich:

$$\left[\mathfrak{r}, \sum_\nu \mathfrak{K}_\nu\right] + \sum_\nu\left[\mathfrak{r}_\nu' \mathfrak{K}_\nu\right] = \left[\mathfrak{r}, \sum_\nu m_\nu \frac{d\mathfrak{c}_\nu}{dt}\right] + \sum_\nu\left[\mathfrak{r}_\nu', m_\nu \frac{d\mathfrak{c}_\nu}{dt}\right].$$

Nun ist ferner $\frac{d\mathfrak{c}_\nu}{dt} = \mathfrak{a}_\nu$, also nach den Newtonschen Gleichungen $\mathfrak{K}_\nu = m_\nu \frac{d\mathfrak{c}_\nu}{dt} = m_\nu \mathfrak{a}_\nu$, und folglich hebt sich in der letzten Gleichung das erste Glied links gegen das erste Glied rechts fort, so daß übrig bleibt:

$$\sum_{\nu}^{1,n}\left[\mathfrak{r}_\nu'\mathfrak{K}_\nu\right] = \sum_{\nu}^{1,n}\left[\mathfrak{r}_\nu', m_\nu\frac{d\mathfrak{c}_\nu}{dt}\right],$$

oder auch, wenn man das verschwindende Glied

$$\sum_{\nu}^{1,n}\left[\frac{d\mathfrak{r}_\nu'}{dt}, m_\nu\mathfrak{c}_\nu\right]$$

rechts hinzuaddiert:

$$\sum_{\nu}^{1,n}\left[\mathfrak{r}_\nu'\mathfrak{K}_\nu\right] = \frac{d}{dt}\sum_{\nu}^{1,n}\left[\mathfrak{r}_\nu', m_\nu\mathfrak{c}_\nu\right].$$

Das ist aber nichts anderes als die Momentengleichung (37) für einen beliebigen festen Bezugspunkt. Sie gilt also allgemein, solange der Bezugspunkt im Raume fest ist; natürlich gilt das auch für die Form, die wir der Momentengleichung in (40) gegeben haben. Ist der Bezugspunkt dagegen nicht im Raume fest, so gilt der Momentensatz im allgemeinen nicht mehr unverändert. Wir werden auf diese Frage später eingehen, wenn wir den dann geltenden Satz brauchen.

50. Erhaltung der Rotationsmomente der Geschwindigkeiten: Flächensatz.

Wir haben uns nun zu fragen, in welchen Fällen die Gleichungen (37) bzw. die drei mit ihr gleichwertigen (35) eine einmalige, einfach durchführbare Integration erlauben. Da die rechte Seite ein Differentialquotient nach der Zeit ist, so ist dies sicher dann der Fall, wenn die linke Seite gleich Null ist, d. h. wenn das resultierende Drehmoment der Kräfte verschwindet; also wenn:

(44) $$\sum[\mathfrak{r}_\nu\mathfrak{K}_\nu] = 0.$$

Diese Gleichung kann auf verschiedene Weise erfüllt werden. Erstens können alle Kräfte $\mathfrak{K}_\nu$ gleich Null sein, d. h. die einzelnen Punkte des Systems bewegen sich dann alle nach dem Trägheitsgesetz — ein offenbar trivialer Fall. Zweitens ist (44) dann erfüllt, wenn der Winkel zwischen jedem $\mathfrak{r}_\nu$ und $\mathfrak{K}_\nu$ gleich Null ist, denn dann ist nach Definition des Vektorproduktes dieses selbst gleich Null, d. h. also, wenn alle Kräfte radial vom Koordinatenanfangspunkte fortweisen oder auf ihn hingerichtet sind; auch dies ist ein spezieller Fall. Der dritte Fall ist der wichtigste. Wir wollen annehmen, daß das betrachtete System frei sei, d. h. nach (6):

$$\sum_{\nu}^{1,n}\mathfrak{K}_\nu = 0.$$

Wir wollen nun ferner noch annehmen — das ist eine neue Voraussetzung, die an sich über die Forderung eines freien Systems hinausgeht — daß die zwischen zwei Punkten a und b wirkenden Kräfte $\mathfrak{K}_{ab}$ bzw. $\mathfrak{K}_{ba}$ einander nicht nur entgegengesetzt gleich sind, sondern auch in Richtung der Verbindungslinie $\mathfrak{r}_{ab}$ der beiden Punkte wirken sollen. Solche Kräfte zwischen Massenpunkten, deren Richtung parallel der Zentrale der Massenpunkte ist, nennt man „Zentralkräfte“.

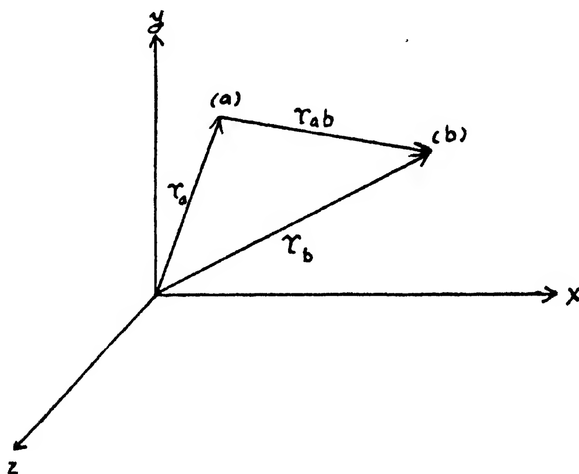


Fig. 57.

Unter diesen Annahmen greifen wir ein beliebiges Paar a und b von Massenpunkten des Systems heraus und berechnen die Summe der Hauptdrehungsmomente der Kräfte für diese beiden Massenpunkte; es ist offenbar

$$[\mathfrak{r}_a, \mathfrak{K}_{ba}] + [\mathfrak{r}_b, \mathfrak{K}_{ab}],$$

oder, da nach dem Reaktionsprinzip $\mathfrak{K}_{ab} = -\mathfrak{K}_{ba}$ ist:

$$-[\mathfrak{r}_a \mathfrak{K}_{ab}] + [\mathfrak{r}_b \mathfrak{K}_{ab}],$$

oder schließlich, indem die beiden Ausdrücke zu einem Vektorprodukt vereinigt werden:

$$[(\mathfrak{r}_b - \mathfrak{r}_a), \mathfrak{K}_{ab}].$$

Nun ist aber nach Fig. 57 offenbar:

(45) $$\mathfrak{r}_b - \mathfrak{r}_a = \mathfrak{r}_{ab}.$$

Denn es ist nach den Regeln der Vektoraddition $\mathfrak{r}_a + \mathfrak{r}_{ab} = \mathfrak{r}_b$, also in der Tat (45) erfüllt. Also wird unser Drehmoment:

(46) $$[\mathfrak{r}_b - \mathfrak{r}_a, \mathfrak{K}_{ab}] = [\mathfrak{r}_{ab}, \mathfrak{K}_{ab}],$$

worin nach Voraussetzung $\mathfrak{r}_{ab}$ und $\mathfrak{K}_{ab}$ von Null verschieden sind. Aber das Vektorprodukt kann ja auch verschwinden, wenn der Winkel zwischen den beiden Vektoren $\mathfrak{r}_{ab}$ und $\mathfrak{K}_{ab}$ gleich Null ist, d. h. wenn $\mathfrak{K}_{ab}$ in die Richtung der Verbindungslinie der beiden Massenpunkte $\mathfrak{r}_{ab}$ fällt. Das haben wir aber soeben als erfüllt vorausgesetzt; also ist in der Tat

(47) $$[\mathfrak{r}_{ab}, \mathfrak{K}_{ab}] = 0 .$$

Diese Berechnung läßt sich für jedes Punktpaar des Massensystems durchführen, also ist auch für das ganze Massensystem die Summe der Drehmomente der Kräfte gleich Null, d. h. Gleichung (44) erfüllt:

(44) $$\sum [\mathfrak{r}_\nu \mathfrak{K}_\nu] = 0 ,$$

wenn das System frei ist und die Kräfte Zentralkräfte sind.

Man hat früher angenommen, daß alle in der Physik auftretenden Kräfte Zentralkräfte seien; dann wäre für jedes freie System (44) erfüllt. In der Tat hat sich nun nie ein Widerspruch mit der Erfahrung gezeigt, wenn man für ein freies System die Annahme (44) gemacht hat, obwohl wir über die Natur der Kräfte vielfach gar nichts aussagen können. Wir wollen daher jetzt die Gleichung (44) für jedes freie System (ob Zentralkräfte oder nicht) als gültig annehmen, also allgemein den Satz akzeptieren, daß für ein freies System die Summe der Drehmomente der Kräfte verschwindet.

Diese Annahme ist von grundlegender Bedeutung für die Auffassung der Momentengleichungen (35) oder (37). In ihnen bedeuten ja die X_ν, Y_ν, Z_ν die Komponenten der gesamten, auf das ν^{te} Massenteilchen wirkenden Kraft $\mathfrak{K}_\nu$, die die Resultante der inneren und äußeren auf m_ν wirkenden Kräfte ist. Nach (44) aber heben sich die Momente der inneren Kräfte heraus, so daß wir in den Momentengleichungen unter den $\mathfrak{K}_\nu$ (mit den Komponenten X_ν, Y_ν, Z_ν) nur die äußeren Kräfte zu verstehen haben. Dadurch wird der Momentensatz erst fruchtbar, da die inneren Kräfte meistens unbekannt sind. —

In den besprochenen drei Fällen ist also nach (35):

(48) $$\left\{\begin{aligned} \frac{d}{dt}\sum m_\nu \left\{\frac{dz_\nu}{dt} y_\nu - \frac{dy_\nu}{dt} z_\nu\right\} &= 0, \\ \frac{d}{dt}\sum m_\nu \left\{\frac{dx_\nu}{dt} z_\nu - \frac{dz_\nu}{dt} x_\nu\right\} &= 0, \\ \frac{d}{dt}\sum m_\nu \left\{\frac{dy_\nu}{dt} x_\nu - \frac{dx_\nu}{dt} y_\nu\right\} &= 0, \end{aligned}\right.$$

was man auch kürzer in einer Vektorgleichung zusammenfassen kann:

$$\frac{d}{dt}\sum m_\nu [\mathfrak{r}_\nu \mathfrak{c}_\nu] = 0 ,$$

oder auch, indem der skalare Faktor m_ν in die eckige Klammer mit hineingenommen wird:

(49) $$\frac{d}{dt}\sum\left[\mathfrak{r}_\nu, m_\nu \mathfrak{c}_\nu\right] = 0.$$

Führen wir die Integration von (48) aus, so ist, wenn A, B, C Konstanten bedeuten:

(50) $$\begin{cases} \sum m_\nu \left\{\frac{dz_\nu}{dt} y_\nu - \frac{dy_\nu}{dt} z_\nu\right\} = A, \\ \sum m_\nu \left\{\frac{dx_\nu}{dt} z_\nu - \frac{dz_\nu}{dt} x_\nu\right\} = B, \\ \sum m_\nu \left\{\frac{dy_\nu}{dt} x_\nu - \frac{dx_\nu}{dt} y_\nu\right\} = C \end{cases}$$

oder zusammengefaßt, durch Integration von (49), unter Beachtung der Definition des Drehimpulses nach (39a)

(51) $$\sum_\nu^{1,n}[\mathfrak{r}_\nu, m_\nu \mathfrak{c}_\nu] \equiv \mathfrak{U} = \text{Const.},$$

wobei der absolute Betrag des Vektors $\mathfrak{U}$, also $|\mathfrak{U}| = \sqrt{A^2+B^2+C^2}$ ist, d. h. also: Für ein freies System ist die Summe der Drehmomente der Geschwindigkeiten nach Größe und Richtung konstant (Satz von der Erhaltung des Drehmomentes der Geschwindigkeiten).

Unter Verwendung des Begriffes des Drehimpulses kann man (51) offenbar auch so formulieren:

Der Gesamtdrehimpuls eines freien Systems ist konstant.

Dieser Satz kann mechanisch anschaulich interpretiert werden, indem man bedenkt, daß der Drehimpuls ein spezieller Drehstoß ist, derjenige nämlich, der das System aus dem Zustande der Ruhe in seinen augenblicklichen Zustand überführt. Betrachten wir nämlich ein freies System zu verschiedenen Zeiten, so werden die Geschwindigkeiten $\mathfrak{c}_\nu$ und die Radienvektoren $\mathfrak{r}_\nu$ im allgemeinen variieren, also auch der Drehimpuls $\mathfrak{U}_\nu$ für jeden einzelnen Massenpunkt. Aber der Gesamtdrehimpuls ist konstant. Also kann das System stets durch den nämlichen Drehstoß von der Ruhe aus in seinen augenblicklichen Zustand gebracht werden.

Wir wollen noch die Richtung des resultierenden Drehmomentes der Geschwindigkeit bestimmen. Nach (50) sind die Richtungskosinusse offenbar bzw.

(52) $$\frac{A, B, C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Diese drei Richtungskosinusse bestimmen die Richtung des resultierenden Drehmomentes der Geschwindigkeiten, also auch die Richtung der dazu senkrechten Ebene, die von der Zeit unabhängig,

also im Raume, d. h. relativ zum Fundamentalsystem, fest ist. Diese Ebene wird als „invariable Ebene" und die dazu senkrechte Richtung des resultierenden Drehmomentes der Geschwindigkeiten als „invariable Achse" bezeichnet; die Bedeutung beider wird später hervortreten.

Der Inhalt der Gleichung (50), die die Erhaltung der Rotationsmomente aussprechen, wird manchmal auch als das „Prinzip der Flächen" oder als der „Flächensatz" bezeichnet. Das hat folgenden Grund. Betrachten wir ein Glied der in (50) auftretenden Summen, etwa

$$\frac{dz_\nu}{dt}y_\nu - \frac{dy_\nu}{dt}z_\nu$$

und führen für einen Moment Polarkoordinaten in der yz-Ebene ein:

$$(53)\qquad \begin{cases} y_\nu = \varrho_\nu \cos\varphi_\nu, \\ z_\nu = \varrho_\nu \sin\varphi_\nu, \end{cases}$$

so ist offenbar, wie durch Ausrechnung sofort folgt:

$$(54)\qquad \frac{dz_\nu}{dt}y_\nu - \frac{dy_\nu}{dt}z_\nu = \varrho_\nu^2\frac{d\varphi_\nu}{dt},$$

und das ist, wie wir schon in Gleichung (90) des ersten Kapitels sahen, gleich dem doppelten der Fläche, die vom Radiusvektor ϱ_ν pro Sekunde überstrichen wird, die wir also $\frac{dF_\nu^x}{dt}$ nennen können. Damit gewinnt Gleichung (50) folgende Gestalt:

$$(55)\qquad \begin{cases} \sum m_\nu \frac{dF_\nu^x}{dt} = A, \\ \sum m_\nu \frac{dF_\nu^y}{dt} = B, \\ \sum m_\nu \frac{dF_\nu^z}{dt} = C. \end{cases}$$

In dem einfachsten Falle, daß alle m_ν gleich groß $= m$ sind, ist also, wenn wir

$$\sum_\nu F_\nu^x = F_x, \quad \sum_\nu F_\nu^y = F_y, \quad \sum_\nu F_\nu^z = F_z$$

setzen, und die Gleichungen (55) einmal nach t integrieren:

$$\left.\begin{aligned} mF_x &= At + \alpha \\ mF_y &= Bt + \beta \\ mF_z &= Ct + \gamma \end{aligned}\right\} (\alpha, \beta, \gamma \text{ Constanten});$$

d. h. die in gleichen Zeiten überstrichenen Flächen sind gleich (das ist das zweite Keplersche Gesetz), und deswegen nennt man auch im allgemeinen Falle den Satz den „Flächensatz".

Beispiele für die hier als besonders bedeutsam hervortretenden freien Systeme werden wir im nächsten Kapitel bei der Betrachtung unseres Planetensystems finden.

51. Das d'Alembertsche Prinzip.

Einen allgemeinen Gesichtspunkt, unter dem wir die in den bisherigen Nummern dieses Kapitels erhaltenen Resultate ableiten und wiedergewinnen können, liefert das d'Alembertsche Prinzip, das wir in seiner einfachsten Form für einen Massenpunkt bereits in Nr. 31 kennen gelernt haben. Wir beweisen es hier für ein System von n Massenpunkten, deren Bewegungsfreiheit durch m Bedingungsgleichungen eingeschränkt sei. Da jeder freie Massenpunkt drei Freiheitsgrade hat, so hat ein System von n freien Massenpunkten $3n$ Freiheitsgrade, von denen durch Hinzufügung jeder Bedingungsgleichung einer fortgenommen wird; also besitzt unser System $(3n - m)$ Freiheitsgrade. Es ist klar, daß diese Zahl positiv sein muß, d. h. es muß stets $3n > m$ sein. Die gegebenen Bedingungsgleichungen seien:

$$(56)\quad \begin{cases} F_1(x_1\, y_1\, z_1\,,\ x_2\, y_2\, z_2\,,\ \ldots\ x_n\, y_n\, z_n) = 0\,, \\ F_2(x_1\, y_1\, z_1\,,\ x_2\, y_2\, z_2\,,\ \ldots\ x_n\, y_n\, z_n) = 0\,, \\ F_3(x_1\, y_1\, z_1\,,\ x_2\, y_2\, z_2\,,\ \ldots\ x_n\, y_n\, z_n) = 0\,, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_m(x_1\, y_1\, z_1\,,\ x_2\, y_2\, z_2\,,\ \ldots\ x_n\, y_n\, z_n) = 0\,. \end{cases}$$

Wir können nun, wie wir es schon früher getan haben, die Wirkung der Bedingungsgleichungen durch Kräfte ersetzen, die wir zu den explizit gegebenen Kräften X_ν, Y_ν, Z_ν hinzufügen; diese wollen wir durch Ξ_ν, H_ν, Z_ν bezeichnen. Dann können wir das System als völlig frei betrachten, und haben also z. B. für den ν^{ten} Massenpunkt folgende Gleichungen:

$$(57)\quad \begin{cases} m_\nu \dfrac{d^2 x_\nu}{d t^2} - \left(X_\nu + \Xi_\nu\right) = 0, \\ m_\nu \dfrac{d^2 y_\nu}{d t^2} - \left(Y_\nu + \mathsf{H}_\nu\right) = 0, \\ m_\nu \dfrac{d^2 z_\nu}{d t^2} - \left(Z_\nu + \mathsf{Z}_\nu\right) = 0. \end{cases}$$

Denken wir uns jedem Punkte des Systems mit den Koordinaten $(x_\nu,\ y_\nu,\ z_\nu)$ eine unendliche kleine, mit den Bedingungen (56) verträgliche Verschiebung $(\delta x_\nu,\ \delta y_\nu,\ \delta z_\nu)$ erteilt, und erweitern wir die obigen Gleichungen bzw. mit δx_ν, δy_ν, δz_ν, addieren und summieren über das ganze Massensystem, so erhalten wir die Gleichung:

$$(58)\quad \begin{cases} \sum\limits_\nu^{1,n} \left\{\left(m_\nu \dfrac{d^2 x_\nu}{d t^2} - X_\nu\right) \delta x_\nu + \left(m_\nu \dfrac{d^2 y_\nu}{d t^2} - Y_\nu\right) \delta y_\nu \right. \\ \left. + \left(m_\nu \dfrac{d^2 z_\nu}{d t^2} - Z_\nu\right) \delta z_\nu\right\} = \sum\limits_\nu^{1,n} \left\{\Xi_\nu\, \delta x_\nu + \mathsf{H}_\nu\, \delta y_\nu + \mathsf{Z}\, \delta z_\nu\right\}. \end{cases}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist die virtuelle Arbeit δA der gesamten Zwangskräfte, die bei der gedachten, mit den Bedingungen

verträglichen Verrückung geleistet werden würde. Wie wir in Nr. 30 bereits auseinandersetzten, kommt man ohne eine besondere Annahme über die Zwangskräfte Ξ_ν, H_ν, Z_ν nicht weiter, und alle Hypothesen, die man über deren Natur machen kann, müssen darin gipfeln, daß für jede mit den vorgeschriebenen Bedingungen verträgliche virtuelle Verrückung die virtuelle Arbeit der Zwangskräfte verschwindet. Es ist daher am einfachsten, von vorneherein diese Hypothese direkt zu machen; wir wollen daher stets die Gültigkeit der Gleichung voraussetzen:

(59) $$\delta A \equiv \sum_\nu^{1,n} [\Xi_\nu \delta x_\nu + \mathsf{H}_\nu \delta y_\nu + \mathsf{Z}_\nu \delta z_\nu] = 0.$$

Mithin ist unter den von uns gemachten Voraussetzungen:

(60) $$\sum_\nu^{1,n} \left\{ \left(m_\nu \frac{d^2 x_\nu}{d t^2} - X_\nu \right) \delta x_\nu + \left(m_\nu \frac{d^2 y_\nu}{d t^2} - Y_\nu \right) \delta y_\nu + \left(m_\nu \frac{d^2 z_\nu}{d t^2} - Z_\nu \right) \delta z_\nu \right\} = 0.$$

Wären keine Verbindungen da, so wären die sämtlichen δx_ν, δy_ν, δz_ν unabhängig voneinander. Dann erhalten wir durch Zerfall von (60) die gewöhnlichen $3n$ Bewegungsgleichungen Newtons; das ist das d'Alembertsche Prinzip in seiner einfachsten Form, in der es keinen Nutzen bietet. Aber wenn Bedingungen da sind, hier die m Bedingungen (56), so zerfällt die Gleichung (60) nicht in dieser Weise, da dann die δx_ν, δy_ν, δz_ν nicht mehr alle unabhängig voneinander sind. In diesem Falle kann man so verfahren, daß man mittels der m Gleichungen (56) m beliebige der Koordinaten x_ν, y_ν, z_ν und entsprechend δx_ν, δy_ν, δz_ν durch die $3n-m$ übrigen, die dann unabhängig voneinander sind, ausdrückt, und die ersteren m Koordinaten und Verrückungen in (60) eliminiert. Doch sind die Rechnungen meistens sehr umständlich. Lagrange hat ein anderes Verfahren angegeben, das wir bereits im zweiten Kapitel für einen Massenpunkt angewendet haben und das auch hier brauchbar ist. Wir gehen folgendermaßen vor:

Da die Bedingungsgleichungen (56) für alle Werte der Koordinaten x_ν, y_ν, z_ν der betreffenden Massenpunkte gelten müssen, so ist auch für die benachbarte Lage $x_\nu + \delta x_\nu$, $y_\nu + \delta y_\nu$, $z_\nu + \delta z_\nu$:

(61) $$\begin{cases} F_1(x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1, z_1 + \delta z_1, \ldots z_n + \delta z_n) = 0, \\ \ldots \\ F_m(x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1, z_1 + \delta z_1, \ldots z_n + \delta z_n) = 0. \end{cases}$$

Wenn wir diese letzteren Gleichungen in die Taylorsche Reihe entwickeln und (56) beachten, so erhält man die Gleichungen:

(62) $$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial F_1}{\partial y_1} \delta y_1 + \frac{\partial F_1}{\partial z_1} \delta z_1 + \ldots \frac{\partial F_1}{\partial z_n} \delta z_n = 0,$$

usw., oder kürzer geschrieben:

$$
(63)\quad \left\{\begin{aligned}
&\sum_{\nu}^{1,n}\left\{\frac{\partial F_1}{\partial x_\nu}\delta x_\nu+\frac{\partial F_1}{\partial y_\nu}\delta y_\nu+\frac{\partial F_1}{\partial z_\nu}\delta z_\nu\right\}=0,\\
&\sum_{\nu}\left\{\frac{\partial F_2}{\partial x_\nu}\delta x_\nu+\frac{\partial F_2}{\partial y_\nu}\delta y_\nu+\frac{\partial F_2}{\partial z_\nu}\delta z_\nu\right\}=0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\sum_{\nu}\left\{\frac{\partial F_m}{\partial x_\nu}\delta x_\nu+\frac{\partial F_m}{\partial y_\nu}\delta y_\nu+\frac{\partial F_m}{\partial z_\nu}\delta z_\nu\right\}=0.
\end{aligned}\right.
$$

Wir multiplizieren diese Gleichungen mit noch unbekannten Faktoren $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_m$ und addieren sie zu (60); dann folgt:

$$
\begin{aligned}
\sum_{\nu}^{1,n}\Bigg[&\left\{m_\nu\frac{d^2 x_\nu}{dt^2}-X_\nu+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial x_\nu}+\lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial x_\nu}+\dots\lambda_m\frac{\partial F_m}{\partial x_\nu}\right\}\delta x_\nu\\
&+\left\{m_\nu\frac{d^2 y_\nu}{dt^2}-Y_\nu+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial y_\nu}+\lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial y_\nu}+\dots\lambda_m\frac{\partial F_m}{\partial y_\nu}\right\}\delta y_\nu\\
&+\left\{m_\nu\frac{d^2 z_\nu}{dt^2}-Z_\nu+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial z_\nu}+\lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial z_\nu}+\dots\lambda_m\frac{\partial F_m}{\partial z_\nu}\right\}\delta z_\nu\Bigg]=0.
\end{aligned}
$$

Von den in dieser Gleichung vorkommenden $3n$ Verrückungen δx_ν, δy_ν, δz_ν sind nun m durch die $(3n-m)$ übrigen ausdrückbar; es seien dies etwa die m ersten Verrückungen δx_1, δy_1, δz_1, $\delta x_2 \dots$ Diese m ersten Verrückungen sind also Funktionen der übrigen; wir bringen sie zum Verschwinden, indem wir die m Größen $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_m$ nunmehr so wählen, daß die Faktoren der m fraglichen Verrückungen δx_1, δy_1, δz_1, $\delta x_2 \dots$ verschwinden. Das gibt also die m Gleichungen:

$$
m_1\frac{d^2 x_1}{dt^2}-X_1+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial x_1}+\lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial x_1}+\dots\lambda_m\frac{\partial F_m}{\partial x_1}=0,
$$

. . . .

(m Gleichungen).

Die übrigbleibenden $(3n-m)$ Verrückungen sind unabhängig voneinander, also müssen ihre Koeffizienten ebenfalls verschwinden, so daß wir noch $(3n-m)$ Gleichungen derselben Art erhalten. In toto gelten also für jeden beliebigen Massenpunkt die Gleichungen:

$$
(64)\quad \left\{\begin{aligned}
&m_\nu\frac{d^2 x_\nu}{dt^2}-X_\nu+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial x_\nu}+\lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial x_\nu}+\dots\lambda_m\frac{\partial F_m}{\partial x_\nu}=0,\\
&m_\nu\frac{d^2 y_\nu}{dt^2}-Y_\nu+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial y_\nu}+\lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial y_\nu}+\dots\lambda_m\frac{\partial F_m}{\partial y_\nu}=0,\\
&m_\nu\frac{d^2 z_\nu}{dt^2}-Z_\nu+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial z_\nu}+\lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial z_\nu}+\dots\lambda_m\frac{\partial F_m}{\partial z_\nu}=0.
\end{aligned}\right.
$$

Das sind im ganzen $3n$ Gleichungen, dazu kommen die m Bedingungsgleichungen (56), die zusammen also gerade ausreichen, um die $(3n+m)$ Unbekannten $x_\nu, y_\nu, z_\nu, \lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_m$ zu bestimmen.

In (64) sind die Größen

$$-\left(\lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_\nu} + \lambda_1 \frac{\partial F_2}{\partial x_\nu} + \dots \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial x_\nu}\right) \quad \text{usw.},$$

die Komponenten der Kraft, die die Bedingungsgleichungen auf den ν^{ten} Massenpunkt des Systems ausüben, die zusammen mit dem explizit gegebenen X_ν, Y_ν, Z_ν die „Totalkräfte" bilden. Dann sagt (64) aus, daß, *wenn man zur Totalkraft die d'Alembertsche Trägheitskraft* mit den Komponenten

$$-m_\nu \frac{d^2 x_\nu}{dt^2}, \quad -m_\nu \frac{d^2 y_\nu}{dt^2}, \quad -m_\nu \frac{d^2 z_\nu}{dt^2},$$

hinzufügt, Gleichgewicht besteht: das ist der eigentliche Kern des d'Alembertschen Prinzips.

Sind die Beschleunigungen jedes Massenpunktes gleich Null, so liefert (64) die Bedingungen des *Gleichgewichtes* eines Systems unter dem Einfluß explizit gegebener Kräfte, wenn Bedingungsgleichungen bestehen; auf diese Folgerung gehen wir in Nr. 53 genauer ein.

Wir haben das *d'Alembertsche* Prinzip nur unter einer speziellen Voraussetzung beweisen können. Dennoch lehrt die Erfahrung, daß die Gleichung (60) stets gültig ist. *Wir werden daher das d'Alembertsche Prinzip (60) als stets richtig annehmen.* Aus dieser Darlegung geht hervor, daß die allgemeine Gültigkeit des d'Alembertschen Prinzips nicht aus den *Newton*schen Gleichungen ohne Hinzunahme weiterer Voraussetzungen abgeleitet werden kann; das *d'Alembertsche* Prinzip ist vielmehr ein *neues Prinzip* der Dynamik, dessen Einführung sich wie bei jeder experimentellen Wissenschaft nur durch die Übereinstimmung mit der Erfahrung rechtfertigen läßt.

Wir können nun aus (60) sehr leicht die Sätze über die Schwerpunktsbewegung und die Rotationsbewegung ableiten.

Wir wollen ein System betrachten, dessen Bedingungsgleichungen (56) die Eigenschaft haben, daß wir jedem Punkte des Systems die nämliche virtuelle Verrückung erteilen können. Dies ist sicher dann möglich, wenn alle Punkte völlig frei sind, wie wir in den Nrn. 45 bis 50 voraussetzten. Wir geben also dem System eine gemeinschaftliche Translation, wobei die relativen Lagen der Massenpunkte zueinander ungeändert bleiben. Dann ist:

$$\begin{aligned} \delta x_1 &= \delta x_2 = \delta x_3 = \dots = \delta x_n = \delta x, \\ \delta y_1 &= \delta y_2 = \delta y_3 = \dots = \delta y_n = \delta y, \\ \delta z_1 &= \delta z_2 = \delta z_3 = \dots = \delta z_n = \delta y. \end{aligned}$$

Also nach der Formel (60) des *d'Alembertschen* Prinzips, wenn wir die nunmehr gleichen Größen δx, δy, δz vor das Summenzeichen nehmen:

$$\delta x \cdot \sum_\nu \left(m_\nu \frac{d^2 x_\nu}{dt} - X_\nu\right) + \delta y \cdot \sum_\nu \left(m_\nu \frac{d^2 y_\nu}{dt^2} - Y_\nu\right) + \delta z \cdot \sum_\nu \left(m_\nu \frac{d^2 z_\nu}{dt^2} - Z_\nu\right) = 0,$$

und diese Gleichung zerfällt wegen der Unabhängigkeit von δx, δy, δz in die drei Gleichungen:

$$\sum m_\nu \frac{d^2 x_\nu}{dt^2} = \sum X_\nu,$$
$$\sum m_\nu \frac{d^2 y_\nu}{dt^2} = \sum Y_\nu,$$
$$\sum m_\nu \frac{d^2 z_\nu}{dt^2} = \sum Z_\nu.$$

Das sind aber die bereits erhaltenen Gleichungen (22), aus denen die Schwerpunktssätze folgen.

Ebenso erhalten wir die Sätze über die Rotationsmomente, wenn wir annehmen, daß die Bedingungen des Systems es gestatten, ihm als Ganzem eine Rotation um die x- oder y- oder z-Achse zu erteilen. Darauf gehen wir hier nicht näher ein, die genauere Untersuchung dem Leser überlassend.

52. Das Energieprinzip.

Außer den in diesem Kapitel behandelten Erhaltungssätzen, dem Satz von der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes und dem Flächensatz, die jeder eine Integration der Bewegungsgleichungen liefern, gibt es in vielen Fällen noch das sogenannte „Energieprinzip“, dessen einfachste Form für einen Massenpunkt wir in Nr. 28 kennen gelernt haben. Wir legen der Behandlung die Gleichungen (64) für ein beliebiges Massensystem zugrunde in Verbindung mit den Bedingungsgleichungen (56). Darunter ist als Spezialfall der eines Massensystems ohne Bedingungsgleichungen enthalten, indem dann die Größen F_1, F_2 ... F_m identisch Null sind. Wir multiplizieren nun die Gleichungen (64) der Reihe nach mit $\frac{dx_\nu}{dt}$, $\frac{dy_\nu}{dt}$, $\frac{dz_\nu}{dt}$, addieren und summieren über das ganze Massensystem ($\nu = 1, 2, \ldots n$); dann folgt:

$$\sum_\nu m_\nu \left\{\frac{d^2 x_\nu}{dt^2}\frac{dx_\nu}{dt} + \frac{d^2 y_\nu}{dt^2}\frac{dy_\nu}{dt} + \frac{d^2 z_\nu}{dt^2}\frac{dz_\nu}{dt}\right\}$$
$$- \sum_\nu \left\{X_\nu \frac{dx_\nu}{dt} + Y_\nu \frac{dy_\nu}{dt} + Z_\nu \frac{dz_\nu}{dt}\right\}$$
$$+ \lambda_1 \sum_\nu \left\{\frac{\partial F_1}{\partial x_\nu}\frac{dx_\nu}{dt} + \frac{\partial F_1}{\partial y_\nu}\frac{dy_\nu}{dt} + \frac{\partial F_1}{\partial z_\nu}\frac{dz_\nu}{dt}\right\}$$
$$+ \ldots \lambda_m \sum_\nu \left\{\frac{\partial F_m}{\partial x_\nu}\frac{dx_\nu}{dt} + \frac{\partial F_m}{\partial y_\nu}\frac{dy_\nu}{dt} + \frac{\partial F_m}{\partial z_\nu}\frac{dz_\nu}{dt}\right\} = 0.$$

Darin sind zunächst die Faktoren von λ_1, $\lambda_2 \ldots \lambda_m$ nichts anderes als die vollständigen zeitlichen Differentialquotienten von F_1, $F_2 \ldots F_m$, die gemäß den Bedingungsgleichungen (56) alle gleich Null sind. Also bleibt nur übrig:

$$(65)\quad \begin{cases} \sum_{\nu}^{1,n} m_\nu \left\{ \frac{d^2 x_\nu}{d t^2} \frac{d x_\nu}{d t} + \frac{d^2 y_\nu}{d t^2} \frac{d y_\nu}{d t} + \frac{d^2 z_\nu}{d t^2} \frac{d z_\nu}{d t} \right\} \\ = \sum_{\nu}^{1,n} \left\{ X_\nu \frac{d x_\nu}{d t} + Y_\nu \frac{d y_\nu}{d t} + Z_\nu \frac{d z_\nu}{d t} \right\}. \end{cases}$$

Wir können hier jeden Summanden der linken Seite in die Form bringen:

$$m_\nu \left\{ \frac{d^2 x_\nu}{d t^2} \frac{d x_\nu}{d t} + \frac{d^2 y_\nu}{d t^2} \frac{d y_\nu}{d t} + \ldots \right\} = \frac{d}{d t} \left[\frac{m_\nu}{2} \left\{ \left(\frac{d x_\nu}{d t} \right)^2 + \left(\frac{d y_\nu}{d t} \right)^2 + \left(\frac{d z_\nu}{d t} \right)^2 \right\} \right],$$

und das ist nach Gleichung (27) des zweiten Kapitels auf pag. 87 nichts anderes als die zeitliche Ableitung der lebendigen Kraft oder kinetischen Energie L_ν des ν^{ten} Massenpunktes, also $\frac{d L_\nu}{d t}$. Wir können also die linke Seite schreiben $\sum_\nu \frac{d L_\nu}{d t}$ oder auch $\frac{d}{d t} \sum_\nu L_\nu$, und darin ist $\sum_\nu L_\nu$ offenbar die gesamte kinetische Energie aller Massenpunkte des Systems; wir wollen sie durch L bezeichnen. Mithin wird (65):

$$(66)\qquad \frac{d L}{d t} = \sum_{\nu}^{1,n} \left\{ X_\nu \frac{d x_\nu}{d t} + Y_\nu \frac{d y_\nu}{d t} + Z_\nu \frac{d z_\nu}{d t} \right\}.$$

Ein Term der rechten Seite, $X_\nu \frac{d x_\nu}{d t} + Y_\nu \frac{d y_\nu}{d t} + Z_\nu \frac{d z_\nu}{d t}$, ist das skalare Produkt aus der Kraft $\mathfrak{K}_\nu$ und der Geschwindigkeit $\mathfrak{c}_\nu$ des ν^{ten} Massenpunktes, also die von der Kraft $\mathfrak{K}_\nu$ pro Sekunde bei Verschiebung des ν^{ten} Massenpunktes geleistete Arbeit, oder der „Effekt" der Kraft $\mathfrak{K}_\nu$. Die rechte Seite läßt sich also schreiben: $\sum_{\nu}^{1,n} (\mathfrak{K}_\nu \mathfrak{c}_\nu)$, und das ist nach dem Vorhergehenden gleich der **Gesamtarbeit** $\frac{d A}{d t}$ **der im System wirkenden Kräfte pro Zeiteinheit.**

Also haben wir nach (66):

$$(67)\qquad \frac{d L}{d t} = \frac{d A}{d t},$$

d. h. **die Zunahme der kinetischen Energie des Systems ist gleich der von den Kräften des Systems geleisteten Arbeit,** welcher Satz auch für endliche Zustandsänderungen gilt:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d L}{d t} d t = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d A}{d t} d t,$$

oder:

$$(67\text{a})\qquad L_2 - L_1 = A_{12}.$$

Dabei bedeuten L_1 und L_2 die kinetischen Energien für die Zeiten t_1 und t_2, oder auch, da das System dabei verschiedene Lagen inne hat, die kine-

tischen Energien in der Lage 1 und in der Lage 2; ebenso A_{12} die von den Kräften des Systems geleistete Arbeit beim Übergange des Systems aus der Lage 1 in die Lage 2. Im allgemeinen wird diese Arbeitsleistung außer von der Lage der Punkte 1 und 2 auch noch von dem Wege abhängen, auf dem das System von 1 nach 2 übergeführt wird.

Von besonderem Interesse ist es nun, den Spezialfall zu betrachten, daß die sämtlichen Kraftkomponenten X_ν, Y_ν, Z_ν $(\nu=1, 2, \ldots n)$ sich als partielle Differentialquotienten einer einzigen eindeutigen Funktion der Koordinaten x_ν, y_ν, z_ν $(\nu=1, 2, \ldots n)$ darstellen lassen. Wir nennen diese Funktion $-\Phi$ die „Kräftefunktion". Dann ist die rechte Seite von (66):

$$\sum \left(X_\nu \frac{d x_\nu}{d t} + Y_\nu \frac{d y_\nu}{d t} + Z_\nu \frac{d z_\nu}{d t} \right)$$
$$= - \sum \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial x_\nu} \frac{d x_\nu}{d t} + \frac{\partial \Phi}{\partial y_\nu} \frac{d y_\nu}{d t} + \frac{\partial \Phi}{\partial z_\nu} \frac{d z_\nu}{d t} \right\},$$

und das ist gleich dem negativen totalen Differentialquotienten von Φ nach t, d. h. gleich $-\frac{d\Phi}{dt}$. Damit wird aus (66):

$$\frac{dL}{dt} = - \frac{d\Phi(x_1 y_1 z_1 \ldots x_n y_n z_n)}{dt}. \tag{68}$$

Den negativen Wert der Kräftefunktion, also $+\Phi$ nennen wir die „potentielle Energie" des Systems. Wir können (68) in der Form schreiben:

$$\frac{d}{dt}(L + \Phi) = 0, \tag{69}$$

oder zwischen zwei beliebigen Zeiten integriert:

$$L_2 + \Phi_2 = L_1 + \Phi_1 = \text{Const.}, \tag{70}$$

d. h. wenn eine Kräftefunktion existiert, so ist die Summe der kinetischen und potentiellen Energie, d. h. die Gesamtenergie eines Systems, konstant. In diesem Falle haben wir also, wenn Φ bekannt ist, ein weiteres Integral der Bewegungsgleichungen.

Schreiben wir (70) in der Form, die (67a) entspricht:

$$L_2 - L_1 = -(\Phi_2 - \Phi_1), \tag{70a}$$

so sieht man, daß jetzt die Arbeit $A_{12} = \Phi_1 - \Phi_2$, die geleistet werden muß, um das System aus der Lage 1 nach 2 zu bringen, nur von der Lage des Anfangs- und Endpunktes der Bahn abhängt, dagegen nicht mehr von dem Wege, auf dem es von 1 nach 2 überführt wird. Das geht sofort daraus hervor, daß die Arbeit als die Differenz der Funktionswerte Φ_1 und Φ_2 dargestellt, und Φ eine Funktion ist, die nur von den Koordinaten abhängt; Φ_1 hängt also nur von den Koordinaten der Systempunkte in der Lage 1 ab, und Φ_2 entsprechend nur von den Koordinaten, die die Lage 2 charakterisieren;

also natürlich auch die Differenz $\Phi_1 - \Phi_2$, nur von der Lage dieser Punkte. In diesem Falle ist die unendlich kleine Arbeit $dA = d\Phi$ auch ein totales Differential einer Funktion der Koordinaten. Das ist eine ausgezeichnete Eigenschaft der Systeme, die eine Kräftefunktion besitzen.

Kräfte, die aus einer Kräftefunktion ableitbar sind, haben wir früher „konservative" genannt; entsprechend nennen wir ein System „konservativ", wenn seine sämtlichen Kräfte konservativ sind.

53. Gleichgewicht eines Systems; Stabilität des Gleichgewichts.

Sollen sich die Kräfte eines Systems im Gleichgewicht halten, so dürfen die einzelnen Massenpunkte dauernd keine Beschleunigung haben, also liefert die d'Alembertsche Gleichung (60) als Bedingung des Gleichgewichts:

$$(71) \qquad \sum_{\nu}^{1,n} \{X_\nu \delta x_\nu + Y_\nu \delta y_\nu + Z_\nu \delta z_\nu\} = 0.$$

Im allgemeinen werden dann auch die Geschwindigkeiten dauernd gleich Null sein müssen; denn wenn dies nicht der Fall ist, so gelangen die Massenpunkte im Laufe der Zeit an andere Stellen des Raumes, und da die Kräfte X_ν, Y_ν, Z_ν i. a. Funktionen des Ortes sind, so wird (71) nicht für alle Lagen erfüllt sein können, sondern nur für spezielle, in denen dann die Massenpunkte dauernd verbleiben müssen. Wenn die Massenpunkte des Systems völlig frei sind, so sind die $3n$ virtuellen Verrückungen δx_ν, δy_ν, δz_ν alle unabhängig voneinander, und es zerfällt dann (71) in die $3n$ Gleichungen:

$$(72) \qquad X_\nu = Y_\nu = Z_\nu = 0 \qquad (\nu = 1, 2 \ldots n).$$

Das ist genau die nämliche Bedingung, die auch für einen Massenpunkt gilt.

Ist dagegen die Bewegungsfreiheit des Systems eingeschränkt, etwa durch die m Bedingungsgleichungen (56), so zerfällt (71) nicht mehr in der besprochenen Weise, aus demselben Grunde wie früher. Wir erhalten dann die Gleichgewichtsbedingungen aus (64), welche Gleichung ja dem d'Alembertschen Prinzip im Falle beschränkter Bewegungsfreiheit äquivalent ist. Wir finden so die $3n$ Gleichgewichtsbedingungen:

$$(73) \qquad \begin{cases} -X_\nu + \lambda_1 \dfrac{\partial F_1}{\partial x_\nu} + \lambda_2 \dfrac{\partial F_2}{\partial x_\nu} + \ldots \lambda_m \dfrac{\partial F_m}{\partial x_\nu} = 0, \\ -Y_\nu + \lambda_1 \dfrac{\partial F_1}{\partial y_\nu} + \lambda_2 \dfrac{\partial F_2}{\partial y_\nu} + \ldots \lambda_m \dfrac{\partial F_m}{\partial y_\nu} = 0, \\ -Z_\nu + \lambda_1 \dfrac{\partial F_1}{\partial z_\nu} + \lambda_2 \dfrac{\partial F_2}{\partial z_\nu} + \ldots \lambda_m \dfrac{\partial F_m}{\partial z_\nu} = 0. \end{cases}$$

Dazu treten die Bedingungsgleichungen (56); in toto sind es $(3n+m)$ Gleichungen, die bei gegebenen Kräften X_ν, Y_ν, Z_ν zur Bestimmung

der $(3n+m)$ Unbekannten $x_1, y_1, z_1 \ldots x_n, y_n, z_n, \lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_m$, d. h. der Gleichgewichtslage, gerade ausreichen. Sind die Kräfte unbekannt, so werden diese, genau wie im II. Kapitel auseinandergesetzt, nur ihrer Richtung nach durch (78) bestimmt; der Betrag bleibt unbestimmt.

Eine besonders einfache Form nehmen die Gleichgewichtsbedingungen an, wenn das System konservativ ist, d. h. eine Kräftefunktion $-\Phi$ existiert. Dann wird nämlich (71):

$$\sum_{\nu}^{1,n} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial x_\nu} \delta x_\nu + \frac{\partial \Phi}{\partial y_\nu} \delta y_\nu + \frac{\partial \Phi}{\partial z_\nu} \delta z_\nu \right\} = 0. \tag{74}$$

Dieser Ausdruck ist aber nichts anderes als die vollständige Variation von Φ; also kann (74) kürzer geschrieben werden:

$$\delta \Phi = 0. \tag{75}$$

In Worten: die Gleichgewichtslage eines konservativen Systems ist durch einen Extremwert der potentiellen Energie charakterisiert.

Das Gleichgewicht kann von verschiedener Art sein, je nachdem der Extremwert der potentiellen Energie ein Minimum, Maximum oder ein sogenannter Sattelwert ist, oder endlich die potentielle Energie überhaupt konstant ist; man unterscheidet stabiles, labiles und indifferentes Gleichgewicht. Man kann diese drei Arten des Gleichgewichts folgendermaßen charakterisieren: Um zu untersuchen, in welche der drei Kategorien eine Gleichgewichtslage des Systems gehört, teile man dem System einen kleinen Stoß mit, den wir in der Grenze unendlich klein denken, und der das System aus der Gleichgewichtslage entfernt. Dann wird das System entweder, wie klein auch der Anstoß gemacht wird, sich dauernd (und zwar alle oder auch nur einzelne Massenpunkte desselben um endliche Strecken und mit endlichen Geschwindigkeiten) aus der ursprünglichen Gleichgewichtslage entfernen, um nicht wieder in dieselbe zurückzukehren: in diesem Falle war das Gleichgewicht labil. Oder aber das System kehrt wieder in die alte Gleichgewichtslage zurück, von der es sich nur um sehr kleine Strecken und nur mit sehr kleinen Geschwindigkeiten (und zwar jeder Punkt des Systems) durch den Stoß entfernte; dann ist das Gleichgewicht stabil. Es ist übrigens noch denkbar, daß ein und dieselbe Gleichgewichtslage nicht für beliebige Verrückungen sich gleichartig verhält, sondern für gewisse Verrückungen sich als stabil und für andere als labil erweist. Darauf werden wir später näher eingehen. Die dritte Möglichkeit ist die, daß das System für alle oder auch nur für einzelne Verrückungen aus der Gleichgewichtslage stets im Gleichgewicht bleibt. Im ersteren Falle nennt man das Gleichgewicht indifferent schlechthin, im zweiten Falle „indifferent hinsichtlich der betreffenden Verschiebung".

Dirichlet hat zuerst bewiesen, daß, wenn die potentielle Energie eines Massensystems ein Minimum ist, daß dann das Gleichgewicht stabil ist. Wir wollen seinen Beweis, der sich auf das Energieprinzip stützt, hier reproduzieren. Da Φ, die potentielle Energie, lediglich dadurch definiert ist, daß ihre negativen Ableitungen die Kraftkomponenten darstellen, so kann man, ohne diese Eigenschaft zu stören, eine willkürliche Konstante addieren; sie ist eben nur bis auf eine additive Konstante bestimmt. Wir wollen nun diese Konstante so wählen, daß Φ in der Gleichgewichtslage gleich Null ist; da nach Voraussetzung in dieser Lage Φ ein Minimum sein soll, so ist Φ in der Umgebung der Gleichgewichtslage positiv.

Wir geben nun dem System einen kleinen Anstoß, den wir nachher zu Null abnehmen lassen; dann erhält das System eine gewisse kinetische Energie L und entfernt sich aus der Gleichgewichtslage. Die potentielle Energie Φ steigt also von Null in der Umgebung zu kleinen positiven Werten an. Die gesamte Energie $L + \Phi$ hat einen kleinen konstanten Wert, den wir E nennen wollen; die Größe von E hängt natürlich von der Stärke des Anstoßes ab und reduziert sich auf Null, wenn wir den Anstoß immer kleiner und kleiner machen. Also

$$L + \Phi = E, \tag{76}$$

und daraus folgt, da L und Φ beide positive Größen sind, daß in der Umgebung der Gleichgewichtslage stets sein muß:

$$\left\{\begin{array}{l} L \leqq E, \\ \Phi \leqq E. \end{array}\right. \tag{77}$$

Was bedeutet nun die Ungleichung $\Phi \leqq E$?

Um uns dies klar zu machen, wollen wir Φ, das ja Funktion im allgemeinen sämtlicher Koordinaten (x_ν, y_ν, z_ν) ist, in der Umgebung der Gleichgewichtslage, die etwa durch die Koordinaten $(x_\nu^0, y_\nu^0, z_\nu^0)$ charakterisiert sei, in eine Taylorsche Reihe entwickeln.

Der Bequemlichkeit der Schreibweise wegen wollen wir die Koordinaten jetzt etwas anders benennen; die Bezeichnung von x_ν bleibt unverändert; dagegen schreiben wir $x_{n+\nu}$ statt y_ν, $x_{2n+\nu}$ statt z_ν, so daß wir $3n$ Koordinaten x_1 bis x_n, x_{n+1} bis x_{2n}, x_{2n+1} bis x_{3n} bekommen. Mit dieser Bezeichnung liefert die Taylorsche Reihenentwicklung:

$$\Phi = \Phi\left(x_1^0 x_2^0 \ldots x_{3n}^0\right) + \sum_\nu^{1,3n} \frac{\partial \Phi}{\partial x_\nu}\left(x_\nu - x_\nu^0\right)$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_\nu^{1,3n} \sum_\mu^{1,3n} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_\nu \partial x_\mu}\left(x_\nu - x_\nu^0\right)\left(x_\mu - x_\mu^0\right) + \cdots$$

Darin sind nach Voraussetzung einerseits $\Phi(x_1^0 \ldots x_{3n}^0) = 0$, da in der Gleichgewichtslage $\Phi = 0$ sein soll, und ebenso ist das lineare

Glied gleich Null, weil die Gleichgewichtslage durch $\delta\Phi = 0$ charakterisiert ist. Es bleiben also nur die quadratischen Glieder übrig; mithin ist 2Φ von der Form:

$$2\Phi = \sum_{\nu}^{1,3n} \sum_{\mu}^{1,3n} a_{\nu\mu} (x_\nu - x_\nu^0)(x_\mu - x_\mu^0).$$

Nach (77) muß nun sein:

$$\sum_{\nu} \sum_{\mu} a_{\nu\mu} (x_\nu - x_\nu^0)(x_\mu - x_\mu^0) \leqq E,$$

und es fragt sich, was diese Ungleichung bedeutet. Wir können die Lage des Systems, da sie durch $3n$ Koordinaten bestimmt ist, durch einen Punkt im $3n$-dimensionalen Raume charakterisieren. In dieser Auffassung bedeutet:

$$\sum_{\nu} \sum_{\mu} a_{\nu\mu} (x_\nu - x_\nu^0)(x_\mu - x_\mu^0) \leqq E$$

ein Gebiet im $3n$-dimensionalen Raume, ebenso wie etwa

$$(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + (x_3 - x_3^0)^2 \leqq E$$

ein von einer Kugelfläche vom Radius $\sqrt{E}$ umschlossenes Gebiet im gewöhnlichen Raume bedeutet, um das Zentrum (x_1^0, x_2^0, x_3^0). Nehmen wir die Ungleichung

$$(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + (x_3 - x_3^0)^2 < E,$$

so bedeutet sie, daß der Punkt (x_1, x_2, x_3) innerhalb dieser Kugelfläche bleiben soll. Lassen wir nun E immer kleiner und kleiner werden, so zieht sich die Kugelfläche immer mehr und mehr auf ihr Zentrum zusammen, so daß der absolute Betrag von $|x_1 - x_1^0|$, $|x_2 - x_2^0|$, $|x_3 - x_3^0|$ immer kleiner werden muß. Bei der allgemeinen Gleichung

$$\sum_{\nu} \sum_{\mu} a_{\nu\mu} (x_\nu - x_\nu^0)(x_\mu - x_\mu^0) \leqq E$$

kann man nicht genau so schließen, da hier auch negative Glieder vorkommen können, die im Beispiel der Kugelfläche fehlen. Es ist aber, da Φ eine stets positive quadratische Form ist, stets möglich, wie später in Nr. 58 bewiesen werden wird, durch Einführung anderer Variabeln Φ als Summe von Quadraten darzustellen. Nennen wir diese neuen Koordinaten etwa ξ_ν und sind b_ν positive Konstanten, so ist:

$$2\Phi = \sum_{\nu}^{1,n} b_\nu (\xi_\nu - \xi_\nu^0)^2,$$

also:

$$\sum_{\nu}^{1,n} b_\nu (\xi_\nu - \xi_\nu^0)^2 \leqq E.$$

Da jedes Glied jetzt positiv ist, so gilt a fortiori für jedes Glied die Ungleichung:

$$(\xi_\nu - \xi_\nu^0)^2 \leqq \frac{E}{b_\nu};$$

also ist in der Tat:

$$\lim_{E=0} |\xi_\nu - \xi_\nu^0| = 0,$$

d. h. aber, daß, wenn der Stoß kleiner und kleiner wird, dann auch die Verschiebungen jedes Punktes aus der Gleichgewichtslage kleiner und kleiner werden, und damit ist das erste Erfordernis für die Stabilität der Gleichgewichtslage erfüllt. Nun ist das Analoge für die Geschwindigkeiten zu beweisen: auch diese müssen sich mit abnehmendem E sämtlich der Null nähern; nun ist aber nach (77) und der Definition der kinetischen Energie:

$$L = \sum_\nu \frac{m_\nu}{2} \mathfrak{c}_\nu^2 \leqq E,$$

also, da die Summanden von L alle positiv sind, a fortiori:

$$\frac{m_\nu}{2} \mathfrak{c}_\nu^2 \leqq E;$$

also endlich für jede Geschwindigkeit:

$$|\mathfrak{c}_\nu| \leqq \sqrt{\frac{2E}{m_\nu}},$$

d. h. aber:

$$\lim_{E=0} |\mathfrak{c}_\nu| = 0,$$

was zu beweisen war. Damit ist der ganze Dirichletsche Satz bewiesen.

Umgekehrt kann man sich leicht klar machen, daß, wenn Φ ein Maximum in der Gleichgewichtslage ist, dann das Gleichgewicht labil sein wird. Denn machen wir in der Gleichgewichtslage wieder $\Phi = 0$, so muß es also in der Umgebung der Gleichgewichtslage kleiner als Null sein, d. h. abnehmen. Erteilen wir nun einen beliebig kleinen Stoß, so daß wieder

$$L + \Phi = E$$

ist, so sieht man, da Φ mit zunehmender Entfernung von der Gleichgewichtslage immer mehr abnimmt, daß L immer mehr zunehmen muß: d. h. mit wachsender Entfernung von der Gleichgewichtslage wächst die Geschwindigkeit des Systems. Dies gilt, wie klein auch der Stoß gewählt ist: das System entfernt sich also mit stets wachsender Geschwindigkeit von der Gleichgewichtslage. Diese war also labil.

Indifferentes Gleichgewicht haben wir endlich, wenn Φ bei der betreffenden Verschiebung gar nicht geändert wird; dann ist ja auch $\delta\Phi = 0$. Ein Beispiel dafür ist ein parallelepipedischer Klotz auf hori-

zontaler Unterlage; wie er auch auf derselben verschoben wird, immer ist die potentielle Energie dieselbe, überall ist er im Gleichgewicht.

Ein sehr gutes Beispiel für die Verschiedenartigkeit der Gleichgewichte liefert die Betrachtung eines starren Massensystems, das die Gestalt eines dreiachsigen Ellipsoids mit drei ungleichen Achsen hat.[1]) Dasselbe ist auf einer horizontalen Unterlage im Gleichgewicht, sobald das Ellipsoid mit einem Endpunkt seiner drei Achsen auf der Horizontalen aufliegt. Nehmen wir an, das Ellipsoid liege zunächst mit seiner kürzesten Achse auf, so hat der Schwerpunkt des Ellipsoids die tiefste Lage, die er überhaupt haben kann, also ist die potentielle Energie des Systems in diesem Falle ein Minimum. Denn diese wird, da man im Schwerpunkt die ganze Masse konzentriert und die ganze Kraft in ihm angreifend denken kann, nur durch die Lage des Schwerpunktes bestimmt. Nach dem Dirichletschen Satze muß also das Gleichgewicht stabil sein. Gibt man einen kleinen Stoß, so treten in der Tat nur kleine Schwingungen um die Gleichgewichtslage ein, die durch Reibung vernichtet werden, und das System kehrt wieder in seinen ursprünglichen Zustand zurück.

Liegt umgekehrt das Ellipsoid mit seiner größten Achse auf, so ist die potentielle Energie ein Maximum, das Gleichgewicht also labil. In der Tat bringt ein kleiner Stoß das Ellipsoid zum Umkippen. Eine Sonderstellung bildet der Fall, wenn das Ellipsoid auf seiner mittleren Achse aufliegt, wenn also der Schwerpunkt zwischen der höchsten und der tiefsten Lage liegt. Stößt man jetzt das Ellipsoid in der Weise an, daß es sich um die kürzeste Achse dreht, so hebt sich der Schwerpunkt. Die potentielle Energie hat für diese Verrückungen also ein Minimum, die Gleichgewichtslage ist hinsichtlich dieser Verrückungen also stabil. Stößt man dagegen das Ellipsoid derartig, daß die größte Achse als Drehungsachse dient, so senkt sich der Schwerpunkt, die potentielle Energie ist für diese Verrückungen in der Gleichgewichtslage ein Maximum, das Gleichgewicht hinsichtlich dieser Verrückungen ist also labil. In diesem Falle hat Φ in der Gleichgewichtslage einen sogenannten Sattelwert.

54. Das Hamiltonsche Prinzip.

Die Bewegungsgleichungen (60), die in der Form des d'Alembertschen Prinzips zu einer Gleichung kondensiert sind, lassen sich, wie Hamilton gefunden hat, in eine sehr einfache Form bringen, die den Vorteil hat, gar keine Beziehung mehr auf ein Koordinatensystem zu enthalten, und die deshalb besonders dann von Vorteil ist, wenn man von einem Koordinatensystem zu einem Koordinatensystem anderer Art, z. B. von kartesischen auf Polarkoordinaten usw. übergehen will

[1]) Helmholtz, Vorl. über die Dynamik diskreter Massenpunkte, pag. [illegible]

Wir wollen bei der Ableitung des Hamiltonschen Prinzips zunächst ein konservatives System voraussetzen; dann wird (60), wenn wir die Kräftefunktion einführen:

$$(78)\quad \begin{cases} \sum_{\nu}^{1,n}\left[\left\{m_\nu \frac{d^2 x_\nu}{d t^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_\nu}\right\}\delta x_\nu + \left\{m_\nu \frac{d^2 y_\nu}{d t^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial y_\nu}\right\}\delta y_\nu \right. \\ \qquad\qquad \left. + \left\{m_\nu \frac{d^2 z_\nu}{d t^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial z_\nu}\right\}\delta z_\nu\right] = 0. \end{cases}$$

Diese Gleichung können wir folgendermaßen schreiben:

$$\sum_{\nu}^{1,n}\left[m_\nu\left\{\frac{d^2 x_\nu}{d t^2}\,\delta x_\nu + \frac{d^2 y_\nu}{d t^2}\,\delta y_\nu + \frac{d^2 z_\nu}{d t^2}\,\delta z_\nu\right\}\right]$$
$$= -\sum_{\nu}^{1,n}\left\{\frac{\partial \Phi}{\partial x_\nu}\,\delta x_\nu + \frac{\partial \Phi}{\partial y_\nu}\,\delta y_\nu + \frac{\partial \Phi}{d z_\nu}\,\delta z_\nu\right\}.$$

Darin ist die rechte Seite aber nichts anderes, als die negative vollständige Variation von Φ; also ist:

$$(79)\quad \sum_{\nu}^{1,n}\left[m_\nu\left\{\frac{d^2 x_\nu}{d t^2}\,\delta x_\nu + \frac{d^2 y_\nu}{d t^2}\,\delta y_\nu + \frac{d^2 z_\nu}{d t^2}\,\delta z_\nu\right\}\right] = -\,\delta\Phi,$$

womit bereits ein Schritt in der angedeuteten Richtung geschehen ist: die rechte Seite enthält keinerlei Beziehung mehr auf das Koordinatensystem. Dasselbe hat mit der linken Seite zu geschehen. Zu diesem Zwecke beachten wir folgende Identität:

$$m_\nu \frac{d^2 x_\nu}{d t^2}\,\delta x_\nu = \frac{d}{d t}\left[m_\nu \frac{d x_\nu}{d t}\,\delta x_\nu\right] - m_\nu \frac{d x_\nu}{d t}\,\frac{d\,\delta x_\nu}{d t}.$$

Im letzten Gliede ist es gestattet, die Differentiation nach t mit der Variation zu vertauschen, da die letztere sich nicht auf t bezieht; also:

$$\frac{d\,\delta x_\nu}{d t} = \delta\frac{d x_\nu}{d t},\text{[1]}$$

und dann haben wir offenbar, wenn wir noch dieselbe Operation auf die y- und z-Koordinaten ausdehnen:

$$m_\nu\left\{\frac{d^2 x_\nu}{d t^2}\,\delta x_\nu + \frac{d^2 y_\nu}{d t^2}\,\delta y_\nu + \frac{d^2 z_\nu}{d t^2}\,\delta z_\nu\right\}$$
$$= \frac{d}{d t}\left[m\left(\frac{d x_\nu}{d t}\,\delta x_\nu + \frac{d y_\nu}{d t}\,\delta y_\nu + \frac{d z_\nu}{d t}\,\delta z_\nu\right)\right]$$
$$-\,\delta\left\{\frac{m_\nu}{2}\left[\left(\frac{d x_\nu}{d t}\right)^2 + \left(\frac{d y_\nu}{d t}\right)^2 + \left(\frac{d z_\nu}{d t}\right)^2\right]\right\},$$

[1]) Dies wird streng in folgender Weise bewiesen. Wir betrachten x_ν als stetige Funktion von t (siehe Fig. 58) und gleichzeitig eine beliebige benachbarte Kurve $x_\nu'(t)$. Die Differenz der Funktionswerte zu ein und derselben Zeit t nennen wir $\delta x_\nu(t)$, das dann ebenfalls eine stetige Funktion von t ist:

und darin ist das letzte Glied offenbar gleich $-\delta L_\nu$, wenn L_ν die kinetische Energie des ν^{ten} Massenpunktes bedeutet. Also haben wir aus (79):

$$\sum_\nu^{1,n} \frac{d}{dt}\left[m_\nu\left(\frac{dx_\nu}{dt}\,\delta x_\nu + \frac{dy_\nu}{dt}\,\delta y_\nu + \frac{dz_\nu}{dt}\,\delta z_\nu\right)\right] - \sum_\nu^{1,n} \delta L_\nu = -\,\delta\Phi,$$

oder, wenn wir $\sum_\nu L_\nu$ durch L, die gesamte kinetische Energie, ersetzen:

$$(80)\qquad \frac{d}{dt}\sum_\nu^{1,n}\left\{m_\nu\left(\frac{dx_\nu}{dt}\,\delta x_\nu + \frac{dy_\nu}{dt}\,\delta y_\nu + \frac{dz_\nu}{dt}\,\delta z_\nu\right)\right\} = \delta(L - \Phi),$$

womit ein weiterer Schritt in der Loslösung vom Koordinatensystem geschehen ist. Da nun die linke Seite ein vollständiger Differential-

---

$$\delta x_\nu(t) = x_\nu'(t) - x_\nu(t).$$

Was ist nach dieser Definition des Zeichens δ der Ausdruck $\delta\left(\frac{dx_\nu}{dt}\right)$? Offenbar

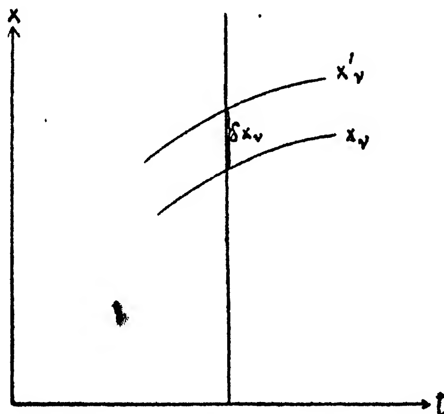


Fig. 58.

nach der letzten Gleichung, wenn wir $\frac{dx_\nu}{dt}$ für einen Moment durch $\dot{x}_\nu$ ersetzen;

$$\begin{aligned}
\delta \dot{x}_\nu(t) &= \dot{x}_\nu'(t) \mp \dot{x}_\nu(t)\\
&= \frac{d}{dt}(x_\nu') - \frac{d}{dt}(x_\nu) = \frac{d}{dt}[x_\nu + \delta x_\nu] - \frac{d}{dt}(x_\nu)\\
&= \frac{dx_\nu}{dt} + \frac{d\,\delta x_\nu}{dt} - \frac{dx_\nu}{dt} = \frac{d(\delta x_\nu)}{dt};
\end{aligned}$$

also ist in der Tat:

$$\delta\left(\frac{dx_\nu}{dt}\right) = \frac{d(\delta x_\nu)}{dt},$$

was zu beweisen war.

Bei dieser Argumentation ist wesentlich, daß x_ν' und x_ν zu demselben t-Werte gehören, also t **nicht** variiert wird.

quotient nach der Zeit ist, so liegt es nahe, eine Integration nach t auszuführen, etwa zwischen zwei Zeiten t_0 und t_1 zu integrieren. Dann erhalten wir:

$$(81)\qquad \overline{\sum_{\nu}\left\{m_\nu\left(\frac{d x_\nu}{d t}\,\delta x_\nu + \frac{d y_\nu}{d t}\,\delta y_\nu + \frac{d z_\nu}{d t}\,\delta z_\nu\right)\right\}}^{\,t_1}_{\,t_0} = \int_{t_0}^{t_1} \delta(L-\Phi)\,d t.$$

Nun wollen wir die Verrückungen δx_ν, δy_ν, δz_ν in einer bestimmten Weise wählen, die aus folgendem klar werden wird. In der Zeit zwischen t_0 und t_1 hat das System, d. h. jeder Punkt desselben, eine bestimmte Bahn beschrieben, d. h. die Koordinaten (x_ν, y_ν, z_ν) haben als Funktionen von t gewisse Werte angenommen. Die Bahn des ν^{ten} Massenpunktes sei in Fig. 59 gezeichnet, zwischen dem der Zeit t_0 entsprechenden Anfangspunkte 0 und dem Endpunkte 1 zur Zeit t_1.



Fig. 59.

Nun haben wir uns aber zu jeder Lage (x_ν, y_ν, z_ν) eine virtuelle Verrückung δx_ν, δy_ν, δz_ν gedacht, so daß wir außer der wirklichen Bahn, die durch $x_\nu(t)$, $y_\nu(t)$, $z_\nu(t)$ dargestellt wird, auch noch von einer „variierten Bahn" sprechen können, die durch die Gleichungen

$$x_\nu(t)+\delta x_\nu(t),\quad y_\nu(t)+\delta y_\nu(t),\quad z_\nu(t)+\delta z_\nu(t)$$

in Parameterdarstellung dargegeben ist. Das ist eine Bahn, die offenbar wegen der unendlichen Kleinheit der virtuellen Verschiebungen δx_ν, δy_ν, δz_ν ganz in der Nähe der wirklichen Bahn verläuft, aber im übrigen ganz willkürlich ist. Nur müssen die δx_ν, δy_ν, δz_ν die Bedingungsgleichungen des Systems erfüllen. Z. B. können die drei in Figur 59 gestrichelten Bahnen als variierte Bahnen angesehen werden. Nun wollen wir aber die variierte Bahn so wählen, daß sie zu den Zeiten t_0 und t_1, d. h. in den Punkten 0 und 1 mit der wirklichen zusammenfällt (Fig. 60); im übrigen bleibt sie mit der obigen Einschränkung vollkommen willkürlich.

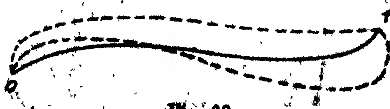


Fig. 60.

Dann sind für $t=t_0$ und $t=t_1$ die Größen $\delta x_\nu = \delta y_\nu = \delta z_\nu = 0$, und mithin — das ist der Zweck dieser Festsetzung — ver-

schwindet die linke Seite von (81), da der betreffende Ausdruck für die untere und die obere Grenze verschwindet. Also folgt schließlich, wenn wir noch die Reihenfolge von Integration und Variation vertauschen, was gestattet ist, da die Variation sich nicht auf die Integrationsvariable t erstreckt:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (L - \Phi)\, d t = 0, \tag{82}$$

die die Hamiltonsche Gleichung darstellt, den Bewegungsgleichungen (60) äquivalent ist und keinerlei Beziehungen auf ein Koordinatensystem mehr enthält.

Man kann das Hamiltonsche Prinzip folgendermaßen in Worten aussprechen: Unter allen Bewegungsarten, die ein konservatives System aus einer gegebenen Anfangslage in gegebener Zeit in eine gegebene Endlage führen, ist diejenige die in der Natur eintretende, für welche der zeitliche Mittelwert von $(L - \Phi)$ einen Extremwert hat (d. h. für die die Variation des zeitlichen Mittelwertes von $(L - \Phi)$ verschwindet).

Hat man einmal kinetische und potentielle Energie in den in Betracht kommenden Variablen aufgestellt, so kann man rückwärts aus dem Hamiltonschen Prinzip die Bewegungsgleichungen gewinnen, und zwar durch einen ein für allemal feststehenden Algorithmus, also durch eine rein schematisch vornehmbare Operation. Da es für viele Fälle leichter ist, L und Φ zu bilden, als die Bewegungsgleichungen aufzustellen, so ist die praktische Bedeutung dieser Formel einleuchtend.

Wir wollen zunächst L und Φ als in kartesischen Koordinaten gegeben denken und nun zeigen, wie die Bewegungsgleichungen (60) rückwärts aus (82) erhalten werden. Zunächst ist:

$$\left\{\begin{aligned} \delta \int_{t_0}^{t_1} L\, dt &= \delta \int_{t_0}^{t_1} \Phi\, dt = \int_{t_0}^{t_1} dt \cdot \delta\Phi \\ &= \int_{t_0}^{t_1} dt \sum_{\nu}^{1,n} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_\nu} \delta x_\nu + \frac{\partial \Phi}{\partial y_\nu} \delta y_\nu + \frac{\partial \Phi}{\partial x_\nu} \delta z_\nu \right). \end{aligned}\right. \tag{83}$$

Ferner ist:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L\, dt = \int_{t_0}^{t_1} dt \cdot \delta L = \int_{t_0}^{t_1} dt \cdot \delta \sum_{\nu}^{1,n} \frac{m_\nu}{2} \left\{ \left(\frac{d x_\nu}{d t}\right)^2 + \left(\frac{d y_\nu}{d t}\right)^2 + \left(\frac{d z_\nu}{d t}\right)^2 \right\},$$

oder, wenn die Variation ausgeführt wird:

$$\int^{t_1} dt \cdot \sum m_\nu \left\{ \frac{d x_\nu}{d t} \delta \frac{d x_\nu}{d t} + \frac{d y_\nu}{d t} \delta \frac{d y_\nu}{d t} + \frac{d z_\nu}{d t} \delta \frac{d z_\nu}{d t} \right\}$$

oder, indem das Operationszeichen δ mit $\frac{d}{dt}$ in der Reihenfolge vertauscht wird, was aus demselben Grunde wie oben zulässig ist:

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \cdot \sum_\nu m_\nu \left\{ \frac{dx_\nu}{dt} \frac{d\,\delta x_\nu}{dt} + \frac{dy_\nu}{dt} \frac{d\,\delta y_\nu}{dt} + \frac{dz_\nu}{dt} \frac{d\,\delta z_\nu}{dt} \right\},$$

oder auch:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_\nu m_\nu \left\{ \frac{dx_\nu}{dt} \frac{d\,\delta x_\nu}{dt} + \frac{dy_\nu}{dt} \frac{d\,\delta y_\nu}{dt} + \frac{dz_\nu}{dt} \frac{d\,\delta z_\nu}{dt} \right\} dt.$$

Hier wollen wir eine partielle Integration ausführen, die wir der Kürze halber nur am ersten Gliede durchrechnen wollen:

$$m_\nu \int_{t_0}^{t_1} \frac{dx_\nu}{dt} \frac{d\,\delta x_\nu}{dt}\, dt = m_\nu \left[\frac{dx_\nu}{dt} \delta x_\nu \right]_{t_0}^{t_1} - m_\nu \int_{t_0}^{t_1} \delta x_\nu \cdot \frac{d^2 x_\nu}{dt^2} \cdot dt.$$

Darin verschwindet das erste Glied, weil für t_0 und t_1 die Größen δx_ν, δy_ν, δz_ν gleich Null vorausgesetzt sind; also folgt schließlich:

(84) $$\delta \int_{t_0}^{t_1} L\,dt = -\int_{t_0}^{t_1} \sum m_\nu \left\{ \frac{d^2 x_\nu}{dt^2} \delta x_\nu + \frac{d^2 y_\nu}{dt^2} \delta y_\nu + \frac{d^2 z_\nu}{dt^2} \delta z_\nu \right\} \cdot dt.$$

Durch Verbindung von (83) und (84) hat man also:

$$-\int_{t_0}^{t_1} dt \left[\sum_\nu m_\nu \left\{ \frac{d^2 x_\nu}{dt^2} \delta x_\nu + \frac{d^2 y_\nu}{dt^2} \delta y_\nu + \frac{d^2 z_\nu}{dt^2} \delta z_\nu \right\} \right]$$
$$= \int_{t_0}^{t_1} dt \left[\sum_\nu \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial x_\nu} \delta x_\nu + \frac{\partial \Phi}{\partial y_\nu} \delta y_\nu + \frac{\partial \Phi}{\partial z_\nu} \delta z_\nu \right\} \right],$$

oder, wenn die beiden Integrale zusammengefaßt werden und der Integrand nach δx_ν, δy_ν, δz_ν geordnet wird:

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \cdot \sum_\nu^{1,n} \left[\left(m_\nu \frac{d^2 x_\nu}{dt^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_\nu} \right) \delta x_\nu + \left(m_\nu \frac{d^2 y_\nu}{dt^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial y_\nu} \right) \delta y_\nu + \left(m_\nu \frac{d^2 z_\nu}{dt^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial z_\nu} \right) \delta z_\nu \right] = 0.$$

Es läßt sich nun zeigen, daß das Verschwinden dieses Integrals nur so bestehen kann, daß der Integrand verschwindet. Dann nehmen wir etwa an, derselbe sei positiv oder negativ; nun ist der Integrand eine stetige Funktion der Zeit; ich kann daher die Zeitgrenzen t_0 und t_1 so wählen, daß innerhalb des Intervalles $t_1 - t_0$ der Integrand sein Zeichen nicht wechselt. Dann aber könnte das Integral nicht $= 0$ sein, und das Integral kann daher nur so verschwinden, daß der Inte-

grand sich annulliert; also folgt in der Tat das die Bewegungsgleichungen enthaltende d'Alembertsche Prinzip (60):

$$\sum_{\nu}^{1,n}\left[\left\{m_\nu \frac{d^2 x_\nu}{d t^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_\nu}\right\} \delta x_\nu + \left\{m_\nu \frac{d^2 y_\nu}{d t^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial y_\nu}\right\} \delta y_\nu + \left\{m_\nu \frac{d^2 z_\nu}{d t^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial z_\nu}\right\} \delta z_\nu\right] = 0 .$$

Das Hamiltonsche Prinzip ist im vorhergehenden nur abgeleitet für konservative Systeme, doch hat die Erfahrung gezeigt, daß es allgemeiner gültig ist. Namentlich Helmholtz hat darüber wichtige Untersuchungen angestellt und gezeigt, daß für nicht konservative Systeme das Hamiltonsche Prinzip auch gilt, wenn man statt $-\delta\Phi$ wieder die Summe $\sum_\nu (X_\nu\, \delta x_\nu + Y_\nu\, \delta y_\nu + Z_\nu\, \delta z_\nu)$ substituiert:

(82a) $$\int_{t_0}^{t_1} \{\delta L + \sum_\nu (X_\nu \delta x_\nu + Y_\nu \delta y_\nu + Z_\nu \delta z_\nu)\} d t = 0 .$$

55. Kanonische Form der Bewegungsgleichungen nach Lagrange.

Wir wollen jetzt das Hamiltonsche Prinzip dazu benutzen, um die Bewegungsgleichungen in beliebigen Koordinaten zu gewinnen. Als „allgemeine Koordinate" bezeichnen wir jede Abmessung, die geeignet ist, die Lage eines Punktes eindeutig zu bestimmen. Es brauchen dies durchaus nicht, wie die kartesischen Koordinaten, Längenabmessungen zu sein, sondern schon das Beispiel der Polarkoordinaten zeigt, daß es auch Winkelgrößen usw. sein können. Wir wählen diese allgemeinen Koordinaten nach Möglichkeit so, daß die vorhandenen Bedingungsgleichungen dabei schon erfüllt werden. Z. B. wenn ein Massenpunkt sich auf einer Kugelfläche vom Radius R bewegen soll, so haben wir als Koordinaten die Zenitdistanz ϑ und das Azimut φ zu wählen, und bei der Bildung von L und Φ hat man zu beachten, daß R konstant ist. Kann man die Koordinaten in dieser Weise wählen, so erhält man so viele unabhängige allgemeine Koordinaten, als das System Freiheitsgrade hat. Wir wollen im folgenden zunächst voraussetzen, daß die allgemeinen Koordinaten alle unabhängig voneinander sind. Wir bezeichnen die allgemeinen Koordinaten durch die Buchstaben $p_1, p_2 \ldots p_\lambda \ldots$; es sind im allgemeinen die kartesischen Koordinaten x_ν, y_ν, z_ν als Funktionen aller allgemeinen Koordinaten $p_1, p_2 \ldots p_\lambda \ldots$ anzusehen. Da nun Φ lediglich eine Funktion der x_ν, y_ν, z_ν ist, so ist, wenn der Zusammenhang zwischen kartesischen und allgemeinen Koordinaten gegeben ist — eine rein geometrische Aufgabe — die potentielle Energie sofort als Funktion von $p_1, p_2 \ldots p_\lambda \ldots$ bekannt. Wir haben also für das folgende:

$$\Phi(p_1\, p_2 \ldots p_\lambda \ldots),$$

und

$$\delta \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial p_1}\delta p_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial p_2}\delta p_2 + \dots \frac{\partial \Phi}{\partial p_\lambda}\delta p_\lambda + \dots,$$

oder

(85)
$$\delta \Phi = \sum_\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial p_\lambda}\delta p_\lambda .$$

Etwas komplizierter ist die Gestalt von L. Denn L ist ja in kartesischen Koordinaten abhängig von $\left(\frac{d x_\nu}{d t}\right)^2$ usw. Nun ist aber allgemein:

(86)
$$x_\nu = x_\nu(p_1\, p_2 \cdots p_\lambda \cdots).$$

Also nach dem Satz vom totalen Differentialquotienten:

$$\frac{d x_\nu}{d t} = \frac{\partial x_\nu}{\partial p_1}\frac{d p_1}{d t} + \frac{\partial x_\nu}{\partial p_2}\frac{d p_2}{d t} + \dots \frac{\partial x_\nu}{\partial p_\lambda}\frac{d p_\lambda}{d t} + \dots .$$

oder:

(87)
$$\frac{d x_\nu}{d t} = \sum_\lambda \frac{\partial x_\nu}{\partial p_\lambda}\frac{d p_\lambda}{d t}.$$

Die zeitlichen Ableitungen der allgemeinen Koordinaten p_λ, also $\frac{d p_\lambda}{d t}$ nennen wir sinngemäß die „allgemeinen Geschwindigkeitskomponenten" und bezeichnen sie durch q_λ. Beachten wir, daß nach (86) die Ausdrücke $\frac{\partial x_\nu}{\partial p_\lambda}$ Funktionen von $p_1, p_2 \dots p_\lambda \dots$ sind, so erhalten wir, wenn wir dies zum Ausdruck bringen:

$$\frac{d x_\nu}{d t} = \sum_\lambda f_\lambda(p_1\, p_2 \cdots p_\lambda \cdots)\cdot q_\lambda$$

also für das in L vorkommende Quadrat $\left(\frac{d x_\nu}{d t}\right)^2$:

(88)
$$\left(\frac{d x_\nu}{d t}\right)^2 = \left[\sum f_\lambda \cdot q_\lambda\right]^2 = A_{11}\, q_1^2 + A_{12}\, q_1\, q_2 + A_{22}\, q_2^2 + A_{13}\, q_1\, q_3 + \cdots + A_{\lambda\lambda}\, q_\lambda^2 + \cdots$$

Dabei sind die Koeffizienten $A_{\varrho\sigma}$ bestimmte Funktionen der p_λ, und der ganze Ausdruck ist eine homogene quadratische Funktion in q_λ, deren Koeffizienten Funktionen der p_λ sind. Also ist L als Funktion der p_λ und q_λ anzusehen, derart, daß wir haben:

$$L(p_1, p_2 \dots p_\lambda \dots;\ q_1, q_2 \dots q_\lambda \dots).$$

Also nimmt die Variation von L folgende Gestalt an:

(89)
$$\delta L = \sum_\lambda \frac{\partial L}{\partial p_\lambda}\delta p_\lambda + \sum_\lambda \frac{\partial L}{\partial q_\lambda}\delta q_\lambda .$$

Mit den Ausdrücken (85) und (89) für δL und $\delta \Phi$ wollen wir nun in das Hamiltonsche Prinzip (82) eingehen; das liefert:

$$(90)\qquad \int_{t_0}^{t_1} dt \cdot \sum_{\nu} \frac{\partial L}{\partial p_\lambda}\,\delta p_\lambda + \int_{t_0}^{t_1} dt \cdot \sum_{\lambda} \frac{\partial L}{\partial q_\lambda}\,\delta q_\lambda - \int_{t_0}^{t_1} dt \cdot \sum_{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial p_\lambda}\,\delta p_\lambda = 0.$$

Darin können wir das erste und dritte Glied, die beide δp_λ enthalten, zusammenfassen:

$$(91)\qquad \int_{t_0}^{t_1} dt \cdot \sum_{\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial p_\lambda} - \frac{\partial \Phi}{\partial p_\lambda}\right) \delta p_\lambda + \int_{t_0}^{t_1} dt \cdot \sum_{\nu} \frac{\partial L}{\partial q_\lambda}\,\delta q_\lambda = 0.$$

Das letzte Glied dieser Gleichung ist noch umzuformen, um darin ebenfalls an Stelle von δq_λ die Variation von δp_λ zu erhalten. Dies ist möglich, da:

$$\delta q_\lambda = \delta \frac{d p_\lambda}{d t} = \frac{d\,\delta p_\lambda}{d t}$$

ist. Das letzte Glied in (91), in dem wir das Summenzeichen der Einfachheit halber jetzt fortlassen, kann also geschrieben werden:

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \cdot \frac{\partial L}{\partial q_\lambda}\,\frac{d\,\delta p_\lambda}{d t} = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial q_\lambda}\, d\,\delta p_\lambda$$

und kann weiter durch partielle Integration umgeformt werden:

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial q_\lambda}\, d\,\delta p_\lambda = \left[\frac{\partial L}{\partial q_\lambda}\,\delta p_\lambda\right]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \delta p_\lambda \cdot \frac{d}{d t}\left(\frac{\partial L}{\partial q_\lambda}\right) \cdot dt.$$

Da für t_0 und t_1 die Variationen δp_λ verschwinden, weil die Variationen δx_ν, δy_ν, δz_ν verschwinden, so ist einfach:

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \cdot \sum_{\nu} \frac{\partial L}{\partial q_\lambda}\,\delta q_\lambda = -\int_{t_0}^{t_1} dt \cdot \sum_{\lambda} \frac{d}{d t}\left(\frac{\partial L}{\partial q_\lambda}\right) \cdot \delta p_\lambda .$$

Das ist die gesuchte Transformation, und diese liefert, in (91) eingesetzt, wenn die zwei Integrale zusammengezogen werden:

$$(92)\qquad \int_{t_0}^{t_1} dt \cdot \sum_{\lambda} \left\{\frac{\partial L}{\partial p_\lambda} - \frac{\partial \Phi}{\partial p_\lambda} - \frac{d}{d t}\left(\frac{\partial L}{\partial q_\lambda}\right)\right\} \delta p_\lambda = 0.$$

Da der Integrand eine stetige Funktion der Zeit ist, könnte man, wenn er von Null verschieden wäre, das Zeitintervall von t_0 bis t_1 so wählen, daß er sein Zeichen nicht ändert. Dann aber könnte die Gleichung (92) nicht bestehen. Also annulliert sich dieser Integrand; wegen der Unabhängigkeit der δp_λ aber zerfällt er wieder in der Weise, daß der Koeffizient für jedes δp_λ für sich verschwindet. Also gilt für jede allgemeine Koordinate die sogenannte „kanonische Bewegungsgleichung" (auch Bewegungsgleichung zweiter Art genannt):

(93) $$\frac{\partial \Phi}{\partial p_\lambda} - \frac{\partial L}{\partial p_\lambda} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_\lambda}\right) = 0.$$

Unter Berücksichtigung des Umstandes, daß Φ nicht von den q_λ abhängt, kann man den verschwindenden Term $-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial q_\lambda}\right)$ hinzufügen. Dann kann man (86) so zusammenfassen:

$$\frac{\partial(\Phi - L)}{\partial p_\lambda} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(\Phi - L)}{\partial q_\lambda}\right) = 0.$$

Die Differenz $\Phi - L = T$ nennt man das „kinetische Potential" und kann dann die Lagrangeschen Gleichungen schreiben:

(94) $$\frac{\partial T}{\partial p_\lambda} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_\lambda} = 0.$$

Wie liegt nun die Sache, wenn die allgemeinen Koordinaten nicht so gewählt worden sind, daß sie alle unabhängig sind, sondern daß noch Bedingungsgleichungen zwischen ihnen bestehen? Dann bleibt offenbar alles im Gedankengange erhalten bis zur Gleichung (92) einschließlich. Aber es kann jetzt nicht mehr geschlossen werden, daß jedes einzelne Glied der Summe

$$\sum_\lambda \left\{\frac{\partial L}{\partial p_\lambda} - \frac{\partial \Phi}{\partial p_\lambda} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_\lambda}\right\}\delta p_\lambda$$

verschwindet, denn dazu ist eben völlige Unabhängigkeit der δp_λ erforderlich. In unserem Falle kann also aus (92) wegen des Verschwindens des Integrals nur geschlossen werden, daß sein muß:

(95) $$\sum \left\{\frac{\partial L}{\partial p_\lambda} - \frac{\partial \Phi}{\partial p_\lambda} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_\lambda}\right)\right\}\delta p_\lambda = 0.$$

Diese Gleichung ist nun zu betrachten in Verbindung mit den Bedingungsgleichungen, von denen etwa die beiden folgenden vorgeschrieben sein mögen:

(96) $$\begin{cases} F_1(p_1 p_2 \cdots p_\lambda \cdots) = 0, \\ F_2(p_1 p_2 \cdots p_\lambda \cdots) = 0. \end{cases}$$

Bilden wir die Variationen δF_1 und δF_2:

$$\delta F_1 \equiv \sum_\lambda \frac{\partial F_1}{\partial p_\lambda}\delta p_\lambda = 0,$$

$$\delta F_2 \equiv \sum_\lambda \frac{\partial F_2}{\partial p_\lambda}\delta p_\lambda = 0;$$

multiplizieren wir mit zwei unbestimmten Faktoren μ_1 und μ_2 und addieren zu (95), so folgt:

(97) $$\sum_\lambda \left\{\frac{\partial L}{\partial p_\lambda} - \frac{\partial \Phi}{\partial p_\lambda} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_\lambda}\right) + \mu_1 \frac{\partial F_1}{\partial p_\lambda} + \mu_2 \frac{\partial F_2}{\partial p_\lambda}\right\}\delta p_\lambda = 0.$$

zu Glng. (82)

[illegible]

[illegible], [illegible] die Bewegung [illegible] die Anfangs-[illegible]

[illegible]

ist, wird [illegible]

Wirkung die Bewegung bestimmt durch die Anfangslagen ($t=t_0$) und die Endlagen ($t=t_1$) der Punkte. Denn [illegible] allen verglichenen [illegible] benachbarten Bewegungen festgehalten [illegible] während die Geschwindigkeiten [illegible] auch die Anfangsgeschwindigkeiten, innerhalb der vorgeschriebenen Bedingungen beliebig variiert werden [illegible]

[illegible] $P_1, P_2 \ldots$ sind die [illegible] allgemeinen Kraftkomponenten [illegible] wir

$$\frac{\partial T}{\partial p_\lambda} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_\lambda}\right) = P_\lambda$$

$$\Sigma P_\lambda dp_\lambda = A = \Sigma\left(q_\lambda d\left(\frac{\partial T}{\partial q_\lambda}\right) - \frac{\partial T}{\partial p_\lambda} dp_\lambda\right)$$

$$dT = \Sigma\left(\frac{\partial T}{\partial q_\lambda} dq_\lambda + \frac{\partial T}{\partial p_\lambda} dp_\lambda\right)$$

Die beiden Ausdrücke zusammen addiert ergeben

$$\Sigma\left(q_\lambda d\left(\frac{\partial T}{\partial q_\lambda}\right) + \frac{\partial T}{\partial q_\lambda} dq_\lambda\right) = d.\Sigma q_\lambda \frac{\partial T}{\partial q_\lambda}$$

Mithin erhält man $A = dE$ oder

$$E = \Sigma q_\lambda \frac{\partial T}{\partial q_\lambda} - T.$$

$E = L + \Phi$ und $T = L - \Phi$

Die [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] V [illegible]

[illegible]

$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\lambda}$ [illegible] nennt man die den allgemeinen [illegible] die [illegible]

Koordinaten [illegible] entsprechenden Bewegungsgrößen. $(p_\lambda = \cdots)$

Dieselben sind lineare homogene Funktionen der Geschwindigkeiten $\dot{q}_\lambda$, lassen sich also umgekehrt [illegible]

diese ausdrücken, [illegible]

$$p = dE = \sum \left(\dot{q}_\lambda \cdots - \frac{\partial T}{\partial p_\lambda} \right)$$ [illegible] folgt

auch [illegible]

$$\frac{\partial E}{\partial p_\lambda} = \dot{q}_\lambda$$ [illegible]

und $\left(\frac{\partial E}{\partial p_\lambda}\right)_{q_\lambda} = \left(\frac{\partial T}{\partial p_\lambda}\right)_{q_\lambda}$ [illegible]

Mit [illegible] Beziehungen [illegible]

[illegible] Gleichungen [illegible]

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\lambda}\right) - \frac{\partial T}{\partial p_\lambda} = \cdots = \left(\cdots \right)$$ [illegible]

$$\frac{dp_\lambda}{dt} = \left(\frac{\partial E}{\partial p_\lambda}\right) \cdots - \left(\cdots \right)$$ die Hamiltonschen [illegible] kanonischen Bewegungsgleichungen [illegible]

$$\frac{dq_\lambda}{dt} = \frac{\partial E}{\partial p_\lambda} + \left(\cdots \right)$$ unabhängige Variablen [illegible]

$$\cdots = \left(\cdots \right)$$

[illegible]

$$T - \cdots = 0$$

$$\Phi - L = T \quad \cdots \quad \Phi + L = 0$$

Durch die zwei Bedingungsgleichungen (96) sind nun zwei der Größen δp_λ, etwa δp_1 und δp_2 durch die übrigen ausdrückbar; bestimmen wir nun, wie früher, die Koeffizienten μ_1 und μ_2 so, daß die Glieder der Klammer mit den Faktoren δp_1 und δp_2 fortfallen, so bleiben nur die Glieder mit $\delta p_3 \ldots \delta p_\lambda \ldots$ übrig, welche jetzt alle unabhängig sind. Deshalb müssen diese Summenglieder einzeln verschwinden, und so erhalten wir insgesamt:

$$\frac{\partial L}{\partial p_1} - \frac{\partial \Phi}{\partial p_1} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_1}\right) + \mu_1 \frac{\partial F_1}{\partial p_1} + \mu_2 \frac{\partial F_2}{\partial p_1} = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial p_2} - \frac{\partial \Phi}{\partial p_2} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_2}\right) + \mu_1 \frac{\partial F_1}{\partial p_2} + \mu_2 \frac{\partial F_2}{\partial p_2} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial L}{\partial p_\lambda} - \frac{\partial \Phi}{\partial p_\lambda} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_\lambda}\right) + \mu_1 \frac{\partial F_1}{\partial p_\lambda} + \mu_2 \frac{\partial F_2}{\partial p_\lambda} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Darin verschwinden, um es nochmals hervorzuheben, die beiden ersten Gleichungen deshalb, weil die Koeffizienten μ_1 und μ_2 so gewählt wurden; die übrigen aber, weil die Größen $\delta p_3 \ldots \delta p_\lambda \ldots$ nun alle voneinander unabhängig sind. Wir erhalten also ganz allgemein als Lagrangesche Gleichungen zweiter Art, wenn Bedingungsgleichungen vorhanden sind, für jede Koordinate:

$$\text{(98)} \qquad \frac{\partial L}{\partial p_\lambda} - \frac{\partial \Phi}{\partial p_\lambda} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_\lambda}\right) + \mu_1 \frac{\partial F_1}{\partial p_\lambda} + \mu_2 \frac{\partial F_2}{\partial p_\lambda} + \ldots = 0.$$

Hier ist noch eine Bemerkung notwendig über die Größen $-\frac{\partial \Phi}{\partial p_\lambda}$, d. h. die negativen Ableitungen der potentiellen Energie Φ nach den allgemeinen Koordinaten. Für kartesische Koordinaten ist die Größe $-\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ die Kraftkomponente parallel der x-Richtung, oder auch: diejenige Kraft, die die x-Koordinate zu verändern bestrebt ist. Da wir nun den Begriff der allgemeinen Koordinaten p_λ und allgemeinen Geschwindigkeiten q_λ eingeführt haben, so liegt es nahe, die Größen $-\frac{\partial \Phi}{\partial p_\lambda}$ in Analogie zu $-\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ als „allgemeine Kraftkomponenten" zu bezeichnen, also unter $P_\lambda = -\frac{\partial \Phi}{\partial p_\lambda}$ die allgemeine Kraft zu verstehen, die die Koordinate p_λ zu verändern bestrebt ist. Es ist nun zu beachten, daß P_λ im allgemeinen nicht die Dimension einer Kraft im gewöhnlichen Sinne, $[MLT^{-2}]$, hat; denn Φ hat — selbstverständlich gleichgültig, in welchen Koordinaten es ausgedrückt ist — stets die Dimension einer Arbeit $[ML^2T^{-2}]$; der Ausdruck $\frac{\partial \Phi}{\partial p_\lambda}$ kann also nur dann die Dimension $[MLT^{-2}]$ haben, wenn p_λ die Dimension $[L]$, d. h. die einer Länge hat. Das ist nun z. B. schon bei räumlichen Polarkoordinaten r, ϑ, φ nicht immer der Fall; allerdings ist $\frac{\partial \Phi}{\partial r}$ von der Dimension $[MLT^{-2}]$, also einer Kraft im alten Sinne, dagegen

$\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta}$ und $\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}$ durchaus nicht; sie sind vielmehr, da Winkel dimensionslos sind, von der Dimension [Kraft × Länge], d. h. von der Dimension, die ein Drehmoment hat. Daher nennt man die allgemeinen Kräfte $P_\lambda = -\frac{\partial \Phi}{\partial p_\lambda}$ auch wohl „Momente". Die von der allgemeinen Kraft P_λ bei einer unendlich kleinen Veränderung von p_λ geleistete Arbeit, ist offenbar $P_\lambda \, \delta p_\lambda$, also die von sämtlichen Kräften des Systems geleistete $\sum\limits_\lambda P_\lambda \, \delta p_\lambda$. Dieser Ausdruck hat natürlich stets die Dimension einer Arbeit, $[ML^2 T^{-2}]$.

Nach diesen Erläuterungen wollen wir den Nutzen der Lagrangeschen Gleichungen an einigen Beispielen zeigen. Zunächst indem wir einen freien Massenpunkt betrachten, dessen Koordinaten x, y, z seien. Dann müssen wir natürlich unsere alten Bewegungsgleichungen wieder erhalten, und die Lagrangeschen Gleichungen lehren uns nichts Neues. Diese Betrachtung ist also nur eine Verifizierung. Es ist in unserem Falle

$$p_1 = x; \quad p_2 = y; \quad p_3 = z; \quad q_1 = \frac{dx}{dt}; \quad q_2 = \frac{dy}{dt}; \quad q_3 = \frac{dz}{dt};$$

also ist die kinetische Energie:

$$L = \frac{m}{2}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\},$$

während Φ eine gegebene Funktion von x, y, z ist, so daß:

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial x} = X, \quad -\frac{\partial \Phi}{\partial y} = Y, \quad -\frac{\partial \Phi}{\partial z} = Z$$

ist. Also folgt z. B. für die x-Richtung:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -X; \qquad \frac{\partial L}{\partial x} = 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{dx}{dt}\right)} = m\frac{dx}{dt}; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{dx}{dt}\right)}\right) = m\frac{d^2x}{dt^2}.$$

Also ist in der Tat nach (93):

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X,$$

und ebenso für die übrigen Richtungen.

Die Lage desselben Punktes können wir in räumlichen Polarkoordinaten ausdrücken. Dann ist:

$$p_1 = r; \quad p_2 = \vartheta; \quad p_3 = \varphi; \quad q_1 = \frac{dr}{dt}; \quad q_2 = \frac{d\vartheta}{dt}; \quad q_3 = \frac{d\varphi}{dt},$$

und:

$$x = r \sin\vartheta \cos\varphi; \quad y = r \sin\vartheta \sin\varphi; \quad z = r\cos\vartheta.$$

Also ist:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt}\sin\vartheta\cos\varphi + r\cos\vartheta\cos\varphi\frac{d\vartheta}{dt} - r\sin\vartheta\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt},$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt}\sin\vartheta\sin\varphi + r\cos\vartheta\sin\varphi\frac{d\vartheta}{dt} + r\sin\vartheta\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt},$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dr}{dt}\cos\vartheta - r\sin\vartheta\frac{d\vartheta}{dt}.$$

Also folgt für die kinetische und potentielle Energie:

$$L = \frac{m}{2}\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + r^2\sin^2\vartheta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right\},$$

$$\Phi = \Phi(r, \vartheta, \varphi).$$

Daraus folgt für die erste Koordinate $p_1 = r$:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial p_1} = \frac{\partial\Phi}{\partial r}; \qquad \frac{\partial L}{\partial r} = mr\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + mr\sin^2\vartheta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2;$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = m\frac{dr}{dt}; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_1}\right) = m\frac{d^2r}{dt^2}.$$

Also lautet die erste Bewegungsgleichung:

$$m\frac{d^2r}{dt^2} - mr\left[\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + \sin^2\vartheta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right] + \frac{\partial\Phi}{\partial r} = 0.$$

Ebenso für $p_2 = \vartheta$; wie haben:

$$\frac{\partial L}{\partial\vartheta} = mr^2\sin\vartheta\cos\vartheta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2; \qquad \frac{\partial L}{\partial\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)} = mr^2\frac{d\vartheta}{dt}.$$

also:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)}\right) = 2mr\frac{d\vartheta}{dt}\frac{dr}{dt} + mr^2\frac{d^2\vartheta}{dt^2}.$$

Also lautet die zweite Bewegungsgleichung:

$$m\left\{2r\frac{dr}{dt}\frac{d\vartheta}{dt} + r^2\frac{d^2\vartheta}{dt^2} - r^2\sin\vartheta\cos\vartheta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right\} + \frac{\partial\Phi}{d\vartheta} = 0.$$

Endlich folgt für $p_3 = \varphi$:

$$\frac{\partial L}{\partial\varphi} = 0; \qquad \frac{\partial L}{\partial\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)} = mr^2\sin^2\vartheta\frac{d\varphi}{dt};$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)}\right) = 2mr\frac{dr}{dt}\sin^2\vartheta\frac{d\varphi}{dt} + 2mr^2\sin\vartheta\cos\vartheta\frac{d\vartheta}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + mr^2\sin^2\vartheta\frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Also ist die dritte Bewegungsgleichung:

$$m\left[2r\frac{dr}{dt}\sin^2\vartheta\frac{d\varphi}{dt} + 2r^2\sin\vartheta\cos\vartheta\frac{d\vartheta}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + r^2\sin^2\vartheta\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right] + \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = 0.$$

Schreiben wir nun dieselben noch einmal übersichtlich zusammen, so lauten die Bewegungsgleichungen eines freien Punktes im Polarkoordinaten:

$$
(99)\quad \begin{cases}
m\left\{\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 - r\sin^2\vartheta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right\} + \frac{\partial\Phi}{\partial r} = 0,\\
m\left\{2r\frac{dr}{dt}\frac{d\vartheta}{dt} + r^2\frac{d^2\vartheta}{dt^2} - r^2\sin\vartheta\cos\vartheta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right\} + \frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} = 0,\\
m\left\{2r\frac{dr}{dt}\sin^2\vartheta\frac{d\varphi}{dt} + 2r^2\sin\vartheta\cos\vartheta\frac{d\vartheta}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\right.\\
\qquad\left. + r^2\sin^2\vartheta\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right\} + \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = 0.
\end{cases}
$$

Spezialisieren wir diese Gleichungen jetzt dahin, daß auf den Massenpunkt die Schwere allein wirken und er sich auf einer Kugelfläche vom Radius R bewegen soll; dann ist $r = R = \text{const.}$ zu setzen und scheidet somit aus der Anzahl der Koordinaten aus, d. h. die erste Gleichung (99) fällt fort. Ferner ist

$$\Phi = mgz = mgR\cos\vartheta,$$

alle Ableitungen von R verschwinden und man erhält die beiden Gleichungen, da noch $\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} = -mgR\sin\vartheta$ wird:

$$
(100)\quad \begin{cases}
R\frac{d^2\vartheta}{dt^2} - R\sin\vartheta\cos\vartheta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - g\sin\vartheta = 0,\\
2\cos\vartheta\frac{d\vartheta}{dt}\cdot\frac{d\varphi}{dt} + \sin\vartheta\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0,
\end{cases}
$$

die mit denen des räumlichen Pendels, nämlich (171) und (172) des dritten Kapitels auf pag. 159 identisch sein müssen. Daß dies der Fall ist, davon kann man sich in der Tat leicht überzeugen; denn die letzte Gleichung (100) kann geschrieben werden:

$$\frac{2\frac{d\sin\vartheta}{dt}}{\sin\vartheta} + \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)}{\frac{d\varphi}{dt}} = 0,$$

oder:

$$\frac{d}{dt}\left(\log\sin^2\vartheta + \log\frac{d\varphi}{dt}\right) = 0,$$

oder:

$$\sin^2\vartheta\cdot\frac{d\varphi}{dt} = \text{Const.},$$

was wir, da R auch konstant ist, auch schreiben können, wenn B eine andere Konstante bedeutet:

$$R^2\sin^2\vartheta\cdot\frac{d\varphi}{dt} = B,$$

was wirklich mit (172) des dritten Kapitels übereinstimmt: es ist der Flächensatz. Setzen wir diese Gleichung in die erste (100) ein, so wird dieselbe:

(101) $$R\frac{d^2\vartheta}{dt^2} - \frac{B^2\cos\vartheta}{R^3\sin^3\vartheta} - g\sin\vartheta = 0,$$

und wenn wir die Gleichung (171) des dritten Kapitels nach t differenzieren und (172) berücksichtigen, erhalten wir sofort diese letzte Gleichung (101).

Spezialisieren wir noch weiter auf eine ebene Bewegung des Punktes auf einem vertikalen Kreise (ebenes Pendel), so brauchen wir nur das Azimut $\varphi = \text{Const} = 0$ zu machen; dann fällt auch die zweite Gleichung (100) fort, und die erste vereinfacht sich zu:

(102) $$R\frac{d^2\vartheta}{dt^2} - g\sin\vartheta = 0,$$

die in der Tat mit (137a) oder (137b) auf pag. 149 des dritten Kapitels identisch ist, wenn man die dortige andere Bezeichnung berücksichtigt.

Weitere Beispiele für die Anwendung der Lagrangeschen Gleichungen werden wir im nächsten Kapitel kennen lernen.

Fünftes Kapitel.

Spezielle Dynamik eines Systems materieller Punkte.

56. Die Atwoodsche Fallmaschine; experimenteller Nachweis der Trägheitskräfte.

Wir wollen zunächst, um die Resultate des vorigen Kapitels zu erläutern, und zwar speziell das d'Alembertsche Prinzip, ein ganz einfaches Massensystem betrachten, bestehend aus zwei Massenpunkten m_1 und m_2, die durch einen über eine feste Rolle laufenden gewichtlosen Faden von konstanter Länge verbunden sind (Fig. 61); auf die Massenpunkte soll von äußeren Kräften nur die Schwere wirken.

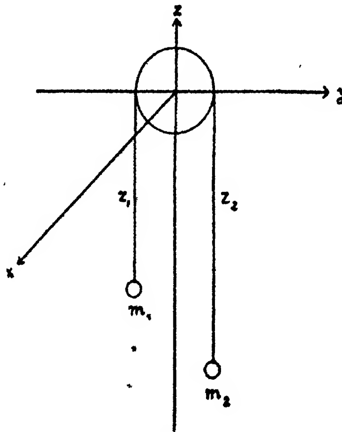


Fig. 61.

Das Koordinatensystem legen wir so, wie in der Figur angedeutet, den Koordinatenanfangspunkt in den Mittelpunkt der Rolle und die positive z-Achse nach oben; die x- und y-Achse spielen hier keine Rolle, weil die ganze Bewegung, wenn die Massen m_1 und m_2 keine Anfangsgeschwindigkeit haben, offenbar parallel der z-Achse vor sich geht.

Wir haben hier den Fall eines Massensystems von zwei Punkten, dessen freie Beweglichkeit durch eine Bedingung eingeschränkt ist, die

wir zunächst feststellen wollen. Nennen wir die z-Koordinaten der beiden Massenpunkte z_1 und z_2, so muß nach Fig. 61 offenbar sein:

(1) $$z_1 + z_2 - l = 0\,,$$

wenn l die Gesamtlänge der frei herabhängenden Fadenstücke ist.

Die Gleichung des d'Alembertschen Prinzips, (60) des vierten Kapitels auf pag. 204, lautet in geeigneter Spezialisierung:

$$\sum_{\nu}^{1,2} \left\{ m_\nu \frac{d^2 z_\nu}{d t^2} - Z_\nu \right\} \delta z_\nu = 0,$$

oder, ausführlicher, da

$$Z_1 = - m_1 g\,; \qquad Z_2 = - m_2 g$$

ist:

(2) $$\left(m_1 \frac{d^2 z_1}{d t^2} + m_1 g \right) \delta z_1 + \left(m_2 \frac{d^2 z_2}{d t^2} + m_2 g \right) \delta z_2 = 0\,.$$

Hier nun kann man z. B. z_1 nach (1) durch z_2 ausdrücken, was liefert:

(3) $$\left\{ \begin{aligned} z_1 &= l - z_2\,, \\ \frac{d^2 z_1}{d t^2} &= - \frac{d^2 z_2}{d t^2}\,, \\ \delta z_1 &= - \delta z_2\,. \end{aligned} \right.$$

Also wird Gleichung (2):

$$\left(m_1 \frac{d^2 z_2}{d t^2} - m_1 g \right) \delta z_2 + \left(m_2 \frac{d^2 z_2}{d t^2} + m_2 g \right) \delta z_2 = 0\,,$$

oder nach der Kürzung durch δz_2

(4) $$\frac{d^2 z_2}{d t^2} (m_1 + m_2) = - (m_2 - m_1) g\,,$$

das liefert für die Beschleunigung $\frac{d^2 z_2}{d t^2}$, mit der sich der zweite Massenpunkt abwärts und folglich der erste aufwärts bewegt:

(5) $$\frac{d^2 z_2}{d t^2} = - \frac{d^2 z_1}{d t^2} = - \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}\, g\,;$$

diese Gleichung enthält die Theorie der Atwoodschen Fallmaschine..

Denn dieser Apparat dient bekanntlich zur Demonstration der Fallgesetze, die er dadurch ermöglicht, daß bei ihm die Beschleunigung der fallenden Masse m_2 beliebig klein gemacht werden kann, wenn man gemäß Gleichung (5), m_1 geeignet wählt, nämlich möglichst nahe gleich m_2.

Wir hätten bei der Behandlung dieses Problems auch von vornherein statt der Gleichung (60) des vierten Kapitels die fertigen Lagrangeschen Gleichungen (64) desselben Kapitels auf pag. 205 für ein Massensystem mit beschränkter Bewegungsfreiheit anwenden können. Denn diese liefern für z_1 und z_2, wenn λ_1 der Lagrangesche unbestimmte Multiplikator ist:

$$(6)\quad \begin{cases} m_1 \dfrac{d^2 z_1}{dt^2} - Z_1 + \lambda_1 \dfrac{\partial F_1}{\partial z_1} = 0, \\ m_2 \dfrac{d^2 z_2}{dt^2} - Z_2 + \lambda_1 \dfrac{\partial F_1}{\partial z_2} = 0. \end{cases}$$

In unserem Falle ist gemäß (1)

$$F_1 \equiv z_1 + z_2 - l = 0,$$

also ist

$$\frac{\partial F_1}{\partial z_1} = \frac{\partial F_1}{\partial z_2} = 1;$$

folglich liefern die Gleichungen (6):

$$(7)\quad \begin{cases} m_1 \dfrac{d^2 z_1}{dt^2} + m_1 g + \lambda_1 = 0, \\ m_2 \dfrac{d^2 z_2}{dt^2} + m_2 g + \lambda_1 = 0, \end{cases}$$

die zusammen mit (1) zur Bestimmung der drei Unbekannten z_1, z_2, λ_1 ausreichen. Da aus (1) oder (3) folgt: $\frac{d^2 z_1}{dt^2} = -\frac{d^2 z_2}{dt^2}$, so liefert z. B. Subtraktion der beiden Gleichungen (7) wieder das Resultat der Gleichung (5):

$$\frac{d^2 z_2}{dt^2} = -\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g,$$

was zu beweisen war.

Von Interesse ist es noch, die Größen $-\lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial z_1}$ und $-\lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial z_2}$, die hier mit $-\lambda_1$ zusammenfallen, zu berechnen. Das ergibt sich durch Einsetzen von (5) in (7) zu:

$$(8)\quad -\lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial z_1} = -\lambda_1 \frac{\partial F_1}{d z_2} = -\lambda_1 = \frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g.$$

Dieser Ausdruck stellt nach den allgemeinen Auseinandersetzungen der Nr. 51 des vierten Kapitels die Kraft dar, mit der die Bedingungsgleichung (1) auf die beiden Massenpunkte wirkt, durch die die Bedingungsgleichung also ersetzt werden kann.

Dieses einfache Beispiel ist nun sehr geeignet, den Sinn des d'Alembertschen Prinzips klar zu machen. Wir können dieses so aussprechen: Es gestattet, die Gesetze der Dynamik auf die der Statik zurückzuführen, wenn man statt der explizit gegebenen Kräfte die Summe aus ihnen und den **d'Alembertschen Trägheitskräften** $-m_\nu \frac{d^2 x_\nu}{dt^2}$, $-m_\nu \frac{d^2 y_\nu}{dt^2}$, $-m_\nu \frac{d^2 z_\nu}{dt^2}$ einführt; diese Kräfte zusammen halten sich das Gleichgewicht. Es ist schon früher mehrfach darauf hingewiesen worden, daß die **Trägheitskräfte gar nicht wirklich auf den Massenpunkt agieren** (sonst gehörten sie ja zu den explizit gegebenen Kräften); es sind **Scheinkräfte**, deren Hinzufügung zu den expliziten es gestattet, die einfacheren Gesetze der Statik an

Stelle der komplizierteren der Dynamik anzuwenden. Diesen Gedankengang wollen wir am Beispiele der Atwoodschen Fallmaschine erläutern.

Wir wollen zu dem Zwecke die Vorfrage erörtern, unter welchen Bedingungen sich die Scheinkräfte $-m_\nu \frac{d^2 x_\nu}{dt^2}$, ... überhaupt bemerkbar machen bzw. experimentell nachweisen lassen. Darauf gibt eben das d'Alembertsche Prinzip Antwort: Sie sind nur dann da, wenn man an dynamische Probleme mit den Methoden der Statik herangeht; denn die statischen Methoden und Sätze gelten ja nur dann für dynamische Vorgänge, wenn man diese Scheinkräfte den explizit gegebenen hinzufügt. Man kann diesen Sachverhalt auch so ausdrücken: Indem man auf ein dynamisches Problem die Gesetze der Statik anwendet, begeht man einen Fehler; diesen kompensiert man dann wieder dadurch, daß man zu den expliziten noch die Scheinkräfte $-m_\nu \frac{d^2 x_\nu}{dt^2}$, ..., eben die d'Alembertschen Trägheitskräfte, hinzufügt.

Die Atwoodsche Fallmaschine bildet nun, in diesem Sinne betrachtet, ein Mittel, die Trägheitskräfte nachzuweisen.

Ebenso wie die Massen m_1 und m_2 auf den sie verbindenden Faden Kräfte ausüben, so tut dies nach dem Reaktionsprinzip auch der Faden umgekehrt auf die beiden Massen. Diese Rückwirkung kommt in der Natur in folgender Weise zustande: die angehängte Masse verlängert durch ihr Gewicht den Faden um ein außerordentlich kleines Stück; durch diese Verlängerung werden alle Punkte des Fadens aus ihrer Ruhelage herausgerückt und dadurch werden „elastische" Kräfte im Faden geweckt, wie wir sie in Nr. 33ff. kennen gelernt haben, und diese üben die Reaktion auf die angehängte Masse aus.

Da die Masse M die Kraft $-Mg$ auf den Faden ausübt, so wird in dem Faden eine elastische Kraft, die wir seine Spannung S nennen wollen, geweckt, vom selben Betrage und umgekehrter Richtung. Wir haben also den Satz: die Spannung eines Fadens ist ihrem Betrage nach gleich dem angehängten Gewicht; in Formel:

(9) $$S = Mg.$$

Es ist nun für das Folgende wohl zu beachten, daß bei diesem Satze vorausgesetzt ist, daß Gleichgewicht herrscht. Die Massen dürfen keine Beschleunigung haben; Gleichung (9) gilt also nur für die Statik.

Würden wir diesen Satz ohne weiteres auf die Spannung des Fadens an der Atwoodschen Fallmaschine übertragen, so würden wir das Resultat erhalten, daß auf der einen Seite des Fadens die Spannung $S_1 = m_1 g$, auf der anderen Seite die Spannung $S_2 = m_2 g$ herrschte, so daß an einer (übrigens nicht näher bestimmbaren) Stelle des Fadens die Spannung desselben unstetig sein müßte, was offenbar unmöglich ist, wenn keine anderen Kräfte als die hier angegebenen wirken. Wo liegt

der Fehler? Darin, daß wir einen statischen Satz ohne weiteres auf ein dynamisches Problem übertragen haben, was nach dem d'Alembertschen Prinzip nur dann zulässig ist, wenn gleichzeitig die expliziten Kräfte um die Trägheitskräfte vermehrt werden; letzteres haben wir unterlassen und das ist jetzt nachzuholen.

Die expliziten Kräfte sind:

$$Z_1 = -m_1 g; \quad Z_2 = -m_2 g.$$

Die Trägheitskräfte sind $-m_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2}$ und $-m_2 \frac{d^2 z_2}{dt^2}$, also nach Gleichung (5), wo die Beschleunigungen $\frac{d^2 z_1}{dt^2}$ und $\frac{d^2 z_2}{dt^2}$ ausgerechnet sind:

$$-m_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} = -m_1 \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g; \quad -m_2 \frac{d^2 z_2}{dt^2} = m_2 \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g.$$

Also beträgt die Summe der expliziten und Trägheitskräfte:

$$(10) \quad \begin{cases} Z_1 - m_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} = -m_1 g - m_1 \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g = -\frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g, \\ Z_2 - m_2 \frac{d^2 z_2}{dt^2} = -m_2 g + m_2 \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g = -\frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g, \end{cases}$$

also ist die Spannung des Fadens gleich und entgegengesetzt diesen beiden Ausdrücken, also auf beiden Seiten gleich, nämlich:

$$(11) \quad S_1 = S_2 = \frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g.$$

Bringt man links und rechts in den Fäden je eine Federwage an, so zeigen während der Bewegung die beiden Federwagen diese Spannung $S_1 = S_2$ an. Wird der Faden von außen festgehalten, so würde die linke Federwage die Spannung $m_1 g$, die rechte die Spannung $m_2 g$ anzeigen. Diese Abweichung in den Anzeigen der Federwage während des dynamischen Vorganges und während der Ruhe demonstriert schlagend die Wirkung der Trägheitskräfte und somit die Richtigkeit des d'Alembertschen Prinzips. Ähnliche Versuche zur Demonstration des d'Alembertschen Prinzips sind von O. Lummer und C. Schaefer beschrieben worden.[1]

Wir gehen jetzt zu einer etwas komplizierteren Fallmaschine über, die man als „zusammengesetzte Fallmaschine" bezeichnen könnte. Über eine feste Rolle, in der der Anfangspunkt des Koordinatensystems liegt, geht ein Faden von solcher Länge, daß die Summe der frei herabhängenden Stücke l_1 ist; an dem einen Ende hängt die Masse m_1;

[1] O. Lummer u. C. Schaefer, Physikal. Zeitschr. 7, pag. [illegible]. 1906.

an dem anderen Ende ist eine Rolle von der Masse m_2 befestigt; über diese letztere läuft wieder ein Faden von der „freien" Länge l_2, der an dem einen Ende die Masse m_3, an dem anderen die Masse m_4 trägt. Es sind die Beschleunigungen für jeden Massenpunkt festzustellen.

Wir haben zuerst die beiden Bedingungsgleichungen aufzustellen, die die freie Beweglichkeit der Massen einschränken. In der nämlichen

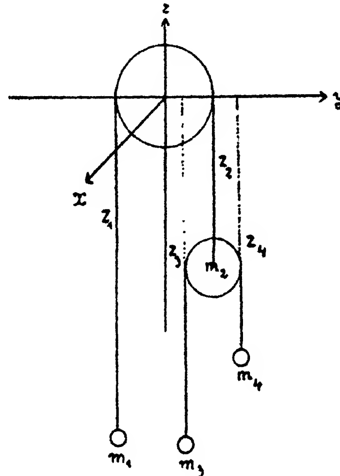


Fig. 62.

Bezeichnungsweise wie vorhin sind diese, wie sofort aus der Figur 62 ablesbar:

$$(12)\qquad \begin{cases} F_1 \equiv z_1 + z_2 - l_1 = 0\,, \\ F_2 \equiv z_4 + z_3 - 2z_2 - l_2 = 0; \end{cases}$$

also haben wir nach den Gleichungen (64) des IV. Kapitels auf pag. 205 für die vier Massen:

$$(13)\qquad \begin{cases} Z_1 - m_1 \dfrac{d^2 z_1}{dt^2} + \lambda_1 \dfrac{\partial F_1}{\partial z_1} + \lambda_2 \dfrac{\partial F_2}{\partial z_1} = 0, \\ Z_2 - m_2 \dfrac{d^2 z_2}{dt^2} + \lambda_1 \dfrac{\partial F_1}{\partial z_2} + \lambda_2 \dfrac{d F_2}{\partial z_2} = 0, \\ Z_3 - m_3 \dfrac{d^2 z_3}{dt^2} + \lambda_1 \dfrac{\partial F_1}{\partial z_3} + \lambda_2 \dfrac{\partial F_2}{\partial z_3} = 0, \\ Z_4 - m_4 \dfrac{d^2 z_4}{dt^2} + \lambda_1 \dfrac{\partial F_1}{\partial z_4} + \lambda_2 \dfrac{\partial F_2}{\partial z_4} = 0, \end{cases}$$

die zusammen mit den zwei Gleichungen (12) hinreichen, um die sechs Unbekannten $z_1, z_2, z_3, z_4, \lambda_1, \lambda_2$ zu bestimmen. Setzen wir für die Z und die Ableitungen von F_1 und F_2 die Werte ein, so folgt aus (13):

$$
(14) \quad \begin{cases} -m_1 g - m_1 \frac{d^2 z_1}{d t^2} + \lambda_1 = 0, \\ -m_2 g - m_2 \frac{d^2 z_2}{d t^2} + \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0, \\ -m_3 g - m_3 \frac{d^2 z_3}{d t^2} + \lambda_2 = 0, \\ -m_4 g - m_4 \frac{d^2 z_4}{d t^2} + \lambda_2 = 0. \end{cases}
$$

Vermittels (12) folgt nun zuerst:

$$
(15) \quad \begin{cases} -\frac{d^2 z_1}{d t^2} = \frac{d^2 z_2}{d t^2}, \\ \frac{d^2 z_4}{d t^2} = -\frac{d^2 z_3}{d t^2} + 2\frac{d^2 z_2}{d t^2} = -\frac{d^2 z_3}{d t^2} - 2\frac{d^2 z_1}{d t^2}, \end{cases}
$$

also, wenn man diese Werte für $\frac{d^2 z_2}{d t^2}$ und $\frac{d^2 z_4}{d t^2}$ in (14) einsetzt:

$$
(16) \quad \begin{cases} -m_1 g - m_1 \frac{d^2 z_1}{d t^2} + \lambda_1 = 0, \\ -m_2 g + m_2 \frac{d^2 z_1}{d t^2} + \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0, \\ -m_3 g - m_3 \frac{d^2 z_3}{d t^2} + \lambda_2 = 0, \\ -m_4 g + m_4 \frac{d^2 z_3}{d t^2} + 2 m_4 \frac{d^2 z_1}{d t^2} + \lambda_2 = 0. \end{cases}
$$

Aus diesen Gleichungen wollen wir zunächst $\frac{d^2 z_1}{d t^2}$ und $\frac{d^2 z_3}{d t^2}$ berechnen.

Die Addition der beiden letzten Gleichungen liefert:

$$
-(m_3 + m_4) g + \frac{d^2 z_3}{d t^2}(m_4 - m_3) + 2 m_4 \frac{d^2 z_1}{d t^2} + 2\lambda_2 = 0.
$$

Subtrahiert man diese von der ersten, so ist:

$$
g(m_3 + m_4 - m_1) - \frac{d^2 z_3}{d t^2}(m_4 - m_3) - \frac{d^2 z_1}{d t^2}(2 m_4 + m_1) + \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0,
$$

und subtrahiert man davon die zweite, so folgt eine Gleichung, die λ_1 und λ_2 nicht mehr enthält:

$$
(17) \quad g(m_2 + m_3 + m_4 - m_1) - \frac{d^2 z_3}{d t^2}(m_4 - m_3) - \frac{d^2 z_1}{d t^2}(2 m_4 + m_1 + m_2) = 0.
$$

Eine zweite Gleichung zwischen $\frac{d^2 z_3}{d t^2}$ und $\frac{d^2 z_1}{d t^2}$, die frei von den λ ist, liefert die Subtraktion der beiden letzten Gleichungen:

$$
(18) \quad g(m_4 - m_3) - \frac{d^2 z_3}{d t^2}(m_4 + m_3) - \frac{d^2 z_1}{d t^2} 2 m_4 = 0.
$$

Die Kombination von (17) und (18) liefert endlich für $\frac{d^2 z_1}{d t^2}$ und $\frac{d^2 z_3}{d t^2}$ die Werte:

$$(19)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2 z_1}{d t^2} = -g\,\dfrac{(m_3 + m_4)(m_2 + m_3 + m_4 - m_1) - (m_4 - m_3)^2}{2m_4(m_4 - m_3) - (2m_4 + m_1 + m_2)(m_4 + m_3)}, \\[2ex] \dfrac{d^2 z_3}{d t^2} = \dfrac{-g}{m_3 + m_4}\left[m_4 - m_3 + 2m_4 \cdot \dfrac{(m_3 + m_4)(m_2 + m_3 + m_4 - m_1) - (m_4 - m_3)^2}{2m_4(m_4 - m_3) - (2m_4 - m_1 + m_2)(m_4 + m_3)}\right], \end{cases}$$

und folglich sind gemäß (15) auch die übrigen Beschleunigungen $\frac{d^2 z_2}{d t^2}$ und $\frac{d^2 z_4}{d t^2}$ bestimmt. Daraus ergeben sich dann sofort die Werte für λ_1 und λ_2, womit alles bestimmt ist. Da die Formeln etwas lang werden, wollen wir jetzt nur den einfachen Fall weiterbehandeln, daß

$$(20)\qquad m_1 = 4m; \quad m_2 = m_3 = m; \quad m_4 = 2m$$

ist. Da dann der über die feste Rolle gehende Faden l_1 zu beiden Seiten insgesamt die Massen $4m$ trägt, so sollte man bei flüchtiger Prüfung erwarten, daß $\frac{d^2 z_1}{d t^2} = 0$ sein würde. Dies ist jedoch keineswegs der Fall, und der Fehler dieses Schlußverfahrens liegt wieder in der Ignorierung der Trägheitskräfte. Die Formeln (19) und (15) ergeben unter der Bedingung (20) vielmehr folgende Werte für die Beschleunigungen der vier Massenpunkte:

$$(21)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2 z_1}{d t^2} = -\dfrac{1}{23}\,g, \\[2ex] \dfrac{d^2 z_2}{d t^2} = +\dfrac{1}{23}\,g, \\[2ex] \dfrac{d^2 z_3}{d t^2} = +\dfrac{9}{23}\,g, \\[2ex] \dfrac{d^2 z_4}{d t^2} = -\dfrac{7}{23}\,g. \end{cases}$$

Die Masse $m_1 = 4m$ bleibt also nicht in Ruhe, sondern bewegt sich mit der Beschleunigung $\frac{1}{23}g$ nach unten, was a priori durchaus nicht zu sagen war. Für λ_1 und λ_2 findet man dann die Werte:

$$(22)\quad \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{88}{23}\,m g, \\[2ex] \lambda_2 = \dfrac{32}{23}\,m g, \end{cases}$$

womit die Aufgabe vollkommen gelöst ist.

Ganz interessant ist nun umgekehrt die Frage, welche Verhältnisse zwischen den vier Massen bestehen müssen, damit der erste Massenpunkt unbeschleunigt bleibt. Dazu muß nach der ersten Gleichung (19) sein:

$$(23)\qquad (m_3 + m_4)(m_2 + m_3 + m_4 - m_1) = (m_4 - m_3)^2.$$

Betrachten wir m_2, m_3, m_4 als gegeben, so muß m_1 folgenden Wert haben:

$$(24)\qquad m_1 = m_2 + m_3 + m_4 - \frac{(m_4 - m_3)^2}{m_3 + m_4}.$$

Es ist also nicht, wie in (20) angenommen worden war, $m_1 = m_2 + m_3 + m_4$, sondern m_1 stets kleiner als die Summe der drei übrigen Massen, wenn der triviale Fall $m_3 = m_4$ ausgeschlossen wird.

57. Freie kleine Schwingungen eines Systems von Massenpunkten.

Wir wollen ein System von Massenpunkten in der Nähe seiner stabilen Gleichgewichtslage betrachten; dann ist die potentielle Energie Φ in derselben ein Minimum, also, wenn wir Φ in der Gleichgewichtslage gleich Null wählen, in der Umgebung derselben positiv.

Wir wollen annehmen, das System sei charakterisiert durch N allgemeine unabhängige Koordinaten, die wir der Einfachheit halber durch $x_1, x_2, x_3 \ldots x_N$ bezeichnen. Das System hat also nach unserer Voraussetzung N Freiheitsgrade. Die Gleichgewichtslage sei durch die Werte $x_1^0, x_2^0, x_3^0 \ldots x_N^0$ bestimmt. Wir nennen dann die Verrückungen aus der Gleichgewichtslage

$$x_1 - x_1^0,\; x_2 - x_2^0,\; \ldots\; x_N - x_N^0 \quad \text{bzw.} \quad \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_N,$$

welch' letztere Größen wir auch als Koordinaten nehmen können und wollen.

Wir können Φ in der Umgebung der Gleichgewichtslage in eine Taylorsche Reihe entwickeln; brechen wir die Entwickelung mit den quadratischen Gliedern ab, so haben wir:

$$\Phi = \Phi(x_1^0 x_2^0 \ldots x_N^0) + \sum_{\nu}^{1,N} \frac{\partial \Phi}{\partial x_\nu} \xi_\nu + \frac{1}{2} \sum_{\nu}^{1,N} \sum_{\mu}^{1,N} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_\nu \, \partial x_\mu} \xi_\nu \xi_\mu . \tag{25}$$

In dieser Gleichung sind aber, da $(x_1^0 x_2^0 \ldots x_N^0)$ eine Gleichgewichtslage charakterisieren, das konstante und die linearen Glieder gleich Null; es bleiben nur die quadratischen Glieder übrig. Bezeichnen $b_{\nu\mu}$ leicht erkennbare Abkürzungen, wobei wegen ihrer Bedeutung in (25) $b_{\nu\mu} = b_{\mu\nu}$ ist, so können wir also Φ schreiben:

$$\left.\begin{aligned}
2\Phi = b_{11}\,\xi_1^2 &+ b_{12}\,\xi_1\,\xi_2 + b_{13}\,\xi_1\,\xi_3 + \ldots b_{1N}\,\xi_1\,\xi_N \\
+ b_{21}\,\xi_2\,\xi_1 &+ b_{22}\,\xi_2^2 + b_{23}\,\xi_2\,\xi_3 + \ldots b_{2N}\,\xi_2\,\xi_N \\
+ b_{31}\,\xi_3\,\xi_1 &+ b_{32}\,\xi_3\,\xi_2 + b_{33}\,\xi_3^2 + \ldots b_{3N}\,\xi_3\,\xi_N \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
+ b_{N1}\,\xi_N\,\xi_1 &+ b_{N2}\,\xi_N\,\xi_2 + b_{N3}\,\xi_N\,\xi_3 + \ldots b_{NN}\,\xi_N^2 .
\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Ähnlich ist die kinetische Energie L, wie wir bereits in Nr. 55 gesehen haben, eine homogene quadratische Funktion der allgemeinen Geschwindigkeiten $\frac{d\xi_\nu}{dt}$, die wir im folgenden der Kürze halber durch $\dot{\xi}_\nu$ bezeichnen; ihre Koeffizienten sind Funktionen von ξ_ν. Da wir uns aber stets in der Nähe der Gleichgewichtslage halten, so können in erster Näherung, die

hier ausreicht, diese Koeffizienten als konstant betrachtet werden. Wir wollen sie durch $a_{\nu\mu}$ bezeichnen, wobei ebenfalls $a_{\nu\mu} = a_{\mu\nu}$ ist. Demgemäß ist in unserem Falle L in der Form darstellbar:

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned} 2L = a_{11}\dot{\xi}_1^2 &+ a_{12}\dot{\xi}_1\dot{\xi}_2 + a_{13}\dot{\xi}_1\dot{\xi}_3 + \dots + a_{1N}\dot{\xi}_1\dot{\xi}_N \\ &+ a_{21}\dot{\xi}_2\dot{\xi}_1 + a_{22}\dot{\xi}_2^2 + a_{23}\dot{\xi}_2\dot{\xi}_3 + \dots + a_{2N}\dot{\xi}_2\dot{\xi}_N \\ &+ a_{31}\dot{\xi}_3\dot{\xi}_1 + a_{32}\dot{\xi}_3\dot{\xi}_2 + a_{33}\dot{\xi}_3^2 + \dots + a_{3N}\dot{\xi}_3\dot{\xi}_N \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &+ a_{N1}\dot{\xi}_N\dot{\xi}_1 + a_{N2}\dot{\xi}_N\dot{\xi}_2 + \qquad \dots + a_{NN}\dot{\xi}_N^2. \end{aligned}\right.$$

Wir wenden jetzt die Lagrangeschen Gleichungen zweiter Art (Gleichung (93) des vorigen Kapitels auf pag. 224) an, die wir hier nochmals für unsere Koordinaten anschreiben wollen:

$$(28)\quad \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_\nu} - \frac{\partial L}{\partial \xi_\nu} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{d\xi_\nu}{dt}\right)}\right) = 0.$$

Nach (27) ist nun hier stets $\frac{\partial L}{\partial \xi_\nu} = 0$; also ist noch einfacher:

$$(29)\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{d\xi_\nu}{dt}\right)} + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_\nu} = 0.$$

Die Ausführung dieser Differentiationen liefert das folgende System von N linearen homogenen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, wobei wir wieder der Kürze halber Differentiationen nach t durch **Punkte** bezeichnen:

$$(30)\left\{\begin{aligned} a_{11}\ddot{\xi}_1 + a_{12}\ddot{\xi}_2 + a_{13}\ddot{\xi}_3 + \dots a_{1N}\ddot{\xi}_N + b_{11}\xi_1 + b_{12}\xi_2 + \dots + b_{1N}\xi_N = 0, \\ a_{21}\ddot{\xi}_1 + a_{22}\ddot{\xi}_2 + a_{23}\ddot{\xi}_3 + \dots a_{2N}\ddot{\xi}_N + b_{21}\xi_1 + b_{22}\xi_2 + \dots + b_{2N}\xi_N = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{N1}\ddot{\xi}_1 + a_{N2}\ddot{\xi}_2 + a_{N3}\ddot{\xi}_3 + \dots a_{NN}\ddot{\xi}_N + b_{N1}\xi_1 + b_{N2}\xi_2 + \dots + b_{NN}\xi_N = 0. \end{aligned}\right.$$

Wegen der Linearität und Homogenität dieser Gleichungen liegt es nahe, den alten Ansatz (15) des III. Kapitels auf pag. 114 für die kleinen Schwingungen eines Massenpunktes auch hier anzuwenden, also zu setzen, wenn A_ν und ϱ zu bestimmende Konstanten sind:

$$(31)\quad \xi_\nu = A_\nu \cdot e^{\varrho t}.$$

Setzt man diesen Ansatz in das System (30) ein, so erhält man folgendes System in den A_ν linearer Gleichungen:

$$\begin{aligned} a_{11}\varrho^2 A_1 + a_{12}\varrho^2 A_2 + \dots a_{1N}\varrho^2 A_N + b_{11}A_1 + b_{12}A_2 + \dots b_{1N}A_N = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{N1}\varrho^2 A_1 + a_{N2}\varrho^2 A_2 + \dots a_{NN}\varrho^2 A_N + b_{N1}A_1 + b_{N2}A_2 + \dots b_{NN}A_N = 0, \end{aligned}$$

oder nach den $A_1, A_2, A_3 \dots A_N$ geordnet:

$$(32)\quad \begin{cases} A_1(b_{11}+a_{11}\varrho^2)+A_2(b_{12}+a_{12}\varrho^2)+\ldots A_N(b_{1N}+a_{1N}\varrho^2)=0,\\ A_1(b_{21}+a_{21}\varrho^2)+A_2(b_{22}+a_{22}\varrho^2)+\ldots A_N(b_{2N}+a_{2N}\varrho^2)=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ A_1(b_{N1}+a_{N1}\varrho^2)+A_2(b_{N2}+a_{N2}\varrho^2)+\ldots A_N(b_{NN}+a_{NN}\varrho^2)=0. \end{cases}$$

Diese N linearen und homogenen Gleichungen für $A_1 \ldots A_N$ sind nur dann durch von Null verschiedene Werte dieser Unbekannten lösbar, wenn die Determinante des Gleichungssystems verschwindet, also wenn:

$$(33)\quad \begin{vmatrix} b_{11}+a_{11}\varrho^2, & b_{12}+a_{12}\varrho^2, & \ldots & b_{1N}+a_{1N}\varrho^2\\ b_{21}+a_{21}\varrho^2, & b_{22}+a_{22}\varrho^2, & \ldots & b_{2N}+a_{2N}\varrho^2\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ b_{N1}+a_{N1}\varrho^2, & b_{N2}+a_{N2}\varrho^2, & \ldots & b_{NN}+a_{NN}\varrho^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung ist erfüllbar, da ϱ noch unbekannt ist. Sie stellt offenbar eine Gleichung N^{ten} Grades für ϱ^2 dar.

Zunächst läßt sich zeigen, daß alle Wurzeln dieser Gleichung nur negativ reell sein können. Um dies zu beweisen, betrachten wir eine, etwa die νte der Gleichungen (32), die folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$(34)\quad \varrho^2[A_1 a_{\nu 1}+A_2 a_{\nu 2}+\ldots A_N a_{\nu N}]+[A_1 b_{\nu 1}+A_2 b_{\nu 2}+\ldots A_N b_{\nu N}]=0.$$

Jetzt führen wir folgende Bezeichnungen ein: statt der Unbekannten $A_1 \ldots A_N$ wollen wir für diese Untersuchung $u_1 \ldots u_N$, und λ statt ϱ^2 schreiben; also wird (34):

$$(34\text{a})\quad \lambda\sum_{\mu}^{1,N} a_{\nu\mu}u_\mu+\sum_{\mu}^{1,N} b_{\nu\mu}u_\mu=0.$$

Jetzt benutzen wir folgende Abkürzungen: Es ist nach (26) und (27)

$$2L=\sum a_{\nu\mu}\dot{\xi}_\nu\dot{\xi}_\mu,\qquad 2\Phi=\sum b_{\nu\mu}\xi_\nu\xi_\mu.$$

Setzen wir in L statt $\dot{\xi}_\nu : u_\nu$ in Φ statt $\xi_\nu : u_\nu$, so erhalten wir:

$$2L=\sum a_{\nu\mu}u_\nu u_\mu,\qquad 2\Phi=\sum b_{\nu\mu}u_\nu u_\mu,$$

und es ist

$$(34\text{b})\quad \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial u_\nu}=a_{\nu 1}u_1+a_{\nu 2}u_2+\ldots a_{\nu N}u_N=\sum\limits_{\mu} a_{\nu\mu}u_\mu \equiv L_\nu(u),\\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial u_\nu}=b_{\nu 1}u_1+b_{\nu 2}u_2+\ldots b_{\nu N}u_N=\sum\limits_{\mu} b_{\nu\mu}u_\mu \equiv \Phi_\nu(u). \end{cases}$$

Also haben wir statt (34a):

$$(35)\quad \lambda L_\nu(u)+\Phi_\nu(u)=0.$$

Diese Gleichungen sind identisch mit den N Gleichungen (32). Ferner ist nun, wie durch Ausrechnung leicht zu sehen ist:

$$(36)\quad \begin{cases} 2L(u) = \sum a_{\nu\mu} u_\nu u_\mu = \sum\limits_\nu u_\nu L_\nu(u), \\ 2\Phi(u) = \sum b_{\nu\mu} u_\nu u_\mu = \sum\limits_\nu u_\nu \Phi_\nu(u), \end{cases}$$

und ebenso, wenn v_ν eine andere Variablenreihe ist:

$$(36\text{a})\quad \begin{cases} \sum\limits_\nu v_\nu L_\nu(u) = \sum u_\nu L_\nu(v) = \sum a_{\nu\mu} u_\nu v_\mu = \sum a_{\nu\mu} v_\nu u_\mu, \\ \sum\limits_\nu v_\nu \Phi_\nu(u) = \sum u_\nu \Phi_\nu(v) = \sum b_{\nu\mu} u_\nu v_\mu = \sum b_{\nu\mu} v_\nu u_\mu. \end{cases}$$

Nach diesen Vorbereitungen nehmen wir an, λ sei komplex $= k + li$; dann werden auch die Werte u nach Gleichung (35) komplex sein:

$$u_\nu = \chi_\nu + i\psi_\nu.$$

Nehmen wir dies an, so können wir in (35) L_ν und Φ_ν in den reellen und imaginären Teil spalten, und zwar haben, wie man sich vermittels der Gleichung (34a) leicht überzeugt, der reelle und imaginäre Teil dieselbe Gestalt; also:

$$(k + li)[L_\nu(\chi) + iL_\nu(\psi)] + \Phi_\nu(\chi) + i\Phi_\nu(\psi) = 0;$$

also weiter:

$$(37)\quad \begin{cases} kL_\nu(\chi) + \Phi_\nu(\chi) - l\cdot L_\nu(\psi) = 0 & \big|\ \psi_\nu \\ kL_\nu(\psi) + \Phi_\nu(\psi) + l\cdot L_\nu(\chi) = 0 & \big|\ \chi_\nu \end{cases}$$

Erweitert man die Gleichungen (37) resp. mit ψ_ν und χ_ν, und summiert über ν, so folgt:

$$k\sum_\nu \psi_\nu L_\nu(\chi) + \sum_\nu \psi_\nu \Phi_\nu(\chi) - l\sum_\nu \psi_\nu \cdot L_\nu(\psi) = 0,$$
$$k\sum_\nu \chi_\nu L_\nu(\psi) + \sum_\nu \chi_\nu \Phi_\nu(\psi) + l\sum_\nu \chi_\nu \cdot L_\nu(\chi) = 0.$$

Unter Heranziehung von (36) und (36a) kann das geschrieben werden:

$$(38)\quad \begin{cases} k\sum\limits_{\nu,\mu} a_{\nu\mu}\psi_\nu\chi_\mu + \sum\limits_{\nu,\mu} b_{\nu\mu}\psi_\nu\chi_\mu - 2lL(\psi) = 0, \\ k\sum\limits_{\nu,\mu} a_{\nu\mu}\psi_\nu\chi_\mu + \sum\limits_{\nu,\mu} b_{\nu\mu}\psi_\nu\chi_\mu + 2lL(\chi) = 0, \end{cases}$$

also folgt:

$$-l\cdot L(\psi) = +lL(\chi),$$

und da l nach Voraussetzung $\neq 0$ ist:

$$(39)\quad L(\chi) = -L(\psi).$$

L als kinetische Energie ist aber nun stets positiv für alle reellen Werte der Variabeln; also $L(\chi) > 0$; $L(\psi) > 0$; mithin kann die letzte Gleichung nicht bestehen; also kann λ nicht komplex sein, sondern ist notwendig reell. Ist aber λ reell, so sind die Verhältnisse der Unbekannten $A_1 A_2 A_3 \ldots A_N$, die aus (32) bestimmt werden sollen, resp.

der $u_1, u_2 \ldots u_N$, reell; sie selbst müssen also, wenn sie komplex sind, die Form haben:

$$u_\nu = \bar{a}_\nu \cdot e^{i s},$$

d. h. mit demselben komplexen Faktor $e^{i s}$ behaftet sein; denn nur dann können die Verhältnisse reell sein. Multiplizieren wir (35) mit u_ν und summieren über ν von 1 bis N, so folgt:

$$\lambda \sum u_\nu L_\nu(u) + \sum u_\nu \Phi_\nu(u) = 0$$

oder nach (36):

$$\lambda L(u) + \Phi(u) = 0,$$

also:

$$(40) \qquad \varrho^2 \equiv \lambda = -\frac{\Phi(u)}{L(u)} = -\frac{\sum a_{\nu\mu} u_\nu u_\mu}{\sum b_{\nu\mu} u_\nu u_\mu} = -\frac{\sum a_{\nu\mu} \bar{u}_\nu \bar{u}_\mu}{\sum b_{\nu\mu} \bar{u}_\nu \bar{u}_\mu} = -\frac{\Phi(\bar{u})}{L(\bar{u})}.$$

Nun sind aber L und Φ nach unseren Annahmen stets positive Größen für alle reellen Werte der Variabeln; also ist nach (40) ϱ^2 negativ reell, was zu beweisen war; mithin ϱ selbst rein imaginär, und das bedeutet nach dem Ansatz (31), daß die Größen ξ_ν rein periodische Funktionen der Zeit sind, daß also das System in ganz bestimmter Weise Schwingungen um die Gleichgewichtslage ausführt.

Im allgemeinen wird die Determinante (33) N verschiedene Werte für ϱ^2 liefern, die wir durch $\varrho_1^2, \varrho_2^2 \ldots$ bis ϱ_N^2 bezeichnen wollen; die Größen $\varrho_1, \varrho_2 \ldots \varrho_N$ selbst können nach dem eben bewiesenen Satze also dargestellt werden durch:

$$(41) \qquad \varrho_1 = n_1 i; \quad \varrho_2 = n_2 i; \ldots \varrho_N = n_N i.$$

Zu jedem Werte von ϱ^2, der gemäß Gleichung (33) bestimmt wird, erhalten wir einen Satz von Werten $A_1 A_2 \ldots A_N$, die die Gleichung (32) befriedigen, von denen aber nur die Verhältnisse bestimmt sind; eine von den Größen A_ν ist also noch frei, sagen wir etwa A_1. Nach dem obigen ist dies von der Form $A_1 = a_1 e^{i s}$, und alle Werte A_ν müssen denselben Faktor $e^{i s}$ haben. Wir erhalten also z. B. für den Wert ϱ_1 das folgende Lösungssystem von (32):

$$A_1 = \alpha_{11} e^{i s_1}; \quad A_2 = \alpha_{21} e^{i s_1}; \quad A_3 = \alpha_{31} e^{i s_1}; \ldots A_N = \alpha_{N1} e^{i s_1};$$

für ϱ_2 das Wertsystem:

$$A_1 = \alpha_{12} \cdot e^{i s_2}; \quad A_2 = \alpha_{22} e^{i s_2}; \quad A_3 = \alpha_{32} \cdot e^{i s_2}; \ldots A_N = \alpha_{N2} \cdot e^{i s_2};$$

für ϱ_N endlich:

$$A_1 = \alpha_{1N} \cdot e^{i s_N}; \quad A_2 = \alpha_{2N} \cdot e^{i s_N}; \quad A_3 = \alpha_{3N} \cdot e^{i s_N}; \ldots A_N = \alpha_{NN} \cdot e^{i s_N}.$$

Im ganzen sind in diesem System $2N$ noch unbestimmte Konstanten, nämlich N von den Größen $\alpha_{\nu\mu}$ und die N Größen $s_1 s_2 \ldots s_N$, also gerade doppelt so viel, als Freiheitsgrade vorhanden sind, und mithin gerade hinreichend, um durch den Anfangszustand bestimmt zu werden. Da die Gleichungen der Bewegung linear sind, so erhalten wir für eine, z. B.

die ν^{te} Koordinate die allgemeinste Lösung durch Addition der den einzelnen Werten von $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_N$ entsprechenden Partikularlösungen; also ist allgemein:

$$\xi_\nu = \alpha_{\nu 1} \cdot e^{i(n_1 t + \varepsilon_1)} + \alpha_{\nu 2} \cdot e^{i(n_2 t + \varepsilon_2)} + \ldots \alpha_{\nu N} \cdot e^{i(n_N t + \varepsilon_N)},$$

oder, wenn wir uns auf den reellen Teil beschränken:

$$\xi_\nu = \alpha_{\nu 1} \cdot \cos(n_1 t + \varepsilon_1) + \alpha_{\nu 2} \cdot \cos(n_2 t + \varepsilon_2) + \ldots \alpha_{\nu N} \cdot \cos(n_N t + \varepsilon_N). \tag{42}$$

Insgesamt erhalten wir also folgendes Lösungssystem für unser schwingendes Gebilde:

$$\text{(43)} \left\{ \begin{array}{l} \xi_1 = \alpha_{11} \cos(n_1 t + \varepsilon_1) + \alpha_{12} \cos(n_2 t + \varepsilon_2) + \ldots \alpha_{1N} \cos(n_N t + \varepsilon_N), \\ \xi_2 = \alpha_{21} \cos(n_1 t + \varepsilon_1) + \alpha_{22} \cos(n_2 t + \varepsilon_2) + \ldots \alpha_{2N} \cos(n_N t + \varepsilon_N), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \xi_N = \alpha_{N1} \cos(n_1 t + \varepsilon_1) + \alpha_{N2} \cos(n_2 t + \varepsilon_2) + \ldots \alpha_{NN} \cos(n_N t + \varepsilon_N). \end{array} \right.$$

Wir haben also das Resultat: jede Koordinate des Systems ist dargestellt als die Summe von N harmonischen Schwingungen, mit den Frequenzen $n_1, n_2 \ldots n_N$.

Die einzelnen Summanden, also die Ausdrücke $\cos(n_\nu t + \varepsilon_\nu)$ nennt man die „Eigenschwingungen“ oder „Normalschwingungen“ des Systems. Wir können also auch sagen: Ein System von N Freiheitsgraden besitzt im allgemeinen N Eigenschwingungen, und die Bewegung jeder Koordinate läßt sich durch Superposition dieser N Eigenschwingungen darstellen.

Wir wollen die Eigenschwingungen der Kürze halber durch $p_1, p_2 \ldots p_N$ bezeichnen. Dann kann man die Gleichungen (43) schreiben:

$$\text{(43a)} \left\{ \begin{array}{l} \xi_1 = \alpha_{11} p_1 + \alpha_{12} p_2 + \alpha_{13} p_3 + \ldots \alpha_{1N} p_N, \\ \xi_2 = \alpha_{21} p_1 + \alpha_{22} p_2 + \alpha_{23} p_3 + \ldots \alpha_{2N} p_N, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \xi_N = \alpha_{N1} p_1 + \alpha_{N2} p_2 + \alpha_{N3} p_3 + \ldots \alpha_{NN} p_N. \end{array} \right.$$

Darin ist die Determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1N} \\ \vdots & & \\ \alpha_{N1} & \ldots & \alpha_{NN} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden, da nach Voraussetzung die N Größen $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_N$ voneinander unabhängige Koordinaten sein sollen, was nicht möglich wäre, wenn die Determinante verschwände. Daher läßt sich umgekehrt aus (43a) jede Normalschwingung p_ν als lineare Funktion der ξ_ν darstellen. Bedeuten $\beta_{\nu\mu}$ leicht ausrechenbare Konstanten, so kann man folglich schreiben:

$$(44)\quad \begin{cases} p_1 = \beta_{11}\,\xi_1 + \beta_{12}\,\xi_2 + \beta_{13}\,\xi_3 + \cdots \beta_{1N}\,\xi_N, \\ p_2 = \beta_{21}\,\xi_1 + \beta_{22}\,\xi_2 + \beta_{23}\,\xi_3 + \cdots \beta_{2N}\,\xi_N, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_N = \beta_{N1}\,\xi_1 + \beta_{N2}\,\xi_2 + \beta_{N3}\,\xi_3 + \cdots \beta_{NN}\,\xi_N. \end{cases}$$

Ebensogut nun, wie wir unser Massensystem durch die Koordinaten $\xi_1\,\xi_2 \ldots \xi_N$ charakterisierten, können wir es natürlich auch durch lineare Funktionen der ξ_ν tun; wir können also die Größen $p_1\,p_2 \ldots p_N$, resp. ihnen proportionale Größen auch als allgemeine Koordinaten unseres Massensystems benutzen. In diesen Koordinaten nehmen die kinetische und potentielle Energie eine besonders einfache Gestalt an, denn gemäß der Bedeutung von

$$p_\nu \sim \cos(n_\nu t + \varepsilon_\nu)$$

gehorcht p_ν der Differentialgleichung der trigonometrischen Funktionen:

$$\frac{d^2 p_\nu}{d t^2} + n_\nu^2 p_\nu = 0,$$

oder auch:

$$(45)\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{d p_\nu}{d t}\right) + n_\nu^2 p_\nu = 0,$$

die also die Bewegungsgleichung ist.

Denken wir uns nun L und Φ als Funktion der Größen $\frac{dp_\nu}{dt} = \dot p_\nu$ resp. p_ν ausgedrückt:

$$(46)\qquad \begin{cases} L = L(\dot p_1\,\dot p_2\,\dot p_3 \cdots \dot p_N), \\ \Phi = \Phi(p_1\,p_2\,p_3 \cdots p_N), \end{cases}$$

so lauten die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen

$$(47)\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot p_\nu}\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial p_\nu} = 0.$$

Darin gibt das erste Glied die d'Alembertschen Trägheitskräfte, während $\frac{\partial \Phi}{\partial p_\nu}$ die expliziten Kräfte liefert. Ein Vergleich von (45) und (47) legt daher die in der nächsten Nummer streng zu beweisende Vermutung nahe, daß ist:

$$(48)\qquad \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot p_\nu} = \frac{d p_\nu}{d t} = \dot p_\nu, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial p_\nu} = n_\nu^2 p_\nu. \end{cases}$$

Nehmen wir dies vorläufig als richtig an, so können wir folgendermaßen weiterschließen: Da

$$d L = \sum_\nu^{1,N} \frac{\partial L}{\partial \dot p_\nu}\, d \dot p_\nu,$$

$$d \Phi = \sum_\nu^{1,N} \frac{\partial \Phi}{\partial p_\nu}\, d p_\nu,$$

so ist unter Beachtung von (48):

$$dL = \sum_{\nu} \dot{p}_{\nu}\, d\dot{p}_{\nu} = d\left[\tfrac{1}{2}\sum_{\nu}^{1,N} \dot{p}_{\nu}^{2}\right],$$

$$d\Phi = \sum_{\nu} n_{\nu}^{2} p_{\nu} = d\left[\tfrac{1}{2}\sum_{\nu}^{1,N} n_{\nu}^{2} p_{\nu}^{2}\right].$$

also würde unter Fortlassung belangloser Konstanten für L und Φ die Darstellung folgen:

(49)
$$\begin{cases} 2L = \sum_{\nu} \dot{p}_{\nu}^{2}, \\ 2\Phi = \sum_{\nu} n_{\nu}^{2} p_{\nu}^{2}, \end{cases}$$

oder ausführlich geschrieben:

(50)
$$\begin{cases} 2L = \dot{p}_1^{2} + \dot{p}_2^{2} + \dot{p}_3^{2} + \ldots \dot{p}_N^{2}, \\ 2\Phi = n_1^{2} p_1^{2} + n_2^{2} p_2^{2} + n_3^{2} p_3^{2} + \ldots n_N^{2} p_N^{2}, \end{cases}$$

d. h. in den neuen Koordinaten p_{ν} stellen sich sowohl L als auch Φ als Summen von Quadraten dar; die doppelten Produkte, die im allgemeinen auch auftreten, sind hier fortgefallen.

Wir vermuten also den in der Tat richtigen Satz: es existieren stets lineare Funktionen der Koordinaten eines Systems, das um seine stabile Gleichgewichtslage kleine Schwingungen ausführt, die, selbst als Koordinaten genommen, L und Φ gleichzeitig in Summen von Quadraten transformieren.

Diese neuen Koordinaten sind offenbar für allgemeine theoretische Untersuchungen am vorteilhaftesten, da sie der so einfachen Differentialgleichung der trigonometrischen Funktionen gehorchen; man nennt sie deshalb auch „Hauptkoordinaten" oder „Normalkoordinaten".

Sind L und Φ in Normalkoordinaten p_{ν} gegeben:

(51)
$$\begin{cases} 2L = \sum \dot{p}_{\nu}^{2}, \\ 2\Phi = \sum c_{\nu} p_{\nu}^{2}, \end{cases}$$

wo die c_{ν} positive Konstanten sind, so ergeben diese Konstanten sofort die Eigenfrequenzen des Systems; durch Vergleich von (51) und (49) folgt ja sofort für die ν^{te} Eigenfrequenz:

(52)
$$n_{\nu} = \sqrt{c_{\nu}},$$

d. h. die Koeffizienten der in Normalkoordinaten ausgedrückten doppelten potentiellen Energie sind direkt die Quadrate der Eigenfrequenzen.

In der ganzen obigen Betrachtung ist vorausgesetzt, daß alle Wurzeln der Determinantengleichung (33) ungleich sind, daß also N verschiedene Eigenschwingungen existieren. Ist dies nicht der Fall, liegen also mehrfache Wurzeln vor, so werden die Verhältnisse in mancher Hinsicht

andere; doch existiert auch dann immer ein Satz von Normalkoordinaten, der L und Φ in die einfache Gestalt von (51) zu bringen gestattet.

Wegen der Details der Untersuchung bei mehrfachen Wurzeln sei etwa auf Helmholtz, Vorlesungen über die mathematischen Prinzipien der Akustik verwiesen.

58. Sätze über Transformation von quadratischen Formen.[1]

Die in der vorigen Nummer vermutungsweise ausgesprochenen Sätze verlangen einen strengen Beweis; zu diesem Zwecke bedürfen wir einiger einfachen Sätze über Transformation quadratischer Formen, die wir hier zusammenstellen und beweisen wollen. Wir definieren:

Unter einer quadratischen Form von N Variabeln $F(x_1\, x_2 \ldots x_N)$ verstehen wir den Ausdruck:

$$F(x_1\, x_2 \ldots x_N) = \sum_{i,k} a_{ik}\, x_i\, x_k, \tag{53}$$

wobei $a_{ik} = a_{ki}$ ist. Unter der „Diskriminante" D derselben verstehen wir die aus den Koeffizienten der quadratischen Form gebildete Determinante:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{N1} & a_{N2} & \ldots & a_{NN} \end{vmatrix} \tag{54}$$

ist D gleich 0, so heißt die quadratische Form „singulär", ist D dagegen von 0 verschieden, so heißt sie „nichtsingulär".

Die quadratische Form (53) wird einer homogenen linearen Substitution:

$$\left\{\begin{aligned} x_1' &= \alpha_{11}\, x_1 + \alpha_{12}\, x_2 + \ldots \alpha_{1N}\, x_N \\ x_2' &= \alpha_{21}\, x_1 + \alpha_{22}\, x_2 + \ldots \alpha_{2N}\, x_N \\ &\vdots \\ x_N' &= \alpha_{N1}\, x_1 + \alpha_{N2}\, x_2 + \ldots \alpha_{NN}\, x_N \end{aligned}\right. \tag{55}$$

unterworfen, die ebenfalls als singulär oder nichtsingulär bezeichnet wird, je nachdem die Determinante Δ des Systems

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1N} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2N} \\ \vdots & & & \vdots \\ \alpha_{N1} & \alpha_{N2} & \ldots & \alpha_{NN} \end{vmatrix} \tag{56}$$

gleich Null ist oder nicht.

1) Der Anfänger kann diese Nummer beim ersten Studium überschlagen.

Wir beweisen nun zunächst den Satz

I. Ist in der quadratischen Form (53) $a_{11} \neq 0$, so läßt sie sich durch eine nichtsinguläre Substitution stets in die Form bringen:

$$F \equiv \frac{1}{a_{11}} x_1'^2 + \Phi'(x_2' x_3' \ldots x_N'), \tag{57}$$

wobei $x_1', x_2' \ldots x_N'$ die neuen Variabeln bedeuten und die „Zusatzform" Φ' die Variable x_1' nicht mehr enthält.

Der Beweis läßt sich folgendermaßen erbringen (Lagrange): Wir schreiben $F(x_1, x_2 \ldots x_n)$ nach (53) folgendermaßen:

$$\left\{\begin{array}{l|llll} F \equiv a_{11} x_1^2 & + a_{12} x_1 x_2 & + a_{13} x_1 x_3 & + \ldots & a_{1N} x_1 x_N \\ + a_{21} x_2 x_1 & + a_{22} x_2^2 & + a_{23} x_2 x_3 & + \ldots & a_{2N} x_2 x_N \\ + a_{31} x_3 x_1 & + \ldots & + \ldots & + \ldots & \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \\ + a_{N1} x_N x_1 & + a_{N2} x_N x_2 + \ldots & & + \ldots & a_{NN} x_N^2 \end{array}\right. \tag{53a}$$

Die außerhalb des $\ulcorner$-Striches befindlichen Glieder sind sämtliche, die x_1 enthalten; die innerhalb des Striches befindlichen sind frei von x_1. Die ersteren Glieder können geschrieben werden:

$$\frac{1}{a_{11}} \left\{a_{11}^2 x_1^2 + 2a_{11} a_{12} x_1 x_2 + 2a_{11} a_{13} x_1 x_3 + \ldots 2a_{11} a_{1N} x_1 x_N\right\}, \tag{58}$$

da ja $a_{ik} = a_{ki}$ ist; und die Form dieses Ausdruckes legt es nahe, die quadratische Ergänzung zu addieren, um den Klammerausdruck auf ein vollständiges Quadrat zu bringen, und dann dieselbe wieder zu subtrahieren. Die quadratische Ergänzung lautet offenbar:

$$\begin{array}{l} a_{12}^2 x_2^2 + a_{13}^2 x_3^2 + \ldots a_{1N} x_N^2 \\ \quad + 2a_{12} a_{13} x_2 x_3 + 2a_{12} a_{14} x_2 x_4 + \ldots 2a_{12} a_{1N} x_2 x_N \\ \qquad\qquad + 2a_{13} a_{14} x_3 x_4 + \ldots 2a_{13} a_{1N} x_3 x_N \\ \qquad\qquad + \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ , \ . \\ \qquad\qquad + 2a_{1,N-1} \cdot a_{1,N} \cdot x_{N-1} \cdot x_N, \end{array}$$

so daß wir den Ausdruck (58) schreiben können:

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{a_{11}} \left\{a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots - a_{1N} x_N\right\}^2 - a_{12}^2 x_2^2 - a_{13}^2 x_3^2 \ldots \\ \qquad - a_{1N}^2 x_N^2 - 2a_{12} a_{13} x_2 x_3 - \ldots - 2a_{1,N-1} a_{1,N} x_{N-1} x_N, \end{array}\right. \tag{59}$$

wobei zu bemerken ist, daß die quadratische Ergänzung x_1 nicht enthält. Man kann also F schreiben, indem man in der geschilderten Weise die x_1 enthaltenden Glieder zusammenfaßt:

$$F \equiv \frac{1}{a_{11}} \left\{a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots a_{1N} x_N\right\}^2 + \Phi'(x_2, x_3 \ldots x_N), \tag{60}$$

wobei in Φ' natürlich nicht nur die in (53a) innerhalb des $\ulcorner$-Striches enthaltenen Glieder, sondern auch die negative ebenfalls von [illegible]ie

quadratische Ergänzung zusammengefaßt sind. Benutzen wir jetzt die Substitution:

$$(61)\quad \begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1N}x_N \\ x_2' = \qquad\qquad x_2 \\ x_3' = \qquad\qquad\quad x_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_N' = \qquad\qquad\qquad\quad x_N, \end{cases}$$

so geht in der Tat F nach (61) über in die behauptete Form (57):

$$F \equiv \frac{1}{a_{11}} x_1'^2 + \Phi'(x_2' x_3' \dots x_N').$$

Die Determinante Δ der Substitution (61) ist offenbar:

$$(62)\quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 \dots \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots 1 \end{vmatrix} = a_{11},$$

also nach Voraussetzung von Null verschieden, mithin ist die Substitution (61) nichtsingulär, wie behauptet wurde; ferner ist die Substitution auch reell, wenn die a_{ik} reell sind.

Durch diese Transformation ist nun erreicht, daß von F ein Quadrat abgespalten ist, so daß die quadratische Zusatzform Φ' höchstens noch $(N-1)$ Quadrate (neben den doppelten Produkten) enthält.

Wir beweisen ferner den Satz:

II. Jede quadratische Form (singulär oder nichtsingulär) kann durch eine nichtsinguläre Substitution auf die Form gebracht werden:

$$(63)\quad F \equiv c_1 x_1'^2 + c_2 x_2'^2 + \dots c_N' x_N'^2;$$

sind die a_{ik} der quadratischen Form (53) reell, so sind auch die Koeffizienten der die Transformation bewirkenden Substitution reell, ebenso wie die $c_1, c_2 \dots c_N$, von denen übrigens einige Null sein können.

Um diesen Satz zu beweisen, wenden wir zunächst auf die vorgelegte quadratische Form F nach Gleichung (53) die Substitution (61) an, wodurch wir erhalten:

$$(64)\quad F - \frac{1}{a_{11}} x_1'^2 = \Phi'(x_2', x_3', \dots x_N').$$

Wir können jetzt denselben Prozeß auf die quadratische Zusatzform

$$\Phi'(x_2' x_3' \dots x_N')$$

anwenden; dabei wollen wir aber, um nicht zu allzu komplizierten Bezeichnungen greifen zu müssen, die Buchstaben $x_2' \dots x_N'$ einfach

wieder durch $x_2 \ldots x_N$ bezeichnen. Nach Satz I erreichen wir dann, daß Φ' in die Form gebracht werden kann:

$$\Phi'(x_2\, x_3 \ldots x_N) = c_2\, x_2'^2 + \Phi''(x_3'\, x_4' \ldots x_N');$$

dann können wir ebenso mit Φ'' verfahren, also Φ'', wenn wieder $x_3' \ldots x_N'$ durch $x_3 \ldots x_N$ ersetzt werden, in die Gestalt bringen:

$$\Phi''(x_3\, x_4 \ldots x_N) = c_3\, x_3'^2 + \Phi'''(x_4' \ldots x_N'),$$

usw., bis alle quadratischen Glieder erschöpft sind.

Bei jedem einzelnen Schritte ist nach dem Satze I die angewendete Substitution nichtsingulär und reell, wenn die Koeffizienten der jeweiligen Zusatzform reell sind. Das gleiche gilt, wie man sich durch direkte Ausrechnung überzeugen kann, für die Transformation, die direkt — ohne Zwischentransformation — die ursprüngliche Form F von ihren Quadraten befreit.

Wenn nun alle quadratischen Glieder erschöpft sind, so sind zwei Fälle möglich:

Entweder sind gleichzeitig die doppelten Produkte verschwunden: dann sind wir fertig und der Satz II ist bewiesen, da dann $F(x_1 \ldots x_N)$ in die Form (63) gebracht ist, und zwar mit Hilfe einer nichtsingulären Substitution; oder aber es sind noch doppelte Produkte vorhanden, die dann noch weiter behandelt werden müssen. Der Allgemeinheit halber nehmen wir dies letztere an und haben also zu zeigen, daß eine quadratische Form, in der nur doppelte Produkte vorkommen:

$$(65)\quad \begin{cases} F \equiv 2a_{12}\, x_1 x_2 + 2a_{13}\, x_1 x_3 + \ldots 2a_{1N}\, x_1 x_N \\ \qquad + 2a_{23}\, x_2 x_3 + \ldots 2a_{2N}\, x_2 x_N \\ \qquad\qquad + \ldots 2a_{N-1,N}\, x_{N-1} x_N \end{cases}$$

ebenfalls in die Form (63) gebracht werden kann.

Ist etwa $a_{12} \neq 0$, so kann (65) geschrieben werden, indem wir die x_1 und x_2 enthaltenden Glieder zusammenfassen, d. h. die in den beiden ersten Horizontalreihen in (65) enthaltenen Glieder:

$$(66)\quad \begin{cases} F \equiv 2x_1(a_{12}\, x_2 + a_{13}\, x_3 + \ldots a_{1N}\, x_N) + 2x_2(a_{23}\, x_3 + \ldots a_{2N}\, x_N) \\ \qquad + \Phi_0(x_3, x_4 \ldots x_N), \end{cases}$$

wobei also die Zusatzform Φ_0 nur noch die Variabeln $x_3 \ldots x_N$ enthält. Weiter kann man schreiben:

$$(67)\quad \begin{cases} F \equiv \frac{2}{a_{12}}(a_{12}\, x_2 + a_{13}\, x_3 + \ldots a_{1N}\, x_N)(a_{21}\, x_1 + a_{23}\, x_3 + \ldots a_{2N}\, x_N) \\ \qquad + \Phi'(x_3 \ldots x_N). \end{cases}$$

In den beiden Faktoren des in (67) stehenden Produktes sind sämtliche Glieder mit x_1 und x_2 enthalten; außerdem natürlich noch zahlreiche Glieder mit x_3 und x_4, darunter auch Quadrate, die also mit un

gekehrten Vorzeichen in die Zusatzform Φ' hineingesteckt sind, damit F sich nicht ändert; Φ' enthält also jetzt auch wieder Quadrate. Jetzt machen wir folgende nichtsinguläre Substitution:

$$(68)\qquad \begin{cases} x_1' = a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3 + \cdots a_{1N}\,x_N \\ x_2' = a_{21}\,x_1 + a_{23}\,x_3 + \cdots a_{2N}\,x_N \\ x_3' = \qquad\qquad x_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_N' = \qquad\qquad\qquad x_N\,, \end{cases}$$

deren Determinante $-a_{12}^2$ ist, wodurch die Nichtsingularität bewiesen wird. Mit dieser Substitution wird (67):

$$(69)\qquad F \equiv \frac{2}{a_{12}}\,x_1'\,x_2' + \Phi'(x_3' \ldots x_N').$$

Wenden wir darauf nochmals eine nichtsinguläre Transformation an:

$$(70)\qquad \begin{cases} x_1'' = x_1' + x_2' \\ x_2'' = x_1' - x_2' \\ x_3'' = x_3' = x_3 \\ \cdots\cdots \\ x_N'' = x_N' = x_N\,, \end{cases}$$

deren Determinante $= -1 \neq 0$ ist, so folgt schließlich:

$$(71)\qquad F \equiv \frac{1}{2a_{12}}\,x_1''^2 - \frac{1}{2a_{12}}\,x_2''^2 + \Phi'(x_3'', x_4'' \ldots x_N''),$$

so daß man nun gleich zwei Quadrate abgesondert hat. Aus Φ' sondert man nach der vorher besprochenen Methode wieder alle Quadrate ab, dann die etwa noch übrig gebliebenen Produkte auf die zuletzt beschriebene Weise, bis man fertig ist. Dann hat man in der Tat F in die Form (68) gebracht. Man macht sich leicht klar, daß nie mehr als N Glieder auftreten können, wohl aber unter Umständen weniger; wovon dies abhängt, werden wir später untersuchen müssen. — Es schließt sich unmittelbar an der Satz:

III. Jede quadratische Form läßt sich durch eine nichtsinguläre Transformation auf die Form bringen:

$$(72)\qquad F \equiv x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + \ldots x_r'^2 \;(r \gtreqless N).$$

Denn da soeben bewiesen ist, daß man jede quadratische Form in die Gestalt (68) bringen kann, so hat man nur zu setzen:

$$(73)\qquad x_1' = \sqrt{c_1}\,x_1\,; \quad x_2' = \sqrt{c_2}\,x_2\,; \quad \ldots x_r' = \sqrt{c_r}\,x_r\,,$$

wobei $r \leqq N$ ist. Denn dann hat man sofort die Gleichung (72). Es ist dabei aber zu beachten, daß die Transformation (73) nicht reell zu sein braucht, da ja im allgemeinen einige der Koeffizienten c_i in (68) negativ sein können. Durch eine reelle nichtsinguläre Transformation

läßt sich also das Resultat (72) im allgemeinen nicht erzielen. Dagegen gilt für reelle Transformationen der folgende Satz.

IIIa. Sind in der quadratischen Form F die Koeffizienten a_{ik} reell, so kann man sie durch eine reelle nichtsinguläre Transformation auf die Form bringen:

(74) $$F \equiv \pm x_1'^2 \pm x_2'^2 \pm x_3'^2 \pm \cdots \pm x_r'^2 (r \leqq N).$$

Denn wenn die a_{ik} reell sind, so sind auch die c_λ in (63) reell, aber im allgemeinen nicht alle positiv. Wendet man nun die reelle Transformation an:

$$x_1' = |\sqrt{c_1}|\, x_1; \quad x_2' = |\sqrt{c_2}|\, x_2; \quad \ldots\, x_r' = |\sqrt{c_r}| \cdot x_r.$$

so erhält man sofort die Gleichung (74).

Über die Größe der Zahl der Quadrate r, die in (73) und (74) vorkommen, d. h. darüber, ob r gleich oder kleiner als N ist, gibt Auskunft der Satz

IV. r ist stets dann und nur dann kleiner als N, wenn die quadratische Form F singulär ist; eine singuläre Form kann daher durch eine geeignete nichtsinguläre Transformation, die im Falle reeller a_{ik} auch reell ist, von einer Variabeln befreit werden.

Der Beweis beruht auf einem bekannten Determinantensatz. Transformiert man eine vorgelegte quadratische Form F mit der Diskriminante D durch eine nichtsinguläre Substitution mit (also nicht verschwindender) Determinante Δ in F', das die Diskriminante D' haben möge, so ist die neue Diskriminante D' gleich:

(75) $$D' = \Delta^2 \cdot D.$$

Es ist also D' dann gleich Null oder nicht gleich Null, wenn D gleich Null oder nicht gleich Null ist; d. h. F' dann singulär oder nichtsingulär, wenn F singulär oder nichtsingulär ist. Ist nun $r < N$, so ist die Determinante D' von (72) bzw. (74):

$$D' = \begin{vmatrix} \pm 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

da dann ja nur r Diagonalglieder von Null verschieden sind und $(N-r)$ Nullen vorkommen, also F' singulär; dagegen ist im Falle $r = N$:

$$D' = \begin{vmatrix} \pm 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \pm 1 \end{vmatrix} = \pm 1 \neq 0,$$

also F' nichtsingulär, d. h. also wegen (75): nur wenn F singulär ist, ist r kleiner als N, was zu beweisen war.

Eine Anzahl weiterer Sätze bezieht sich auf positive quadratische Formen, worunter wir folgendes verstehen wollen:

Eine reelle quadratische Form heißt positiv, wenn sie für kein reelles Wertsystem der Variabeln einen negativen Wert hat und den Wert Null nur für das einzige Wertsystem $x_1 = x_2 = \dots x_N = 0$ annimmt.

Für eine positive quadratische Form gilt der Satz:

V. Jede positive quadratische Form kann stets durch eine reelle nichtsinguläre Substitution auf die Form gebracht werden:

$$F = x_1'^2 + x_2'^2 + \dots x_N'^2 \tag{76}$$

und ist daher nach Satz IV stets nichtsingulär.

Um diesen Satz zu beweisen, braucht nur gezeigt zu werden, daß erstens kein negatives Vorzeichen auf der rechten Seite von (76) auftreten kann, und zweitens daß die Zahl der Quadrate genau gleich N, nie kleiner als N ist. Denn alles übrige ist schon durch die vorhergehenden Sätze, speziell III und IIIa bewiesen. Nehmen wir nun zunächst an, es käme in (76) ein negatives Vorzeichen vor, etwa $- x_1'^2$, so könnte — im Widerspruch zur Voraussetzung — die Form F nicht positiv sein. Denn dann wäre sie für das reelle Wertsystem

$$x_1' = 1, \quad x_2' = x_3' = \dots x_N' = 0,$$

also auch für ein reelles Wertsystem der x_1 bis x_N, negativ, nämlich gleich -1. Dieser Fall ist also ausgeschlossen. Wäre anderseits die Zahl der Quadrate r kleiner als N, so wäre die Form F gleich Null für folgendes von Null verschiedenes Wertsystem der x_1' bis x_N':

$$x_1' = x_2' = \dots x_{N-1}' = 0, \quad x_N' = 1,$$

und da die Transformation nach Voraussetzung nicht singulär ist, entspricht dieser Wahl der x_1' bis x_N' ein von Null verschiedenes System der x_1 bis x_N, für die also F gleich Null wäre. Eine positive quadratische Form verschwindet aber nur für das System der Werte $x_1 = x_2 = \dots x_N = 0$.

Also ist auch die zweite Möglichkeit ausgeschlossen und Satz V bewiesen. Satz V läßt sich umkehren in der folgenden Form:

Va. Kann eine quadratische Form von N Variabeln durch eine reelle, nicht singuläre Substitution in die Gestalt

$$F \equiv x_1'^2 + x_2'^2 + \dots x_N'^2 \tag{76}$$

gebracht werden, so ist sie positiv.

Denn sie verschwindet offenbar nur für $x_1' = \dots$ und wegen der Nichtsingularität der Transformation hat das zur Folge,

daß diesem Wertsystem der x' nur das Wertsystem $x_1 = x_2 = \ldots = x_N = 0$ entspricht, womit der Satz bewiesen ist.

Endlich sagt der folgende Satz noch eine Eigenschaft der positiven quadratischen Formen aus:

VI. In einer positiven quadratischen Form $F = \sum a_{ik} x_i x_k$ kann kein Koeffizient eines quadratischen Gliedes verschwinden oder negativ sein.

Denn wäre z. B. $a_{11} \leqq 0$, so wäre die Form sicher für das Wertsystem

$$x_1 = 1\,, \quad x_2 = x_3 = \ldots = x_N = 0$$

Null oder negativ, was dem Begriff der positiven quadratischen Form widerspricht.

Diese Sätze haben eine direkte Beziehung zu unserem Problem, da L und Φ in der Umgebung einer stabilen Gleichgewichtslage positive quadratische Formen sind.

Wir betrachten nun zwei quadratische Formen von N Variabeln $x_1\ x_2\ \ldots\ x_N$:

$$(77)\qquad \begin{cases} F_1 \equiv \sum b_{ik} x_i x_k, & \text{mit der Diskriminante } B\,, \\ F_2 \equiv \sum a_{ik} x_i x_k, & \text{,, \quad ,, \quad ,, \quad } A\,, \end{cases}$$

die wir mit dem variablen Faktor λ zu einer Form zusammenfassen:

$$(78)\qquad F_1 - \lambda F_2\,,$$

deren Diskriminante $D(\lambda)$ heißen möge; dieselbe hat folglich den Wert:

$$(79)\qquad D(\lambda) = \begin{vmatrix} b_{11} - \lambda a_{11}, & b_{12} - \lambda a_{12}, & \ldots & b_{1N} - \lambda a_{1N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{N1} - \lambda a_{N1}, & b_{N2} - \lambda a_{N2}, & \ldots & b_{NN} - \lambda a_{NN} \end{vmatrix}$$

oder, entwickelt nach Potenzen von λ:

$$(80)\qquad D(\lambda) = d_0 - d_1 \lambda + d_2 \lambda^2 - \ldots + (-1)^N d_N \lambda^N.$$

Wir bemerken, daß dies dieselbe Determinante ist, auf die wir in Gleichung (33) bei unserem Problem der kleinen Schwingungen gestoßen sind; nur ist hier ϱ^2 durch $-\lambda$ ersetzt.

Die Gleichung $D(\lambda) = 0$ nennen wir die λ-Gleichung für das Formenpaar F_1 und F_2. Zunächst gilt folgender Satz über den Grad der λ-Gleichung:

VII. Die λ-Gleichung für das Paar F_1 und F_2 ist stets dann und nur dann genau vom Nten Grade, wenn F_2 nicht singulär ist.

Denn man erkennt leicht aus (78), daß man das Glied mit der Nten Potenz, also $(-1)^N d_N \lambda^N$, erhält, wenn man alle $b_{ik} = 0$ setzt. Dann bleibt übrig:

$$\begin{vmatrix} -\lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \ldots & -\lambda a_{1N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\lambda a_{N1} & -\lambda a_{N2} & \ldots & -\lambda a_{NN} \end{vmatrix} = (-1)^N \lambda^N \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{N1} & a_{N2} & \ldots & a_{NN} \end{vmatrix},$$

d. h. der Faktor der Nten Potenz von λ ist im wesentlichen die Diskriminante A von F_2; die Nte Potenz ist also nur vorhanden, wenn A von Null verschieden, also F_2 nicht singulär ist, wie behauptet war.

VIII. Ist F_1 reell (singulär oder nichtsingulär) und F_2 positiv, so hat die λ-Gleichung für F_1 und F_2 nur reelle Wurzeln.

Dieser Satz ist bereits in der vorigen Nummer bewiesen, so daß wir hier nicht näher darauf einzugehen brauchen.

Nach diesen Vorbereitungen endlich läßt sich der bisher nur vermutete Satz streng beweisen:

IX. Ist F_1 reell (singulär oder nichtsingulär) und F_2 positiv, so läßt sich durch eine reelle nichtsinguläre Substitution bewirken, daß gleichzeitig F_1 und F_2 in die Gestalt gebracht werden:

$$(81)\qquad \begin{cases} F_1 \equiv \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \ldots \lambda_N x_N'^2, \\ F_2 \equiv \quad x_1'^2 + \quad x_2'^2 + \ldots \quad x_N'^2, \end{cases}$$

wo die $\lambda_1 \ldots \lambda_N$ die nach Satz VIII reellen Wurzeln der λ-Gleichung von F_1 und F_2 sind.

Zunächst sieht man sofort nach Satz VII, da F_2 positiv sein soll, daß die λ-Gleichung in der Tat vom Nten Grade ist, also N Wurzeln hat, die allerdings nicht alle voneinander verschieden zu sein brauchen. Es sei nun λ_1 eine Wurzel von $D(\lambda) = 0$. Dann bilden wir:

$$(82)\qquad F_1 - \lambda F_2 \equiv (F_1 - \lambda_1 F_2) + (\lambda_1 - \lambda) F_2 .$$

Nun ist die quadratische Form: $F_1 - \lambda_1 F_2$ singulär; denn sie hat die Diskriminante $D(\lambda_1) \equiv 0$, da ja λ_1 eine Wurzel von $D(\lambda) = 0$ ist. Daher kann $F_1 - \lambda_1 F_2$ nach Satz IV von einer Variabeln befreit werden. Es gibt also, da λ_1 reell ist, reelle nichtsinguläre Substitutionen, die

$$(83)\qquad F_1 - \lambda_1 F_2 \equiv F_1'(x_2' x_3' \ldots x_N')$$

machen. Durch dieselbe Substitution geht F_2 in Gleichung (82) in F_2' über, und da F_2 positiv ist, gilt das gleiche von F_2'. Wir haben daher aus (82) und (83):

$$(84)\qquad F_1 - \lambda F_2 \equiv F_1'(x_2' \ldots x_N') + (\lambda_1 - \lambda) F_2'(x_1' x_2' \ldots x_N').$$

Nun ist aber, da F_2' positiv ist, nach Satz VI jeder Koeffizient eines quadratischen Gliedes größer als Null; setzen wir also $F_2' = \sum g_{ik} x_i' x_k'$, so ist z. B. g_{11} positiv. Also ergibt sich durch die reelle nichtsinguläre Substitution:

$$(85)\quad \begin{cases} x_1'' = +\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}(g_{11}x_1' + g_{12}x_2' + \dots g_{1N}x_N'), \\ x_2'' = x_2', \quad x_3'' = x_3', \quad \dots, \\ x_N'' = x_N', \end{cases}$$

indem man auf F_2' das Verfahren von Lagrange (Satz I) anwendet:

$$(86)\qquad F_2' = x_1''^2 + \Phi(x_2''\, x_3'' \dots x_N'').$$

Gleichung (84) geht dann, da F_1' weiter nicht durch diese Substitution alteriert wird, da es ja x_1' nicht enthält, über in:

$$(87)\quad F_1 - \lambda F_2 \equiv F_1'(x_2'' \dots x_N'') + (\lambda_1 - \lambda)[x_1''^2 + \Phi(x_2'', \dots x_N'')].$$

Was wir hier durch zwei Substitutionen (x_N in x_N', x_N' in x_N'') gemacht haben, kann auch durch eine direkte Substitution (x_N direkt in x_N'') geschehen; auch diese ist reell und nicht singulär. Nun kann wegen der Variabilität von λ (87) nur bestehen, wenn die Faktoren aller Potenzen von λ gleich sind, also folgt:

$$F_1 \equiv F_1'(x_2'', \dots x_N'') + \lambda_1 x_1''^2 + \lambda_1 \Phi(x_2'' \dots x_N''),$$
$$F_2 \equiv x_1''^2 + \Phi(x_2'' \dots x_N''),$$

oder in einer anderen Bezeichnungsweise, indem $F_1' + \lambda_1 \Phi \equiv \Phi_1$, $\Phi \equiv \Phi_2$ gesetzt werden:

$$(88)\qquad \begin{cases} F_1 \equiv \lambda_1 x_1''^2 + \Phi_1(x_2'' \dots x_N''), \\ F_2 \equiv x_1''^2 + \Phi_2(x_2'' \dots x_N''). \end{cases}$$

Der erste Schritt ist also getan, und damit man in derselben Weise weiteroperieren kann, ist nur zu zeigen: 1) daß Φ_1 (ebenso wie F_1) reell, Φ_2 (wie F) positiv ist: 2) die λ-Gleichung von Φ_1 und Φ_2 die Wurzeln $\lambda_2 \dots \lambda_N$ besitzt. Die Richtigkeit der Behauptung über Φ_1 ergibt sich sofort aus (88), denn da F_1 und λ_1 reell sind, so ist auch $F_1 - \lambda x_1''^2 \equiv \Phi_1$ reell. Daß ferner Φ_2 positiv ist, folgt aus der 2. Gleichung (88). Denn wäre Φ_2 nicht positiv, so gäbe es ein Wertsystem $x_2'' \dots x_N''$, wobei nicht alle x'' verschwinden, für das Φ_2 gleich Null oder negativ wäre. Nimmt man zu diesem Wertsystem noch $x_1'' = 0$ hinzu, so hätte man nach (88) ein Wertsystem $x_1'' \dots x_N''$, bei dem nicht alle x'' verschwinden, für das das positive F_2 verschwände, was unmöglich ist.

Um schließlich die letzte Behauptung zu beweisen, daß die λ-Gleichung der Formen Φ_1 und Φ_2 die Wurzeln λ_1 bis λ_N hat, haben wir die Diskriminante der Form $\Phi_1 - \lambda \Phi_2$ zu betrachten; dies ist eine quadratische Form von $(N-1)$ Variabeln $x_2'' \dots x_N''$. Durch Addition von $(\lambda_1 - \lambda) x_1''^2$ zu $\Phi_1 - \lambda \Phi_2$ bilden wir eine Form mit N Variabeln; die Diskriminante werde durch $D_N''(\lambda)$ bezeichnet, im Gegensatz zur Diskriminante $D_{N-1}''(\lambda)$ von $\Phi_1 - \lambda \Phi_2$. Nun unterscheidet sich $D_N''(\lambda)$ nur dadurch von $D_{N-1}''(x)$, daß links oben $(\lambda_1 - \lambda)$ hinzugefügt und im übrigen die erste Horizontal- und Vertikalreihe aus Nullen besteht; also:

$$D_n''(\lambda) = \left|\begin{array}{c|c} \lambda_1 - \lambda & 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \ldots \\ \hline 0 & \\ 0 & D_{n-1}''(\lambda) \\ 0 & \\ 0 & \end{array}\right|$$

Es ist also:

(89) $$D_N''(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda) D_{N-1}''(\lambda) .$$

Nun ist aber die Form $(\lambda_1 - \lambda) x_1''^2 + \Phi_1 - \lambda \Phi_2$ nichts anderes als $F_1 - \lambda F_2$, wie man aus (88) leicht erkennt, wenn man die zweite Gleichung mit λ multipliziert und von der ersten subtrahiert. Also kann sich die Diskriminante $D_n''(x)$ der Formen $(\lambda_1 - \lambda) x_1''^2 + \Phi_1 - \lambda \Phi_2$ von der Diskriminante $D_n(\lambda)$ von $F_1 - \lambda F_2$ nur um einen konstanten Faktor unterscheiden, also haben $D_n(\lambda) = 0$ und $D_n''(x) = 0$ dieselben Wurzeln, also hat nach (89) $D_n''(\lambda)$ die Wurzeln $\lambda_2, \ldots \lambda_n$, was bewiesen werden sollte.

Wir können also auf Φ_1 und Φ_2 genau dieselbe Operation anwenden wie auf F_1 und F_2, und dies Verfahren führt schließlich zur Gleichung (81); die direkte Substitution ist auch reell und nichtsingulär.

Jetzt identifizieren wir F_1 mit der doppelten potentiellen Energie $2\,\Phi$, F_2 mit der doppelten kinetischen Energie $2\,L$, und λ endlich mit $-\varrho^2 = +n^2$. Dann ist nach Satz IX in der Tat bewiesen, daß L und Φ, die sogar beide positiv sind, durch eine reelle nichtsinguläre Transformation in die Form gebracht werden können:

(90) $$\begin{cases} 2\,L = x_1'^2 + x_2'^2 + \ldots x_N'^2 , \\ 2\,\Phi = -\varrho_1^2 x_1'^2 - \varrho_2^2 x_2'^2 \ldots - \varrho_N^2 x_N'^2 , \end{cases}$$

oder, da $\varrho_\lambda = n_\lambda i$ ist:

(90a) $$2\Phi = n_1^2 x_1'^2 + n_2^2 x_2'^2 + \ldots n_N^2 x_N'^2 ,$$

d. h. L und Φ können durch eine lineare Transformation der Koordinaten in Summen von Quadraten verwandelt werden, und die Koeffizienten der Variabeln im Ausdruck der doppelten potentiellen Energie sind dann die Quadrate der Frequenzen der Normalschwingungen.

59. Erzwungene Schwingungen eines Systems von Massenpunkten.

Wir wollen nun den Fall annehmen, daß auf unser System, das wir jetzt durch seine N Normalkoordinaten $p_1 \ldots p_N$ charakterisieren wollen, außer den Kräften, die sich aus seiner potentiellen Energie herleiten, noch andere Kräfte, und zwar Kräfte im allgemeinen Sinne des Wortes, wie wir sie in Nr. 55 eingeführt haben, von außen einwirken, die wir durch $P_1\, P_2 \ldots P_N$ bezeichnen wollen. Dann lauten die Lagrangeschen Gleichungen (29), indem wir noch die Kräfte [illegible]

(91) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_\lambda}\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial p_\lambda} = P_\lambda \quad (\lambda = 1, 2 \ldots N).$$

Speziell wollen wir den Fall betrachten, daß alle P_λ Null sind, mit Ausnahme der auf die ν^{te} Koordinate p_ν wirkenden Kraft P_ν, die eine gegebene Funktion der Zeit sei; also $P_\nu = f(t)$. Diese Funktion wollen wir noch so spezialisieren, daß wir $f(t)$ als periodische Funktion der Zeit voraussetzen. Also etwa:

(92) $$P_\nu = A_0 \cos n t .$$

In Normalkoordinaten lauten L und Φ nach Gleichung (51):

$$L = \frac{1}{2} \sum_{\lambda}^{1,N} \left(\frac{d p_\lambda}{d t}\right)^2,$$

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{\lambda} c_\lambda p_\lambda^2 .$$

Also lauten die Bewegungsgleichungen für die Koordinaten, mit Ausnahme der ν^{ten}:

(93) $$\frac{d^2 p_\lambda}{d t^2} + c_\lambda p_\lambda = 0 \quad (\lambda \neq \nu),$$

und für die ν^{te} Koordinate selbst:

(94) $$\frac{d^2 p_\nu}{d t^2} + c_\nu p_\nu = A_0 \cos n t .$$

Da wir Normalkoordinaten benutzen, so haben wir den großen Vorteil, für jede Koordinate die einfache Schwingungsgleichung der linearen Schwingungen eines Massenpunktes vor uns zu haben; also sind die Lösungen sofort angebbar. Wir haben für die Gleichung (93), für die $\lambda \neq \nu$ ist:

(95) $$p_\lambda = B_\lambda \cos\left(\sqrt{c_\lambda}\, t + \varepsilon_\lambda\right) \quad (\lambda \neq \nu),$$

wo B_λ und ε_λ willkürliche Konstanten sind, und für die Gleichung (94), $(\lambda = \nu)$ nach den Ergebnissen der Nr. 37:

(96) $$p_\nu = \frac{A_0}{c_\nu - n^2} \cos n t + B_\nu \cos\left(\sqrt{c_\nu}\, t + \varepsilon_\nu\right).$$

Darin ist offenbar das Glied $\frac{A_0 \cos n t}{c_\nu - n^2}$ die „erzwungene“ Schwingung, und das zweite Glied mit den disponiblen Konstanten B_ν und ε_ν die darüber gelagerte „freie“ Schwingung. Da das Lösungssystem (95) und (96) im ganzen $2\,N$ disponible Konstanten hat, so kann es einem beliebigen Anfangszustande angepaßt werden, stellt also die allgemeine Lösung unseres Problems dar. Die Verhältnisse liegen jetzt infolge der Benutzung von Normalkoordinaten so, als ob wir N ganz unabhängige Massenpunkte hätten, von denen einer eine erzwungene Schwingung ausführt. Natürlich stünde nichts im Wege, auch auf mehrere Koordinaten erzwingende Kräfte P_λ wirken zu lassen.

Die Lösung (96) versagt für $t = \infty$, wenn $n = \sqrt{c_\nu} = n_\nu$ ist, d. h. wenn die betreffende Eigenschwingung dieselbe Frequenz hat, wie die erzwingende Kraft. Das liegt an der Vernachlässigung der Dämpfung, die auch hier ähnlich wie im III. Kapitel eingeführt werden kann. Wir gehen hierauf nicht näher ein.

60. Theorie des Doppelpendels.

Wir wollen im folgenden ein ganz einfaches, aus zwei Massen m_1 und m_2 bestehendes System betrachten, dessen kleine Schwingungen untersucht werden sollen. Die Masse m_1 sei an einem gewichtslosen unveränderlichen Faden von der Länge l_1 befestigt; an dieser Masse ist vermittels eines zweiten Fadens von der Länge l_2 die Masse m_2 befestigt. Das ganze System stellt ein sogenanntes „Doppelpendel" dar, dessen ebene Schwingungen in der xz-Ebene wir untersuchen wollen. (Figur 63.)

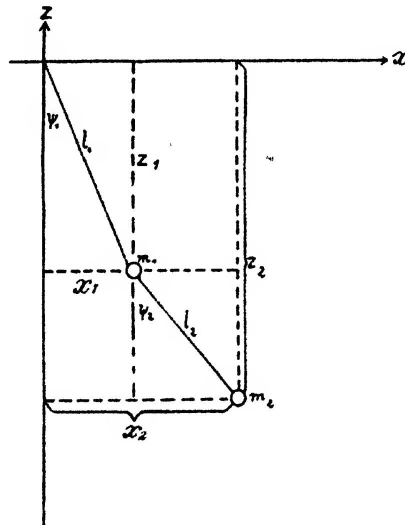


Fig. 63.

Zwischen den kartesischen Koordinaten $(x_1 z_1)$ bzw. $(x_2 z_2)$ der beiden Massenpunkte bestehen offenbar die beiden Relationen:

$$(97) \qquad \begin{cases} F_1 \equiv x_1^2 + z_1^2 - l_1^2 = 0, \\ F_2 \equiv (x_2 - x_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - l_2^2 = 0. \end{cases}$$

Das System besitzt also in der xz-Ebene zwei Freiheitsgrade; ferner sind die wirkenden Kräfte:

$$X_1 = X_2 = 0; \quad Z_1 = -m_1 g; \quad Z_2 = -m_2 g.$$

Das d'Alembertsche Prinzip liefert also, wenn λ_1 und λ_2 zwei unbestimmte Faktoren bedeuten, die vier Gleichungen:

$$(98)\quad \begin{cases} m_1 \frac{d^2 x_1}{d t^2} + 2\lambda_1 x_1 - 2\lambda_2 (x_2 - x_1) = 0, \\ m_1 \frac{d^2 z_1}{d t^2} + m_1 g + 2\lambda_1 z_1 - 2\lambda_2 (z_2 - z_1) = 0, \\ m_2 \frac{d^2 x_2}{d t^2} + 2\lambda_2 (x_2 - x_1) = 0, \\ m_2 \frac{d^2 z_2}{d t^2} + m_2 g + 2\lambda_2 (z_2 - z_1) = 0. \end{cases}$$

Diese genügen in Verbindung mit den zwei Gleichungen (97) zur Bestimmung der sechs Unbekannten $x_1, x_2, z_1, z_2, \lambda_1, \lambda_2$. Man sieht indessen, wie kompliziert diese Gleichungen in kartesischen Koordinaten schon bei einem relativ einfachen Problem sind; wir wollen sie infolgedessen nicht weiter behandeln, sondern lieber andere, allgemeine Koordinaten einführen. Man sieht aus der Figur 63, daß die Lage des Systems vollkommen bestimmt ist durch die beiden Winkel ψ_1 und ψ_2, die die beiden Fäden mit der Vertikalen bilden; diese Winkel wollen wir als Koordinaten nehmen. Man erkennt aus der Figur 63 unmittelbar die Richtigkeit folgender Beziehungen:

$$(99)\quad \begin{cases} x_1 = l_1 \sin\psi_1; \quad x_2 - x_1 = l_2 \sin\psi_2; \quad x_2 = l_1 \sin\psi_1 + l_2 \sin\psi_2; \\ z_1 = l_1 \cos\psi_1; \quad z_2 - z_1 = l_2 \cos\psi_2; \quad z_2 = l_1 \cos\psi_1 + l_2 \cos\psi_2. \end{cases}$$

Beschränken wir uns, da wir kleine Schwingungen untersuchen wollen, auf kleine Winkel ψ_1 und ψ_2, so ist mit hinreichender Annäherung:

$$(100)\quad \begin{cases} x_1 = l_1 \psi_1; \quad x_2 = l_1 \psi_1 + l_2 \psi_2; \\ z_1 = l_1 \left(1 - \frac{\psi_1^2}{2}\right); \quad z_2 = l_1 + l_2 - \frac{l_1^2}{2} \psi_1^2 - \frac{l_2^2}{2} \psi_2^2. \end{cases}$$

Bei dem hier benutzten Grade der Annäherung ist:

$$(101)\quad \begin{cases} \left(\frac{d x_1}{d t}\right)^2 = l_1^2 \left(\frac{d\psi_1}{d t}\right)^2; \quad \left(\frac{d z_1}{d t}\right)^2 = 0; \\ \left(\frac{d x_2}{d t}\right)^2 = l_1^2 \left(\frac{d\psi_1}{d t}\right)^2 + l_2^2 \left(\frac{d\psi_2}{d t}\right)^2 + 2 l_1 l_2 \frac{d\psi_1}{d t} \frac{d\psi_2}{d t}; \quad \left(\frac{d z_2}{d t}\right)^2 = 0; \end{cases}$$

also wird die kinetische Energie L des Systems:

$$(102)\quad L = \frac{1}{2} \left(\frac{d\psi_1}{d t}\right)^2 (m_1 + m_2) l_1^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\psi_2}{d t}\right)^2 m_2 l_2^2 + \frac{d\psi_1}{d t} \frac{d\psi_2}{d t} m_2 l_1 l_2.$$

Mit demselben Grade der Annäherung ergibt sich durch elementare Rechnungen die potentielle Energie Φ:

$$(103)\quad \Phi = \frac{m_1 + m_2}{2} g l_1 \psi_1^2 + \frac{m_2}{2} g l_2 \psi_2^2.$$

Durch die Wahl unserer Koordinaten sind die Bedingungsgleichungen schon erfüllt: ψ_1 und ψ_2 sind daher gänzlich unabhängig voneinander;

es sind aber keine Normalkoordinaten, wie ein Blick auf die Gestalt von L ergibt. Nach den Lagrangeschen Gleichungen (29) sind also die Bewegungsgleichungen:

$$(104)\quad \begin{cases} (m_1 + m_2) l_1^2 \dfrac{d^2\psi_1}{dt^2} + m_2 l_1 l_2 \dfrac{d^2\psi_2}{dt^2} + g l_1 (m_1 + m_2)\psi_1 = 0, \\ m_2 l_2^2 \dfrac{d^2\psi_2}{dt^2} + m_2 l_1 l_2 \dfrac{d^2\psi_1}{dt^2} + g l_2 \quad m_2 \psi_2 \quad = 0. \end{cases}$$

Diese lösen wir durch unseren alten Ansatz:

$$(105)\quad \begin{cases} \psi_1 = A_1 e^{int}, \\ \psi_2 = A_2 e^{int}, \end{cases}$$

wo A_1, A_2 und n zu bestimmende Konstanten sind.

Einsetzen in Gleichung (104) liefert die beiden in A_1 und A_2 linearen Gleichungen:

$$(106)\quad \begin{cases} A_1 [g l_1 (m_1 + m_2) - l_1^2 (m_1 + m_2) n^2] - A_2 \cdot m_2 l_1 l_2 n^2 = 0, \\ - A_1 \cdot m_2 l_1 l_2 n^2 + A_2 [g l_2 m_2 - l_2^2 m_2 n^2] = 0. \end{cases}$$

Wegen der Homogenität derselben haben sie nur dann von Null verschiedene Lösungen, wenn die Determinaten des Gleichungssystems verschwindet, wenn also

$$(107)\quad \begin{vmatrix} g l_1 (m_1 + m_2) - l_1^2 (m_1 + m_2) n^2, & - m_2 l_1 l_2 n^2, \\ - m_2 l_1 l_2 n^2, & g l_2 m_2 - l_2^2 m_2 n^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Das liefert für n^2 die quadratische Gleichung:

$$(108)\quad n^4 - n^2 \frac{(m_1 + m_2) g (l_1 + l_2)}{m_1 l_1 l_2} + \frac{g^2 (m_1 + m_2)}{m_1 l_1 l_2} = 0,$$

deren Lösung ist:

$$n^2 = \frac{(m_1 + m_2) g (l_1 + l_2)}{2 m_1 l_1 l_2} \pm g \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)^2 (l_1 + l_2)^2 - 4 (m_1 + m_2) m_1 l_1 l_2}{4 m_1^2 l_1^2 l_2^2}}.$$

oder auch in übersichtlicherer Schreibweise:

$$(109)\quad n^2 = \frac{(m_1 + m_2) g (l_1 + l_2)}{2 m_1 l_1 l_2} \pm g \frac{\sqrt{m_1 + m_2}}{2 m_1 l_1 l_2} \cdot \sqrt{m_1 (l_1 - l_2)^2 + m_2 (l_1 + l_2)^2}.$$

Diese Gleichung liefert zwei Werte für die Eigenfrequenzen n_1 und n_2, und nach den allgemeinen Ergebnissen der Nr. 57 (Gleichung 43) kann die Lösung geschrieben werden, wenn $A_1^{(1)}$, $A_2^{(1)}$, $A_1^{(2)}$, $A_2^{(2)}$, ε_1, ε_2 Konstante bedeuten:

$$(110)\quad \begin{cases} \psi_1 = A_1^{(1)} \cos(n_1 t + \varepsilon_1) + A_1^{(2)} \cos(n_2 t + \varepsilon_2), \\ \psi_2 = A_2^{(1)} \cos(n_1 t + \varepsilon_1) + A_2^{(2)} \cos(n_2 t + \varepsilon_2). \end{cases}$$

Die Konstanten $A_2^{(1)}$ und $A_2^{(2)}$ sind nicht disponibel, sondern wegen der linearen Gleichungen (106) durch $A_1^{(1)}$ resp. $A_1^{(2)}$ bestimmt; Gleichung (110) enthält also vier disponible Konstanten, wie es sein muß. Damit ist die Aufgabe in ihrer Allgemeinheit erledigt, und es bliebe nur noch übrig,

die Gleichung (110) einem gegebenen Anfangszustande anzupassen. Da dies keinerlei Schwierigkeiten hat, gehen wir darauf nicht näher ein, sondern wollen zwei Spezialfälle weiter diskutieren.

Erster Spezialfall: $m_1 = m_2 = m$; $l_1 = l_2 = l$, d. h. die beiden Massen seien gleich schwer und die Fäden, an denen sie befestigt sind, gleich lang. Dann wird Gleichung (109):

$$n^2 = \frac{2g}{l} \pm \frac{g}{l}\sqrt{2}.$$

Bedenkt man, daß für die Frequenz n_0 eines einfachen Pendels $n_0^2 = g/l$ ist, so haben wir:

(111) $$n^2 = 2n_0^2 \pm n_0^2\sqrt{2} = n_0^2(2 \pm \sqrt{2}).$$

Daraus ergibt sich für die beiden möglichen Werte von n:

(112) $$\begin{cases} n_1 = n_0\sqrt{2 + \sqrt{2}} \cong 1{,}85\, n_0, \\ n_2 = n_0\sqrt{2 - \sqrt{2}} \cong 0{,}76\, n_0. \end{cases}$$

Setzt man diese Werte von n_1 und n_2 in Gleichung (110) ein und bestimmt die Konstanten durch den Anfangszustand, so ist alles erledigt. Wir gehen also über zum

Zweiten Spezialfall, der dadurch ausgezeichnet sein soll, daß die beiden Frequenzen n_1 und n_2 nach (110) einander möglichst gleich sein sollen.

Das legt die Vorfrage nahe, ob es überhaupt möglich ist, in Strenge $n_1 = n_2$ zu machen. Das könnte nach (109) nur dann eintreten, wenn die Wurzel verschwindet, also wenn:

$$m_1 (l_1 - l_2)^2 + m_2 (l_1 + l_2)^2 = 0$$

werden kann. Da aber m_1 und m_2 positive Größen sind, die mit Quadraten multipliziert sind, die nicht beide verschwinden können, so kann diese Gleichung nie erfüllt werden: genau gleiche Frequenzen n_1 und n_2 sind bei dieser Anordnung nicht möglich. Aber man kann sie sehr nahe gleich machen, indem man die Wurzel möglichst klein macht, und das ist offenbar dann der Fall, wenn $l_1 = l_2 = l$ und m_2 außerordentlich klein gegen m_1 ist, d. h. wenn beide Pendel von gleicher Länge sind und das angehängte eine relativ kleine Masse hat.

Unter dieser Voraussetzung wird nach (109) angenähert, wenn $\frac{m_2}{m_1}$ neben 1 vernachlässigt wird:

(113) $$n^2 = \frac{g}{l} \pm \frac{g}{l}\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}$$

oder wenn wir $\frac{g}{l}$ wieder durch n_0^2 ersetzen:

$$(114)\quad \begin{cases} n_1^2 = n_0^2\left(1 + \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}\right), \\ n_2^2 = n_0^2\left(1 - \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}\right), \end{cases}$$

oder wenn wir die Wurzel ziehen und rechts entwickeln:

$$(115)\quad \begin{cases} n_1 = n_0\left\{1 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}\right\} = n_0(1+\delta), \\ n_2 = n_0\left\{1 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}\right\} = n_0(1-\delta). \end{cases}$$

Dabei ist

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m_2}{m_1}} = \delta$$

gesetzt. Setzen wir diese Werte mit der für unseren Fall erforderlichen Spezialisierung in (106) ein, so haben wir für $n = n_1$:

$$A_1\,[g\,l\,m_1 - l^2\,m_1\,n_1^2] = A_2\,m_2\,l^2\,n_1^2\,;$$

also:

$$(116)\quad \left(\frac{A_2}{A_1}\right)_{n=n_1} = \frac{m_1\,g\,l}{m_2\,l^2\,n_1^2} - \frac{m_1\,l^2\,n_1^2}{m_2\,l^2\,n_1^2} = \frac{1}{4\delta^2}\cdot\left\{\frac{n_0^2}{n_1^2} - 1\right\} = -\frac{1}{2\delta},$$

und ebenso erhalten wir für $n = n_2$:

$$(117)\quad \left(\frac{A_2}{A_1}\right)_{n=n_2} = +\frac{1}{2\delta}.$$

Also ist nach (116) und (117)

$$(A_2)_{n=n_1} = -\frac{1}{2\delta}(A_1)_{n=n_1},$$

$$(A_2)_{n=n_2} = +\frac{1}{2\delta}(A_1)_{n=n_2}.$$

Setzen wir nun:

$$(118\text{a})\quad \begin{cases} (A_1)_{n=n_1} = A_1^{(1)}e^{i\varepsilon_1}, \\ (A_1)_{n=n_2} = A_1^{(2)}e^{i\varepsilon_2}, \end{cases}$$

und die zugehörigen Werte von A_2:

$$(118\text{b})\quad \begin{cases} (A_2)_{n=n_1} = A_2^{(1)}e^{i\varepsilon_1}, \\ (A_2)_{n=n_2} = A_2^{(2)}e^{i\varepsilon_2}, \end{cases}$$

so ist nach (103):

$$(119)\quad \begin{cases} \psi_1 = A_1^{(1)}\cos(n_1 t + \varepsilon_1) = A_1^{(2)}\cos(n_2 t + \varepsilon_2), \\ \psi_2 = -\frac{1}{2\delta}A_1^{(1)}\cos(n_1 t + \varepsilon_1) + \frac{1}{2\delta}A_1^{(2)}\cos(n_2 t + \varepsilon_2). \end{cases}$$

Setzen wir der Einfachheit halber folgenden Anfangszustand fest:

$$(120)\quad \begin{cases} \psi_1(0) = 1; \quad \psi_2(0) = 0, \\ \frac{d\psi_1(0)}{dt} = \frac{d\psi_2(0)}{dt} = 0, \end{cases}$$

so erhält man zur Konstantenbestimmung:

(121)
$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0\,, \\ A_1^{(1)} = A_1^{(2)} = \tfrac{1}{2}\,, \end{cases}$$

also ist nach (119) endgültig:

(122)
$$\begin{cases} \psi_1 = \tfrac{1}{2}\cos n_1 t + \tfrac{1}{2}\cos n_2 t\,, \\ \psi_2 = -\dfrac{1}{4\delta}\cos n_1 t + \dfrac{1}{4\delta}\cos n_2 t\,, \end{cases}$$

oder wenn wir das Additionstheorem anwenden:

(123)
$$\begin{cases} \psi_1 = \cos\dfrac{n_1 + n_2}{2} t \cdot \cos\dfrac{n_1 - n_2}{2} t\,, \\ \psi_2 = \dfrac{1}{2\delta}\sin\dfrac{n_1 + n_2}{2} t \cdot \sin\dfrac{n_1 - n_2}{2} t\,, \end{cases}$$

also mit Benutzung von (115):

(124)
$$\begin{cases} \psi_1 = \cos n_0 t \cdot \cos(n_0\delta) t\,, \\ \psi_2 = \dfrac{1}{2\delta}\sin n_0 t \cdot \sin(n_0\delta) t\,. \end{cases}$$

Darin ist nun nach Voraussetzung δ, also auch $n_0\,\delta$, sehr klein gegen n_0, so daß wir $\cos\, n_0\, t$ und $\sin\, n_0\, t$ einerseits als rasch veränderliche Funktionen, $\cos\,(n_0\delta)\, t$ und $\sin\,(n_0\delta)\, t$ anderseits als langsam veränderliche Größen bezeichnen müssen. Während z. B. $\cos\, n_0\, t$ schon

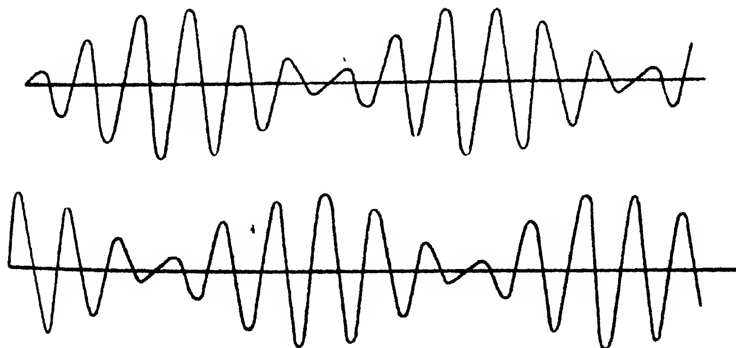


Fig. 64.

viele Male durch Null hindurchgegangen ist, hat sich $\cos\,(n_0\delta)\, t$ nur wenig verändert, so daß wir in (129) ψ_1 und ψ_2 als Schwingungen von der Frequenz n_0 betrachten können, die eine periodisch veränderliche Amplitude haben. Akustisch gesprochen: wir haben einen Ton von bestimmter Höhe, dessen Intensität periodisch schwankt, und von dieser akustischen Beziehung her rührt die Bezeichnung „Schwe-

bungen" für dieses Phänomen. Man sieht aus (124), daß, wenn ψ_1 das Maximum seiner Amplitude hat, dann gerade ψ_2 die Amplitude Null besitzt und umgekehrt. Zu gewissen Zeiten ist also das eine Pendel in Ruhe; dann hat das andere seine stärkste Bewegung, und umgekehrt. Die Energie schwankt demnach zwischen den beiden Pendeln hin und her. Figur 64 veranschaulicht die Schwebungen und die Beziehungen beider Pendel zueinander.

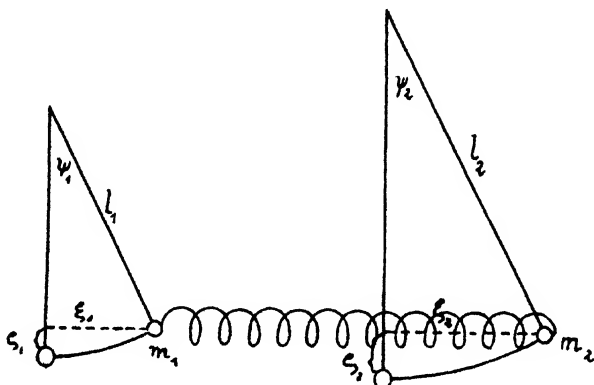


Fig. 65.

Eine andere Form der Koppelung zweier Pendelschwingungen ist in Figur 65 dargestellt: zwei Pendel von den Längen l_1 und l_2 und den Massen m_1 und m_2 sind dadurch verbunden, daß an den beiden Massen eine masselose elastische Feder befestigt ist. Die Länge der Feder ist so gewählt, daß, wenn die Pendel in Ruhe sind ($\psi_1 = \psi_2 = 0$), die Feder ungespannt ist, und daher keine Kräfte auf die beiden Massen ausübt. Das gleiche gilt natürlich, wenn die horizontalen Verschiebungen ξ_1 und ξ_2 der beiden Pendel aus der Ruhelage einander gleich sind. Die potentielle Energie Φ_{12}, die die beiden Pendel in bezug aufeinander haben, wenn die Feder gespannt ist, ist daher offenbar (wenigstens in erster Näherung) proportional $(\xi_2 - \xi_1)^2$, also wenn wir durch E eine von den Dimensionen und der Natur der Feder abhängende Konstante bezeichnen:

$$\Phi_{12} = \frac{E}{2}(\xi_2 - \xi_1)^2.$$

Nach der obigen Zeichnung ist nun offenbar für kleine Amplituden:

$$\xi_2 = l_2\,\psi_2; \quad \xi_1 = l_1\,\psi_1.$$

Also ist:

(125) $$\Phi_{12} = \frac{E}{2}(l_2\,\psi_2 - l_1\,\psi_1)^2.$$

Dazu kommt noch die potentielle Energie Φ_1 und Φ_2 der beiden Pendel,

die dadurch entsteht, daß sie bei einem Ausschlag um die vertikalen Höhen ζ_1 und ζ_2 gehoben werden. Diese sind, wie man leicht sieht:

$$(126)\quad \begin{cases} \Phi_1 = m_1 g \zeta_1 = \dfrac{m_1 g l_1}{2} \psi_1^2, \\ \Phi_2 = m_2 g \zeta_2 = \dfrac{m_2 g l_2}{2} \psi_2^2. \end{cases}$$

Also ist die gesammte potentielle Energie nach (125) und (126):

$$(127)\quad \Phi = \frac{\psi_1^2}{2}(m_1 g l_1 + E l_1^2) + \frac{\psi_2^2}{2}(m_2 g l_2 + E l_2^2) - \psi_1 \psi_2 E l_1 l_2,$$

und die kinetische Energie ist, wie leicht zu sehen:

$$(128)\quad L = \frac{m_1}{2} l_1^2 \left(\frac{d\psi_1}{dt}\right)^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \left(\frac{d\psi_2}{dt}\right)^2.$$

Mathematisch besteht also der Unterschied zwischen diesem und dem vorhergehenden Beispiel darin, daß jetzt die kinetische Energie als Summe von Quadraten dargestellt ist, und die potentielle die doppelten Produkte enthält, während es nach Gleichungen (102) und (103) im ersten Falle umgekehrt war. Nach der Lagrangeschen Methode erhält man aus (127) und (128) sofort die Bewegungsgleichungen:

$$(129)\quad \begin{cases} m_1 l_1^2 \dfrac{d^2\psi_1}{dt^2} + (m_1 g l_1 + E l_1^2)\psi_1 - E l_1 l_2 \psi_2 = 0, \\ m_2 l_2^2 \dfrac{d^2\psi_2}{dt^2} + (m_2 g l_2 + E l_2^2)\psi_2 - E l_1 l_2 \psi_1 = 0. \end{cases}$$

Macht man zur Lösung wieder den Ansatz:

$$(130)\quad \begin{cases} \psi_1 = A_1 e^{\varrho t}, \\ \psi_2 = A_2 e^{\varrho t}, \end{cases}$$

so erhält man genau wie früher schließlich für ϱ^2 die Gleichung:

$$(131)\quad \begin{cases} \varrho^2 = -\dfrac{m_1 l_1^2 (m_2 g l_2 + E l_2^2) + m_2 l_2^2 (m_1 g l_1 + E l_1^2)}{2 m_1 m_2 l_1^2 l_2^2} \\ \pm \dfrac{1}{2 m_1 l_1 l_2} \sqrt{[m_1 l_1^2 (m_2 g l_2 + E l_2^2) - m_2 l_2^2 (m_1 g l_1 + E l_1^2)]^2 + 4 E m_1 m_2 l_1^4 l_2^4}. \end{cases}$$

Wir wollen diese Gleichung zunächst daraufhin untersuchen, ob unter gewissen Umständen die beiden im allgemeinen vorhandenen Werte von n_1 und n_2 zusammenfallen können, d. h. ob die beiden Eigenschwingungen das Systems gleich werden können. Dazu ist offenbar notwendig, daß die Wurzel in (131) verschwindet, d. h.:

$$[m_1 l_1^2 (m_2 g l_2 + E l_2^2) - m_2 l_2^2 (m_1 g l_1 + E l_1^2)]^2 + 4 E m_1 m_2 l_1^4 l_2^4 = 0.$$

Man sieht, daß dieser Ausdruck **nicht** durch positive Werte von m_1, m_2, l_1, l_2 befriedigt werden kann, also: **wie man auch die Massen und Pendellängen wählt, niemals kann man gleiche Frequenzen erzielen.** Also insbesondere auch dann nicht, wenn

$m_1 = m_2 = m$ und $l_1 = l_2 = l$ gewählt werden. Wäre die Koppelung durch die Feder nicht vorhanden, so hätte man allerdings zwei identische Pendel von der Frequenz $n_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Aber die Koppelung verstimmt die beiden ursprünglich gleichen Schwingungsdauern gegeneinander. Für den hier betrachteten Spezialfall wird aus (131):

$$\varrho^2 = -\frac{mgl + El^2}{ml^2} \pm \sqrt{\frac{E}{m^2}}. \tag{132}$$

Machen wir die Koppelung d. h. E sehr klein, so wird angenähert

$$\varrho^2 = -n^2 = -\frac{g}{l} \pm \frac{\sqrt{E}}{m} = -n_0^2 \pm \frac{\sqrt{E}}{m},$$

also:

$$\begin{cases} n_1^2 = n_0^2 + \dfrac{\sqrt{E}}{m}, \\ n_2^2 = n_0^2 - \dfrac{\sqrt{E}}{m}, \end{cases} \tag{133}$$

und beide Werte weichen nur wenig von dem der ungestörten Schwingungsfrequenz n_0 ab, der eine nach oben, der andere nach unten um den gleichen Betrag. Es tritt dann wieder das am vorhergehenden Beispiel diskutierte Phänomen der Schwebungen auf, weshalb wir hier nicht näher darauf einzugehen brauchen. Gekoppelte Schwingungen der hier betrachteten Art spielen in der Elektrodynamik eine große Rolle, und dort werden wir näher ins Detail der Erscheinungen eingehen.

61. Die allgemeine Gravitationskraft.

In Nr. 18 [Gleichung (101) des ersten Kapitels auf pag. 50] fanden wir mittels der Keplerschen Gesetze das Resultat, daß die Beschleunigung eines Planeten bei seinem Umlaufe um die Sonne ist:

$$\mathfrak{a} = -\frac{k'}{r^2}. \tag{134}$$

Unter Einführung des Kraftbegriffes kann man dies nach Nr. 24 [Gleichung (14) des zweiten Kapitels auf pag. 77] auch so ausdrücken, daß alle Planeten gegen die Sonne hin mit folgender Kraft angezogen werden:

$$\mathfrak{K} = -\frac{k'm}{r^2}. \tag{135}$$

In diesen beiden Gleichungen ist k' eine für alle Planeten gemeinsame Konstante, die aber noch von der Natur der Sonne abhängen kann und tatsächlich abhängt. Wir wollen nämlich jetzt Gleichung ([illegible]) unter dem Gesichtspunkte des dritten Newtonschen Axioms, des Gesetzes von der Gleichheit der actio und reactio betrachten. Um di[illegible]e-

quem formulieren zu können, wollen wir allen auf die Sonne bezüglichen Größen den Index 1, den auf den Planeten bezüglichen den Index 2 geben; *r* erhält den Doppelindex 12 oder 21, ebenso wie $\mathfrak{K}$. Die Kraft, die von der Sonne (1) auf den Planeten (2) ausgeübt wird, ist nach (135) in der neuen Schreibweise:

$$\mathfrak{K}_{12} = -\frac{k' m_2}{r_{12}^2}. \tag{136}$$

Aber nach dem dritten Bewegungsgesetz wirkt eine genau ebenso große entgegengestzt gerichtete Kraft $\mathfrak{K}_{21}$ auf die Sonne, die von dem Planeten (2) ausgeht. Da in dem dritten Axiom keinerlei Bevorzugung des Körpers (1) gegenüber dem Körper (2) enthalten ist, so folgt schon aus Symmetriegründen, daß $\mathfrak{K}_{21}$ die Form haben muß:

$$\mathfrak{K}_{21} = +\frac{k'' m_1}{r_{12}^2}, \tag{137}$$

wobei der umgekehrten Kraftrichtung durch das Pluszeichen Rechnung getragen ist. k'' ist dabei eine Konstante, die von der Natur des Planeten abhängt. Nach dem dritten Bewegungsgesetz ist nun noch:

$$-k' m_2 + k'' m_1 = 0$$

oder:

$$k' m_2 = k'' m_1 = \text{Const.}; \tag{138}$$

also ist:

$$\begin{cases} k' = k m_1, \\ k'' = k m_2, \end{cases} \tag{139}$$

wo *k* nun ein universeller, von der Natur von (1) und (2) unabhängiger Faktor ist. Damit gewinnt das Kraftgesetz (136) die symmetrische Form:

$$\mathfrak{K}_{12} = -\frac{k m_1 m_2}{r_{12}^2}. \tag{140}$$

Dieses Gesetz hat sich in der glänzendsten Weise in der Mechanik des Himmels bewährt und hat die Probe auf die Richtigkeit der ihm zugrunde liegenden Voraussetzungen bestanden. Wir nennen es in dieser Form das „Newtonsche Gravitationsgesetz". Newton nahm, über die Anwendungen des Gesetzes auf die Himmelsmechanik hinausgehend, weiter an, daß nicht nur die Bewegungen der Himmelskörper durch dies Gesetz regiert werden, sondern er betrachtete es als eine allgemeine Eigenschaft der Materie, aufeinander nach diesem Gesetze einzuwirken. Zwischen zwei beliebigen Massen wirkt nach Newton stets diese Kraft (140). So wurde er dazu geführt, die Erscheinung der Erdbeschleunigung, also die Schwere, als eine Folge der nach dem Gravitationsgesetz (140) wirkenden Kräfte zwischen der Erde und den fallenden Körpern zu betrachten. Diese großartige Verallgemeinerung ist der experimentellen Prüfung fähig. Denn nach (140) ist die Kraft um-

gekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung zwischen den beiden Massen. Newton verglich nun miteinander die Beschleunigungen, die die Erde einerseits einem an ihrer Oberfläche befindlichen Massenpunkte, anderseits dem Monde erteilt, der sich in einer mittleren Entfernung von 60 Erdradien R vom Erdmittelpunkte befindet.

Bezeichnen wir die Masse der Erde mit m (ohne Index), die des substantiellen Punktes an der Erdoberfläche mit m_1, die des Mondes mit m_2, so sind die Beschleunigungen $\mathfrak{a}_1$ bzw. $\mathfrak{a}_2$ nach dem Newtonschen Gesetze (140):

$$|\mathfrak{a}_1| = \left|\frac{\mathfrak{K}_1}{m_1}\right| = \frac{k\,m}{R^2},$$

$$|\mathfrak{a}_2| = \left|\frac{\mathfrak{K}_2}{m_2}\right| = \frac{k\,m}{60^2\,R^2}.$$

Nun ist aber $|\mathfrak{a}_1| = g \cong 981\ \mathrm{cm/sec^2}$, also folgt durch Division der beiden Gleichungen:

$$\frac{|\mathfrak{a}_2|}{g} = \frac{1}{60^2}; \quad \text{also} \quad |\mathfrak{a}_2| = \frac{981}{3600}\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{sec}^2} \cong 0{,}27\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{sec}^2}.$$

Anderseits läßt sich die Beschleunigung des Mondes rein kinematisch bestimmen aus den für eine Kreisbahn mit dem Radius 60 R und konstante Winkelgeschwindigkeit spezialisierten Formeln (60) des ersten Kapitels auf pag. 37. Denn dann ist offenbar

$$|\mathfrak{a}_2| = 60\,R\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 60\,R\,\omega^2,$$

wenn ω die Winkelgeschwindigkeit des Mondes bedeutet. Nun ist die Größe des Erdradius in Zentimeter:

$$R = 637 \cdot 10^6\ \mathrm{cm},$$

ferner ist $\omega = \frac{2\pi}{T}$, wo T die Umlaufszeit ist, die wir zu 28 Tagen gleich $28 \cdot 86400$ Sekunden annehmen wollen. Also ist der Betrag von $|\mathfrak{a}_2|$:

$$|\mathfrak{a}_2| = \frac{60 \cdot 637 \cdot 10^6 \cdot 4\pi^2}{28^2 \cdot 86400^2} \cong 0{,}27\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{sec}^2},$$

also wirklich übereinstimmend mit dem aus dem Gravitationsgesetz folgenden Werte.

Da also Newtons Verallgemeinerung sich in schlagender Weise bestätigt hat, so nennt man die Kraft (140) die **allgemeine Massenanziehung**.

Wir formulieren daher Gleichung (140) folgendermaßen: **Zwei beliebige materielle Punkte von der Masse m_1 und m_2 in der Entfernung r_{12} ziehen sich mit einer Kraft an, die direkt proportional den beiden Massen, umgekehrt proportional dem Quadrate ihrer Entfernung ist.**

Die universelle Konstante k nennt man die Gravitationskonstante. Zunächst wollen wir ihre Dimensionen bestimmen:

$$[k] = \frac{[\text{Kraft}][r^2]}{[m^2]},$$

also

(141) $$[k] = [M^{-1} L^3 T^{-2}].$$

Man sieht aus (140), daß k direkt bestimmt werden kann, wenn man die beiden Massen m_1, m_2, ihre Entfernung r_{12} und die Kraft $\mathfrak{K}_{12}$ messen kann. Dies kann unter Verwendung irdischer Massen nach mehreren Methoden geschehen und so sind dann von zahlreichen Forschern, von denen nur die Namen Boys, Braun, Richarz und Krigar-Menzel genannt werden sollen, sorgfältige Untersuchungen gemacht worden, die für k den Wert ergeben haben:

(142) $$k = 6{,}675 \cdot 10^{-8} [\text{gr}^{-1}\,\text{cm}^3\,\text{sec}^{-2}].$$

Diese Zahl dürfte auf rund 1% richtig sein.

Die ganze obige Betrachtung beruht auf der unbewiesenen Annahme, daß die Wirkung der Erde auf den an ihrer Oberfläche befindlichen substantiellen Punkt dieselbe ist, als ob die Gesamtmasse der Erde in ihrem Mittelpunkte konzentriert wäre. Den Beweis werden wir später (Nr. 86) nachholen.

62. Das Zweikörperproblem.

Das wichtigste freie System ist das Sonnensystem. Es ist natürlich nicht anzunehmen, daß es im strengen Sinne des Wortes frei ist, weil wir ja gerade auf Grund des Newtonschen Gravitationsgesetzes annehmen müssen, daß auch von den weit entfernten Fixsternen Kräfte auf die Massen des Sonnensystems ausgeübt werden. Doch sind diese, da umgekehrt proportional dem Quadrate ihrer Entfernung, sehr klein im Vergleich zu den Kräften, die die Massen des Sonnensystems aufeinander ausüben, so daß erstere jedenfalls in Annäherung vernachlässigt werden können. Zwischen je zwei Massen des Sonnensystems wirkt die Kraft (140), so daß wir im allgemeinen Falle, wenn wir n Massen haben, es mit $3n$ Bewegungsgleichungen zu tun haben. Dieses n-Körperproblem ist in seiner Allgemeinheit heute nicht lösbar, selbst für n gleich 3 nicht. Daher werden wir uns auf den einfachsten Fall, $n = 2$, das sogenannte „Zweikörperproblem", beschränken.

Der Index 1 bezieht sich auf die Sonne, der Index 2 auf einen Planeten. Wir behandeln also die Bewegung von Sonne und Planet unter der alleinigen Wirkung ihrer gemäß (140) wirkenden inneren Kräfte. Ziehen wir den Radiusvektor r_{12} von der Sonne nach dem Planeten hin und rechnen diese Richtung als positiv, so ist die auf den Planeten wirkende Kraft $\mathfrak{K}_2$.

(143a) $$\mathfrak{K}_{12} = -\frac{k\, m_1\, m_2}{r_{12}^2},$$

und die auf die Sonne wirkende Kraft $\mathfrak{K}_{21}$:

(143b) $$\mathfrak{K}_{21} = +\frac{k\, m_1\, m_2}{r_{12}^2}$$

oder in Komponentendarstellung, wobei die Reihenfolge der beiden Gleichungen vertauscht ist:

(144) $$\left\{\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 x_1}{d t^2} &= +\frac{k\, m_1\, m_2}{r_{12}^2} \cos(r\, x), \\ m_1 \frac{d^2 y_1}{d t^2} &= +\frac{k\, m_1\, m_2}{r_{12}^2} \cos(r\, y), \\ m_1 \frac{d^2 z_1}{d t^2} &= +\frac{k\, m_1\, m_2}{r_{12}^2} \cos(r\, z), \\ m_2 \frac{d^2 x_2}{d t^2} &= -\frac{k\, m_1\, m_2}{r_{12}^2} \cos(r\, x), \\ m_2 \frac{d^2 y_2}{d t^2} &= -\frac{k\, m_1\, m_2}{r_{12}^2} \cos(r\, y), \\ m_2 \frac{d^2 z_2}{d t^2} &= -\frac{k\, m_1\, m_2}{r_{12}^2} \cos(r\, z). \end{aligned}\right.$$

Nun ist aber nach Fig. 66:

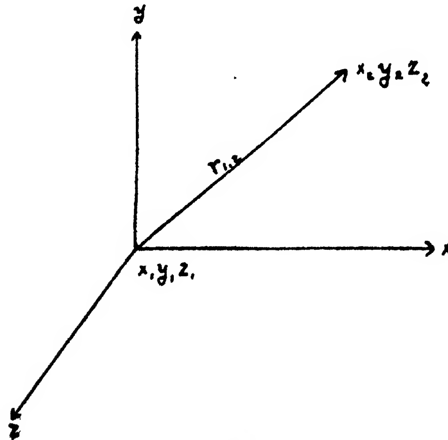


Fig. 66.

(145) $$\begin{aligned} \cos(r\, x) &= \frac{x_2 - x_1}{r_{12}}, \\ \cos(r\, y) &= \frac{y_2 - y_1}{r_{12}}, \\ \cos(r\, z) &= \frac{z_2 - z_1}{r_{12}}. \end{aligned}$$

Benutzen wir (145), so wird aus (144):

$$(146)\quad \begin{cases} m_1 \dfrac{d^2 x_1}{dt^2} = \dfrac{k\, m_1\, m_2 (x_2 - x_1)}{r_{12}^3}, \\ m_1 \dfrac{d^2 y_1}{dt^2} = \dfrac{k\, m_1\, m_2 (y_2 - y_1)}{r_{12}^3}, \\ m_1 \dfrac{d^2 z_1}{dt^2} = \dfrac{k\, m_1\, m_2 (z_2 - z_1)}{r_{12}^3}, \\ m_2 \dfrac{d^2 x_2}{dt^2} = -\dfrac{k\, m_1\, m_2 (x_2 - x_1)}{r_{12}^3}, \\ m_2 \dfrac{d^2 y_2}{dt^2} = -\dfrac{k\, m_1\, m_2 (y_2 - y_1)}{r_{12}^3}, \\ m_2 \dfrac{d^2 z_2}{dt^2} = -\dfrac{k\, m_1\, m_2 (z_2 - z_1)}{r_{12}^3}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen sind die Differentialgleichungen des Zweikörperproblems, aus denen sich die Keplerschen Gesetze ableiten lassen müssen, — soweit sie nämlich richtig sind. Denn daß genau die Keplerschen Gesetze herauskommen, ist gar nicht zu erwarten, da die Gesetze (146) noch das dritte Gesetz Newtons enthalten, das über den Inhalt der Keplerschen Gesetze hinausgeht.

Zunächst bestätigt man leicht an den Gleichungen (146) die Schwerpunktssätze und Momentensätze für ein freies System, denn durch Addition der ersten und vierten, zweiten und fünften, dritten und sechsten Gleichung (146) folgt sofort:

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = 0,$$
$$m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} = 0,$$
$$m_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 z_2}{dt^2} = 0,$$

oder, wenn man den Schwerpunkt:

$$\mathfrak{x} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2},$$
$$\mathfrak{y} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2},$$
$$\mathfrak{z} = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2}{m_1 + m_2}$$

einführt:

$$(147)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2 \mathfrak{x}}{dt^2} = 0, \\ \dfrac{d^2 \mathfrak{y}}{dt^2} = 0, \\ \dfrac{d^2 \mathfrak{z}}{dt^2} = 0, \end{cases}$$

d. h. der Schwerpunkt des Systems Sonne—Planet ist in gleichmäßiger geradliniger Translationsbewegung begriffen. Da wir eine gleichmäßige Translationsbewegung des Koordinatensystems nach dem Relativitätsprinzip der Mechanik nicht erkennen können, so können wir den Koordinatenanfangspunkt in den Schwerpunkt legen, d. h. den Schwerpunkt des Systems als ruhend annehmen. Da die Gleichungen (147) sechs disponible Integrationskonstanten liefern, wird über diese sechs hiermit verfügt, so daß von den 12 Integrationskonstanten des allgemeinen Systems (146) nur noch sechs zu bestimmen sind.

Genau ebenso finden wir die Momentensätze. Denn vollziehen wir die Operationen, die in Gleichung (34) des vierten Kapitels auf pag. 191 gefordert werden, d. h. multiplizieren wir die dritte und sechste Gleichung (146) mit bzw. y_1 und y_2, ebenso die zweite und fünfte mit z_1 und z_2, kombinieren diese Gleichungen in der geeigneten Weise und vertauschen endlich die Variabeln $x\,y\,z$ zyklisch, so erhalten wir die drei Gleichungen:

$$(148)\quad \left\{\begin{aligned} m_1\left(\frac{d^2 z_1}{d t^2}\, y_1 - \frac{d^2 y_1}{d t^2}\, z_1\right) + m_2\left(\frac{d^2 z_2}{d t^2}\, y_2 - \frac{d^2 y_2}{d t^2}\, z_2\right) &= 0\,,\\ m_1\left(\frac{d^2 x_1}{d t^2}\, z_1 - \frac{d^2 z_1}{d t^2}\, x_1\right) + m_2\left(\frac{d^2 x_2}{d t^2}\, z_2 - \frac{d^2 z_2}{d t^2}\, x_2\right) &= 0\,,\\ m_1\left(\frac{d^2 y_1}{d t^2}\, x_1 - \frac{d^2 x_1}{d t^2}\, y_1\right) + m_2\left(\frac{d^2 y_2}{d t^2}\, y_2 - \frac{d^2 x_2}{d t^2}\, y_2\right) &= 0\,,\end{aligned}\right.$$

oder nach einer einmaligen Integration nach der Zeit:

$$(149)\quad \left\{\begin{aligned} m_1\left(\frac{d z_1}{d t}\, y_1 - \frac{d y_1}{d t}\, z_1\right) + m_2\left(\frac{d z_2}{d t}\, y_2 - \frac{d y_2}{x t}\, z_2\right) &= A\,,\\ m_1\left(\frac{d x_1}{d t}\, z_1 - \frac{d z_1}{d t}\, x_1\right) + m_2\left(\frac{d x_2}{d t}\, z_2 - \frac{d z_2}{d t}\, x_2\right) &= B\,,\\ m_1\left(\frac{d y_1}{d t}\, x_1 - \frac{d x_1}{d t}\, y_1\right) + m_2\left(\frac{d y_2}{d t}\, x_2 - \frac{d x_2}{d t}\, y_2\right) &= C\,,\end{aligned}\right.$$

die die Erhaltung der Summe der Rotationsmomente der Geschwindigkeit aussprechen, was man natürlich auch direkt aus Gleichung (50) des vierten Kapitels (pag. 201) hätte folgern können. Die Richtung des Hauptrotationsmomentes ist durch die drei Konstanten A, B, C festgelegt, ebenso wie die dazu senkrechte Ebene, die „invariable Ebene“ des betrachteten Systems.

Diese invariable Ebene wollen wir nun mit einer der Koordinatenebenen, etwa der xy-Ebene, zusammenfallen lassen, so daß A und B gleich Null werden und das Hauptrotationsmoment gleich C wird, also ein Rotationsmoment um die z-Achse ist. C ist natürlich von Null verschieden. Dann läßt sich leicht zeigen, daß, wenn wir das Koordinatensystem so wählen, dauernd $z_1 = z_2 = 0$ ist, also die Bewegung eine ebene ist. Denn dann ist ja gleichzeitig nach (147) und den beiden ersten Gleichungen (149):

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0\,,$$
$$m_1 y_1 + m_2 y_2 = 0\,,$$
$$m_1 z_1 + m_2 z_2 = 0\,,$$
$$m_1 \left(\frac{d z_1}{d t} y_1 - \frac{d y_1}{d t} z_1\right) + m_2 \left(\frac{d z_2}{d t} y_2 - \frac{d y_2}{d t} z_2\right) = 0\,,$$
$$m_1 \left(\frac{d x_1}{d t} z_1 - \frac{d z_1}{d t} x_1\right) + m_2 \left(\frac{d x_2}{d t} z_2 - \frac{d z_2}{d t} x_2\right) = 0\,.$$

Aus den drei ersten folgt:

$$(150)\qquad \begin{cases} x_2 = -\dfrac{m_1}{m_2} x_1\,, \\ y_2 = -\dfrac{m_1}{m_2} y_1\,, \\ z_2 = -\dfrac{m_1}{m_2} z_1\,, \end{cases}$$

und setzt man dies in die beiden letzten ein, so folgt:

$$(151)\qquad \begin{cases} \dfrac{d z_1}{d t}\, y_1 - z_1 \dfrac{d y_1}{d t} = 0\,, \\ \dfrac{d z_1}{d t}\, x_1 - z_1 \dfrac{d x_1}{d t} = 0\,. \end{cases}$$

Diese beiden homogenen Gleichungen für z_1 und $\frac{d z_1}{d t}$ haben im allgemeinen nur die Lösung $z_1 = \frac{d z_1}{d t} = 0$, wenn nicht die Determinante $\begin{vmatrix} y_1 & -\frac{d y_1}{d t} \\ x_1 & -\frac{d x_1}{d t} \end{vmatrix}$ verschwindet. Dies kann hier nicht der Fall sein; denn es würde darauf folgen:

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{\frac{d y_1}{d t}}{\frac{d x_1}{d t}}\,,$$

und wenn man dies in die dritte Gleichung (149) zusammen mit den Gleichungen (150) einsetzt, so würde $C = 0$ folgen, im Gegensatz zur Voraussetzung. Also muß in der Tat, wenn wir $A = B = 0$, $C \neq 0$ wählen, d. h. die xy-Ebene mit der invariabeln Ebene zusammenfallen lassen, $z_1 = z_2$ dauernd $= 0$ sein. Es reduzieren sich also die Gleichungen (149) auf die eine:

$$(152)\qquad m_1 \left(\frac{d y_1}{d t} x_1 - \frac{d x_1}{d t} y_1\right) + m_2 \left(\frac{d y_2}{d t} x_2 - \frac{d x_2}{d t} y_2\right) = \text{Const.}$$

Damit ist über drei weitere Integrationskonstanten ABC eine endgültige Verfügung getroffen, so daß nunmehr noch drei übrig bleiben. Von diesen dreien läßt sich noch eine, die zehnte, mittels des Energieprinzips bestimmen. Werden die sechs Gleichungen (146) der Reihe nach mit

$$\frac{dx_1}{dt}, \quad \frac{dy_1}{dt}, \quad \frac{dz_1}{dt}, \quad \frac{dx_2}{dt}, \quad \frac{dy_2}{dt}, \quad \frac{dz_2}{dt}$$

multipliziert und dann addiert, so folgt sofort die Gleichung:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{m_1}{2}\left\{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_1}{dt}\right)^2\right\} + \frac{m_2}{2}\left\{\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_2}{dt}\right)^2\right\}\right]$$
$$+ \frac{k m_1 m_2}{r_{12}^3}\left[(x_2 - x_1)\left(\frac{dx_2}{dt} - \frac{dx_1}{dt}\right) + (y_2 - y_1)\left(\frac{dy_2}{dt} - \frac{dy_1}{dt}\right)\right.$$
$$\left. + (z_2 - z_1)\left(\frac{dz_2}{dt} - \frac{dz_1}{dt}\right)\right] = 0.$$

Der Klammerausdruck des zweiten Gliedes ist aber offenbar gleich

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{r_{12}^2}{2}\right) = r_{12}\frac{dr_{12}}{dt},$$

also das zweite Glied selbst gleich

$$+ \frac{k m_1 m_2}{r_{12}^2}\frac{dr_{12}}{dt},$$

und das kann geschrieben werden:

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{k m_1 m_2}{r_{12}}\right),$$

so daß wir endgültig haben:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{m_1}{2}\left\{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_1}{dt}\right)^2\right\}\right.$$
$$\left. + \frac{m_2}{2}\left\{\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_2}{dt}\right)^2\right\} - \frac{k m_1 m_2}{r_{12}}\right] = 0,$$

oder

(153) $$\begin{cases} \frac{m_1}{2}\left\{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_1}{dt}\right)^2\right\} \\ \qquad + \frac{m_2}{2}\left\{\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_2}{dt}\right)^2\right\} - \frac{k m_1 m_2}{r_{12}} = \text{Const.} = E. \end{cases}$$

Die beiden ersten Glieder stellen die kinetische Energie L, das dritte die potentielle Energie Φ dar, deren Ausdruck wir besonders anmerken wollen:

(154) $$\Phi = -\frac{k m_1 m_2}{r_{12}}.$$

Man überzeugt sich leicht, daß in der Tat die negativen Ableitungen nach den Koordinaten der beiden Massenpunkte die auf dieselben wirkenden Kraftkomponenten darstellen. Z. B.:

$$X_1 = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = -\frac{k m_1 m_2}{r_{12}^2}\frac{\partial r_{12}}{\partial x_1} = \frac{k m_1 m_2 (x_2 - x_1)}{r_{12}^3},$$

was mit der ersten Gleichung (146) übereinstimmt usw.

Die gesamte Energie hat den konstanten Wert E, und dies ist die zehnte Integrationskonstante, die durch Einsetzen der Anfangsdaten bestimmt werden kann. Es bleiben also noch zwei Konstanten übrig, deren Bestimmung durch spezielle Methoden zu geschehen hat.

Wir schicken uns nun zur Integration der noch übrig gebliebenen Gleichungen (152) und (153) an. Zunächst wollen wir unser Koordinatensystem, von dem bisher nur der Anfangspunkt und die z-Achse festgelegt sind, etwas näher erläutern: die x- und y-Richtungen sind ja noch nicht bestimmt, sondern es war nur verlangt, daß sie in der invariabeln Ebene liegen sollen. Wir machen dies so, daß wir vom Koordinatenanfangspunkte aus eine in der invariabeln Ebene liegende Gerade nach einem beliebigen Fixstern ziehen, die wir als x-Achse nehmen; die durch den Koordinatenanfangspunkt in dieser Ebene dazu gezogene Senkrechte ist dann die y-Achse. Diese Wahl des Koordinatensystems rechtfertigt sich durch Übereinstimmung der Resultate mit der Erfahrung.

Es sei nun die Papierebene die xy-Ebene (Fig. 67).

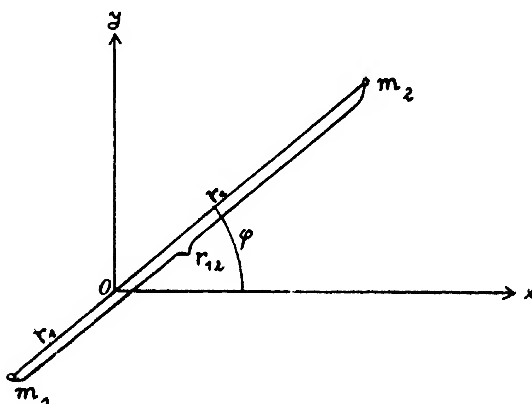


Fig. 67.

Die Verbindungslinie der beiden Massen m_1 und m_2 enthält den Schwerpunkt, geht also stets durch den Koordinatenanfangspunkt hindurch. Wir bezeichnen die absoluten Abstände derselben von O mit r_1 bzw. r_2. Dann ist einmal:

(155) $$r_{12} = r_1 + r_2$$

und anderseits nach Definition des Schwerpunktes, wenn man beachtet, daß r_1 und r_2 hier nach ihrem absoluten Betrage gerechnet werden sollen:

(156) $$m_1 r_1 = m_2 r_2.$$

Die beiden Relationen (155) und (156) bleiben während der ganzen Dauer der Bewegung bestehen; der Koordinatenanfangspunkt teilt den Abstand der beiden Massen stets in dem konstanten Verhältnis $\frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1}$. Bezeichnen wir den Winkel, den r_2 mit der positiven x-Achse bildet, durch φ, so kann Gleichung (152) durch r_{12} und φ bzw. durch r_1, r_2, φ ausgedrückt werden, denn man hat ja aus Fig. 67 sofort:

$$x_2 = r_2 \cos\varphi, \qquad x_1 = r_1 \cos\varphi,$$
$$y_2 = r_2 \sin\varphi, \qquad y_1 = r_1 \sin\varphi,$$

und durch Einsetzen in (152) folgt:

(157) $$(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2)\frac{d\varphi}{dt} = C.$$

Wenn man hier r_1 und r_2 nach (155) und (156) durch r_{12} ausdrückt, so folgt durch elementare Rechnung:

(158) $$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r_{12}^2 \frac{d\varphi}{dt} = C,$$

oder auch

(159) $$r_{12}^2 \frac{d\varphi}{dt} = C',$$

wenn C' eine andere Konstante bedeutet. Das ist aber offenbar der Flächensatz oder das zweite Keplersche Gesetz: „Die in gleichen Zeiten vom Radiusvektor überstrichenen Flächen sind gleich", das wir im ersten Kapitel ausführlich besprochen haben. Es

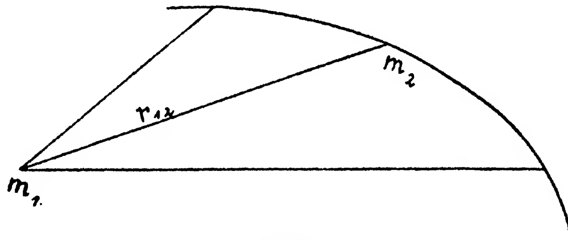


Fig. 68.

ist aber dabei noch ein Unterschied zu beachten. Denn nach der Anschauung Keplers war die Sonne unbeweglich, während wir den gemeinsamen Schwerpunkt als fest angenommen haben. Diese Verschiedenheit der Auffassung kommt in den Figuren 68 und 69 zum Ausdruck, von denen die erste den Keplerschen, die zweite unseren Standpunkt charakterisiert.

Man sieht aus der Gleichung (157) sofort, daß der vom Anfangspunkte O in Fig. 69 nach dem Planeten m_2 gezogene Radiusvektor r_2 in gleichen Zeiten keineswegs gleiche Flächen überstreicht, ebensowenig wie dies der nach der Sonne gezogene Radiusvektor tut. Auch die Summe der beiden Flächen gehorcht nicht dem Keplerschen Gesetze, sondern erst die mit m_1 bzw. m_2 multiplizierten Flächen, wie (157) es fordert. Man kann sich nun aber leicht klar machen, was die Gleichung (159) bedeutet, wenn man sich vergegenwärtigt, was beobachtet wird. Ein auf m_1 befindlicher Beobachter wird m_1 als ruhend betrachten,

und kann nun durch astronomische Beobachtungen die Entfernung r_{12} von m_2 und die Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\varphi}{dt}$ feststellen. Die Bahn von m_2, die er so beobachtet, d. h. unter der Annahme, daß m_1 fest sei, nennen wir die „scheinbare“ Bahn von m_2. Man erhält sie aus Fig. 69 sehr einfach, indem man Om_2 über m_2 hinaus um das Stück Om_1 verlängert; das liefert statt der wahren Bahn $A''\,B''$ die scheinbare Bahn AB. Und nur für diese scheinbare Bahn, die einzige, die durch direkte Beobachtung gewonnen wird, gilt nach (159) der Keplersche Flächensatz in der Tat. Man sieht bereits hier, wie das Newtonsche Attraktionsgesetz eine Korrektur an den Keplerschen Gesetzen anbringt bzw. ihren wahren Sinn erst feststellt.

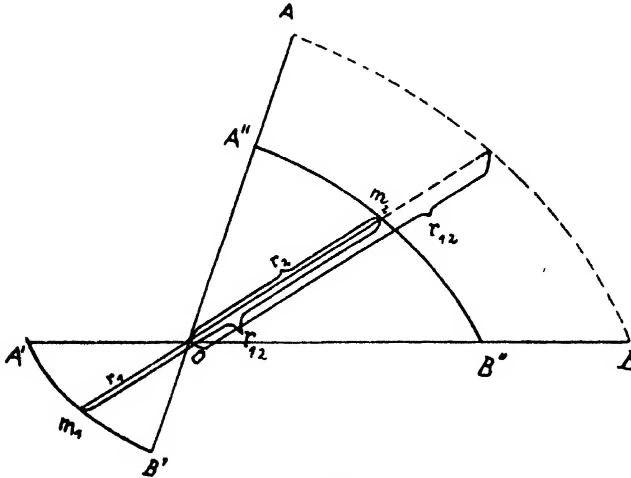


Fig. 69.

Die Gleichung (159) ist nur eine andere Formulierung von (152), nämlich in Polarkoordinaten (r_{12}, φ). Genau dasselbe wollen wir mit der Energiegleichung (153) machen. Die Geschwindigkeit $\mathfrak{c}_1$ z. B. der Sonne hat eine radiale Komponente $\frac{dr}{dt} = \mathfrak{c}_{1r}$ und eine transversale $\mathfrak{c}_{1\varphi} = r_1 \frac{d\varphi}{dt}$, und dasselbe gilt für die Geschwindigkeit $\mathfrak{c}_2$ des Planeten; also gelten die Gleichungen:

$$\mathfrak{c}_1^2 = \left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr_1}{dt}\right)^2 + r_1^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2,$$
$$\mathfrak{c}_2^2 = \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_2}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr_2}{dt}\right)^2 + r_2^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2,$$

also wird die kinetische Energie L:

$$L = \frac{m_1}{2}\left[\left(\frac{d r_1}{d t}\right)^2 + r_1^2\left(\frac{d\varphi}{d t}\right)^2\right] + \frac{m_2}{2}\left[\left(\frac{d r_2}{d t}\right)^2 + r_2^2\left(\frac{d\varphi}{d t}\right)^2\right].$$

Eliminiert man daraus mit Hilfe der Relationen (155) und (156) die Größen r_1 und r_2, indem man sie durch r_{12} ausdrückt, so erhält man leicht:

(160) $$L = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left[\left(\frac{d r_{12}}{d t}\right)^2 + r_{12}^2\left(\frac{d\varphi}{d t}\right)^2\right].$$

Die potentielle Energie Φ hat bereits die passende Form, so daß wir den Energiesatz nunmehr schreiben können:

$$\frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left[\left(\frac{d r_{12}}{d t}\right)^2 + r_{12}^2\left(\frac{d\varphi}{d t}\right)^2\right] - \frac{k m_1 m_2}{r_{12}} = E,$$

oder nach Division mit $\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ etwas bequemer:

(161) $$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{d r_{12}}{d t}\right)^2 + r_{12}^2\left(\frac{d\varphi}{d t}\right)^2\right] - \frac{k(m_1 + m_2)}{r_{12}} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} E = E',$$

wenn E' eine andere, natürlich durch E vollkommen bestimmte Konstante bedeutet.

In den Gleichungen (159) und (161) sind r_{12} und φ als Funktionen von t dargestellt; eliminieren wir aus diesen beiden Gleichungen also die Zeit, so erhalten wir eine Differentialgleichung zwischen r_{12} und φ, die die Bahn in Polarkoordinaten ergeben muß. Aus (159) folgt zunächst:

$$\frac{d\varphi}{d t} = \frac{C'}{r_{12}^2},$$

was in (161) eingesetzt liefert:

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{d r_{12}}{d t}\right)^2 + \frac{C'^2}{r_{12}^2}\right] - \frac{k(m_1 + m_2)}{r_{12}} = E'.$$

Diese Gleichung wollen wir nach $\frac{d r_{12}}{d t}$ auflösen, dann erhalten wir:

(162) $$\frac{d r_{12}}{d t} = \sqrt{2\left\{E' + \frac{k(m_1 + m_2)}{r_{12}}\right\} - \frac{C'^2}{r_{12}^2}}\,.$$

Dabei ist das Plus- oder Minuszeichen der Wurzel zu wählen, je nachdem r_{12} zunimmt oder abnimmt. Dividieren wir diese Gleichung durch Gleichung (159), so folgt die Differentialgleichung zwischen r_{12} und φ:

(163) $$\frac{1}{r_{12}^2}\frac{d r_{12}}{d\varphi} = \sqrt{2\left\{\frac{E'}{C'^2} + \frac{k(m_1 + m_2)}{C'^2 r_{12}}\right\} - \frac{1}{r_{12}^2}}\,.$$

Die linke Seite ist offenbar gleich $-\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r_{12}}\right)$, und wenn man unter der Wurzel den Ausdruck $\frac{k^2(m_1 + m_2)^2}{C'^4}$ addiert und subtrahiert, so kann die Gleichung geschrieben werden:

$$-\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r_{12}}\right) = \sqrt{\frac{2E'}{C'^2} + \frac{k^2(m_1 + m_2)^2}{C'^4} - \left\{\frac{1}{r_{12}} - \frac{k(m_1 + m_2)}{C'^2}\right\}^2}\,.$$

Führt man eine neue Variable σ ein durch die Definition:

(164) $$\sigma = \frac{1}{r_{12}} - \frac{k(m_1 + m_2)}{C'^2},$$

so kann die vorletzte Gleichung offenbar geschrieben werden:

$$-\frac{d\sigma}{d\varphi} = \sqrt{\frac{2E'}{C'^2} + \frac{k^2(m_1 + m_2)^2}{C'^4} - \sigma^2},$$

oder mit der Abkürzung:

(165) $$\frac{2E'}{C'^2} + \frac{k^2(m_1 + m_2)^2}{C'^4} = q^2:$$

$$-\frac{d\sigma}{d\varphi} = \sqrt{q^2 - \sigma^2} = q\sqrt{1 - \left(\frac{\sigma}{q}\right)^2},$$

oder:

$$-\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\sigma}{q}\right) = \sqrt{1 - \left(\frac{\sigma}{q}\right)^2},$$

oder endlich:

$$d\varphi = \frac{-d\left(\frac{\sigma}{q}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{\sigma}{q}\right)^2}},$$

also:

(166) $$\varphi = \arccos\left(\frac{\sigma}{q}\right) + \varphi_0,$$

wo φ_0 eine (die elfte) Integrationskonstante ist. Nach σ aufgelöst ergibt diese Gleichung:

$$\sigma = q\cos(\varphi - \varphi_0),$$

oder indem man nach (164) r_{12} statt σ wieder einführt:

$$\frac{1}{r_{12}} - \frac{k(m_1 + m_2)}{C'^2} = q\cos(\varphi - \varphi_0),$$

was folgenden Wert von r_{12} als Funktion von φ liefert:

$$r_{12} = \frac{\frac{C'^2}{k(m_1 + m_2)}}{1 + \frac{qC'^2}{k(m_1 + m_2)}\cos(\varphi - \varphi_0)},$$

oder endlich, wenn man jetzt die Lage der x-Achse geeignet wählt, so daß $\varphi_0 = 0$ wird, womit diese elfte Integrationskonstante festgelegt wird:

(167) $$r_{12} = \frac{\frac{C'^2}{k(m_1 + m_2)}}{1 + \frac{qC'^2}{k(m_1 + m_2)}\cos\varphi}.$$

Setzt man noch zur Abkürzung:

(168) $$\begin{cases} \frac{C'^2}{k(m_1 + m_2)} = p, \\ \frac{qC'^2}{k(m_1 + m_2)} = e, \end{cases}$$

so geht (167) über in die bekannte Polargleichung der Kegelschnitte:

(169) $$r_{12} = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}.$$

Gleichung (169) stellt, wie oben auseinandergesetzt wurde, die scheinbare Bahn des Planeten dar, die Sonne als ruhend vorausgesetzt. Diese Bahn ist also nach dem Newtonschen Attraktionsgesetz jedenfalls ein Kegelschnitt (Ellipse, Hyperbel, Parabel), umschließt also das erste Keplersche Gesetz als Spezialfall. Für $0 < e < 1$, d. h. falls die numerische Exzentrizität ein positiver echter Bruch ist, stellt (169) bekanntlich eine Ellipse dar. Man sieht, daß aber (169) allgemeiner auch noch die Kometenbahnen darstellt, die Parabeln oder Hyperbeln zu sein scheinen. Wir gehen hierauf nicht näher ein, sondern wollen noch ein Wort über die wahren Bahnen sagen.

Aus den Relationen (155) und (156) folgt unmittelbar:

(170) $$\begin{cases} r_1 = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2} r_{12}, \\ r_2 = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2} r_{12}. \end{cases}$$

Also sind die wahren Bahnen

(171) $$\begin{cases} \text{der Sonne:} & r_1 = \dfrac{\dfrac{m_2}{m_1 + m_2} p}{1 + e\cos\varphi}, \\ \text{der Planeten:} & r_2 = \dfrac{\dfrac{m_2}{m_1 + m_2} p}{1 + e\cos\varphi}, \end{cases}$$

d. h. Sonne und Planet beschreiben ähnliche Ellipsen, deren einer gemeinsamer Brennpunkt der gemeinschaftliche Schwerpunkt ist.

Was sagt nun das Newtonsche Attraktionsgesetz über das dritte Keplersche Gesetz aus? Wir haben bis jetzt aus dem Newtonschen Gesetz das erste Keplersche Gesetz in Gleichung (169) und das zweite in Gleichung (152), beide für die scheinbare Bahn der Planeten geltend, abgeleitet. Diese beiden Daten hatten wir auch bei unserer kinematischen Untersuchung der Keplerschen Gesetze in Nr. 18 im ersten Kapitel; es folgte daraus, wenn wir unsere jetzigen Bezeichnungen beibehalten, das Resultat der Gleichung (95) des ersten Kapitels auf pag. 49:

$$\mathfrak{a}_r = -\frac{C'^2}{p} \cdot \frac{1}{r_{12}^2}.$$

Dabei bedeutete $\mathfrak{a}_r$ die Beschleunigung des Planeten relativ zu der als ruhend vorausgesetzten Sonne. In unserer jetzigen Bezeichnungsweise, die alles auf das im gemeinsamen Schwerpunkte ruhende System bezieht, ist die Beschleunigung des Planeten $\mathfrak{a}_2$, der Sonne $\mathfrak{a}_1$, also die

relative Beschleunigung des Planeten zur Sonne $\mathfrak{a}_2 - \mathfrak{a}_1$. Wir haben also statt der letzten Gleichung:

(172) $$\mathfrak{a}_2 - \mathfrak{a}_1 = -\frac{C'^2}{p}\frac{1}{r_{12}^2}.$$

Diese Beschleunigung kann nach den Gleichungen (143a) und (143b) sofort gebildet werden, indem die erste Gleichung durch m_2, die zweite durch m_1 dividiert und dann die zweite von der ersten subtrahiert wird. So folgt aus (143):

(173) $$\mathfrak{a}_2 - \mathfrak{a}_1 = -k(m_1 + m_2)\frac{1}{r_{12}^2},$$

also weiter aus (172) und (173):

(174) $$\frac{C'^2}{p} = k(m_1 + m_2).$$

Für $\frac{C'^2}{p}$ kann man nun einen anderen Wert bilden, der den im dritten Keplerschen Gesetz vorkommenden Ausdruck

$$\frac{T^2}{a^3} = \left(\frac{\text{Quadrat der Umlaufszeit}}{\text{Kubus der großen Achse}}\right)$$

enthält. Aus dem zweiten Keplerschen Gesetze (152)

$$r_{12}^2\, d\varphi = C'\, dt$$

folgt durch Integration über einen vollen Umlauf:

$$\int_0^{2\pi} r_{12}^2\, d\varphi = 2ab\pi = C'T,$$

also:

$$\frac{4\pi^2 a^3 b^2}{a} = C'^2 T^2.$$

Nun ist aber nach Gleichung (99) des ersten Kapitels auf p. 50:

$$\frac{b^2}{a} = p;$$

also folgt aus der vorletzten Gleichung:

$$4\pi^2 a^3 p = C'^2 T^2,$$

oder:

(175) $$\frac{C'^2}{p} = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2}.$$

Die Kombination mit (174) liefert dann für $\frac{a^3}{T^2}$ den Ausdruck

(176) $$\frac{a^3}{T^2} = \frac{k}{4\pi^2}(m_1 + m_2),$$

und man sieht, daß dieser Wert keine für das Planetensystem konstante Größe ist, da er von der Masse m_2 des gerade betrachteten Planeten abhängt. In Strenge ist also das dritte

Keplersche Gesetz nicht erfüllt. Berücksichtigt man aber, daß die Masse m_1 der Sonne sehr viel größer ist als die aller Planeten, so ist es doch sehr angenähert erfüllt. Für zwei Planeten (Index 2 und 3) folgt für das Verhältnis $\frac{a^3}{T^2}$

$$\left(\frac{a^3}{T^2}\right)_2 : \left(\frac{a^3}{T^2}\right)_3 = \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_3},$$

und das ist ungefähr gleich 1, wenn, wie hier, m_1 außerordentlich groß gegen m_2 und m_3 ist. Setzen wir die Masse der Erde gleich 1, so ist die des größten Planeten Jupiter 314,5, die der Sonne aber 330000. Man erhält so folgende Tabelle für die relativen Werte von $\frac{a^3}{T^2}$ nach Gleichung (176), wobei der Wert für die Erde gleich 1 angenommen ist:

Planet	$\frac{a^3}{T^2}$
Saturn	1,0001
Merkur	1
Venus	1
Erde	1
Mars	1,0006
Jupiter	1,001

Die tatsächlichen Abweichungen sind also unmerklich.

Der gleiche Umstand, nämlich die ungeheuere Masse der Sonne im Vergleich zu der der Planeten, bewirkt nun auch, daß die Sonne praktisch als ruhend aufgefaßt werden kann. Denn nach Gleichung (156) ist der Abstand r_1 des gemeinschaftlichen Schwerpunktes Sonne—Erde vom Sonnenzentrum

$$r_1 = \frac{m_2}{m_1} r_2,$$

also nach den obigen Zahlen $= \frac{1}{330000} r_2$, oder angenähert auch

$$r_1 = \frac{1}{330000} r_{12}.$$

Nimmt man die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne zu $r_{12} = 149 \cdot 10^6$ km an, so folgt für r_1 der Wert 451 km. Nun ist aber der Halbmesser der Sonne $1391 \cdot 10^3$ km, d. h. der gemeinschaftliche Schwerpunkt des Systems Sonne—Erde liegt in der Sonne selbst, sehr nahe ihrem Mittelpunkte. Dies gilt auch noch für den Schwerpunkt des ganzen Planetensystems; auch er liegt noch in der Sonne, so daß man annähernd die Sonne statt des gemeinschaftlichen Schwerpunktes als ruhend annehmen kann. Wir kommen darauf in der nächsten Nummer noch einmal zurück und bemerken hier nur, daß dies die Rechtfertigung des heliozentrischen Standpunktes ist.

In Wirklichkeit sind die Planetenbahnen keine strengen Ellipsen, wie dies aus dem Zweikörperproblem folgt, sondern diese Bahnen werden gestört durch die von den übrigen Planeten auf den betreffenden ausgeübten Anziehungskräfte, die aber gegenüber der Anziehung der Sonne klein sind und daher als „Störungen" bezeichnet werden. Wie schon erwähnt, ist die Lösung des allgemeinen Problemes der n-Körper bisher nicht gelungen, so daß man die Störung der Bahnen nur durch sukzessive Annäherung berechnen kann. Darin liegt nun im Grunde der größte Triumph des Newtonschen Gravitationsgesetzes, daß man mit seiner Hilfe die Störungen rechnerisch feststellen und dadurch fast alle Abweichungen zwischen Beobachtung und Theorie erklären kann.

63. Das Fundamentalsystem der Mechanik.

Hier ist jetzt der Platz, um festzustellen, was sich auf Grund der Erfahrung über das Fundamentalsystem bzw. über die empirische Festlegung eines Systems aussagen läßt, das wenigstens praktisch den Anforderungen eines Fundamentalsystems genügt.

Zunächst ergibt die Erfahrung, daß für kurz dauernde Versuche ein mit der Erde starr verbundenes System, etwa mit dem Koordinatenanfangspunkte im Mittelpunkte und der Erdachse als z-Achse, brauchbar ist. In dieser Lage befand sich z. B. Galilei bei seinen Fallversuchen, und man kann es nur als eine glückliche Fügung für die Entwicklung der Mechanik betrachten, daß seine Versuche nicht genau genug waren und sein konnten, um ihn erkennen zu lassen, daß das von ihm benutzte Koordinatensystem streng genommen nicht benutzt werden durfte.

Der Foucaultsche Pendelversuch zeigt, daß das obige in der Erde fest verankerte System sich in ca. 24 Stunden um die Erdachse relativ zum Fundamentalsystem drehen muß. Anderseits macht ersteres System, nach der Definition der Sekunde, relativ zum Fixsternhimmel eine Umdrehung um die Erdachse in 86164 Sekunden. Diese Rotationsdauer kann in Anbetracht der Fehlergrenze von 7 Minuten beim Foucaultschen Pendelversuch als identisch mit der obigen Zahl von 24 Stunden angesehen werden. Es zwingt demnach dieser Versuch dazu, statt des in der Erde verankerten Systems ein solches zu nehmen, dessen z-Achse etwa die Erdachse ist und dessen xy-Ebene durch den Erdmittelpunkt und den Fixsternhimmel festgelegt sind. Die Annahme dieses Systems sagt also aus: Nicht der Fixsternhimmel rotiert um die Erdachse, wie der naive Mensch auf Grund der Beobachtung schließt, sondern die Erde.

Beiden bisher betrachteten Systemen ist aber gemeinsam der Koordinatenanfangspunkt, der absolut ruhen muß, d. h. beide Systeme stimmen in der Annahme überein, daß der Erdmittelpunkt relativ zum Fundamentalsystem, d. h. absolut, in Ruhe ist. Dieser Annahme, die auf Grund des Foucaultschen Pendelversuches noch

zulässig erscheint, wird aber widersprochen durch die Theorie der Planetenbewegung. Schon in ihrer einfachsten Form, dem Problem der zwei Körper, liefert sie das Resultat, daß der Erdmittelpunkt sich im Laufe eines Jahres auf einer krummlinigen Bahn, d. h. mit Beschleunigung um den gemeinsamen Schwerpunkt von Sonne und Erde bewegt. Es ist daher das vorhin benutzte System jedenfalls in einer beschleunigten Bewegung gegen das Fundamentalsystem begriffen, es kann also selbst kein Fundamentalsystem sein. Die Theorie der Planetenbewegung liefert nun aber ein Mittel, ein Koordinatensystem zu bestimmen, das dem Fundamentalsystem näher kommt. Beschränken wir uns zunächst auf das System Sonne—Erde, so ist die Ebene der Erdbahn identisch mit der invariabeln Ebene dieses Systems. Die Ebene der Erdbahn ruht also gegen das Fundamentalsystem. Dieser Satz ist soweit richtig, als es gestattet ist, das System Sonne—Erde als ein freies zu betrachten, was tatsächlich bereits für manche astronomischen Zwecke und für alle terrestrischen Versuche der Fall ist. Dann würden wir also folgendes System benutzen können: Die Ebene der Erdbahn nehmen wir als xy-Ebene; als Koordinatenanfangspunkt den wegen der großen Masse der Sonne ungefähr mit dem gemeinsamen Schwerpunkt von Sonne—Erde zusammenfallenden Sonnenmittelpunkt; als z-Achse wird dann die Normale auf der Bahnebene genommen und die Richtung der x-Achse etwa durch eine Gerade vom Sonnenmittelpunkt nach einem Fixstern bestimmt, womit alles festgelegt ist.

Noch genauer wäre ein System, bei dem als xy-Ebene nicht die Ebene der Erdbahn, sondern die invariable Ebene des ganzen Planetensystems genommen wäre. Aber das vorhin besprochene einfachere System genügt für alle irdischen Versuche.

64. Das Potential eines Systems gravitierender Massenpunkte.

Zum Schlusse des Kapitels wollen wir noch einen wichtigen Begriff einführen, der aufs engste mit dem der potentiellen Energie und dem der Arbeit verknüpft ist. Wir denken uns zunächst ein möglichst einfaches System, aus zwei Massenpunkten bestehend; der eine im festen Raumpunkte (x_1, y_1, z_1) habe die Masse m_1, der andere im variabeln Raumpunkte (x, y, z) habe die Masse 1. Diesen variabeln Punkt nennt man den Aufpunkt. Wir setzen voraus, daß die beiden Massen nach dem Attraktionsgesetze aufeinander einwirken, und zwar wollen wir speziell die Kraftwirkung auf die Einheitsmasse im Aufpunkte ins Auge fassen. Nennen wir die auf sie wirkende Kraft $\mathfrak{K}_1$, so haben wir offenbar, wenn r_1 die Entfernung der beiden Massen ist:

$$\mathfrak{K}_1 = -\frac{k m_1}{r_1^2}, \tag{177}$$

und für die Komponenten X_1, Y_1, Z_1 derselben folgt:

(178)
$$\begin{cases} X_1 = -\frac{k\,m_1}{r_1^2}\cos(r_1\,x), \\ Y_1 = -\frac{k\,m_1}{r_1^2}\cos(r_1\,y), \\ Z_1 = -\frac{k\,m_1}{r_1^2}\cos(r_1\,z). \end{cases}$$

Nun ist aber

$$\cos(r_1\,x) = \frac{x - x_1}{r_1} = +\frac{\partial r_1}{\partial x}; \quad \cos(r_1\,y) = \frac{y - y_1}{r_1} = \frac{\partial r_1}{\partial y};$$
$$\cos(r_1\,z) = \frac{z - z_1}{r_1} = \frac{\partial r_1}{\partial z}.$$

Also kann man — was ja schon aus der Voraussetzung, daß die Kräfte konservativ sind, hervorgeht — die Kraftkomponenten schreiben:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k\,m_1}{r_1}\right); \quad Y_1 = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{k\,m_1}{r_1}\right); \quad Z_1 = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{k\,m_1}{r_1}\right),$$

also hätten wir als Kräftefunktion $\Phi_1\,(x\,y\,z)$ zu bezeichnen den Ausdruck:

(179)
$$\Phi_1\,(x\,y\,z) = -\frac{k\,m_1}{r_1}.$$

Man nennt nun die Kräftefunktion in dem Falle, daß der variable Massenpunkt die Masse 1 hat, das **Potential des festen Massenpunktes** m_1 **im Punkte** (x, y, z) oder kurz **das Potential des Massenpunktes** m_1.

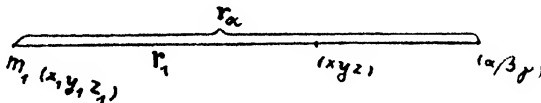


Fig. 70.

Wir wollen nun die Einheitsmasse mit dem Aufpunkt sich bewegen, d. h. x, y, z alle möglichen Werte annehmen lassen, jedoch so, daß (x, y, z) nicht mit (x_1, y_1, z_1) zusammenfällt; denn in diesem Falle würde ja r_1 gleich Null, also Φ_1 unendlich werden, und die Betrachtung verlöre ihren Sinn. Dann können wir also in jedem einzelnen Punkte den Wert angeben, den die Funktion hat, wodurch das Potential in allen Punkten des Raumes mit alleiniger Ausnahme von (x_1, y_1, z_1) vollkommen bestimmt ist; man erkennt aus dieser letzten Bemerkung insbesondere, daß Φ_1 eine skalare Funktion ist, was übrigens schon aus ihrem Charakter als spezielle Kräftefunktion hervorgeht. Man kann Φ_1 leicht mit dem Arbeitsbegriff in Verbindung bringen. Wir wollen z. B. die Arbeit berechnen (Fig. 70), die notwendig ist, um die Einheitsmasse vom Raumpunkte (α, β, γ) in der Entfernung r_a von m_1 in den Raumpunkt (x, y, z) in der

Entfernung r_1 von m_1 zu bringen. Da die Kraft nach (177) in der Entfernung r den Wert $-\frac{k m_1}{r_1^2}$ hat, so ist die bei einer unendlich kleinen Verschiebung $-dr$ geleistete Arbeit $\frac{k m_1 dr}{r^2}$; das Minuszeichen bei dr rührt daher, daß r bei der Verschiebung von (α, β, γ) nach (x, y, z) verkleinert wird. Also ist die gesamte Arbeit, die während der Verschiebung von (α, β, γ) nach (x, y, z) geleistet wird:

$$A = k m_1 \int_{r_a}^{r_1} \frac{dr}{r^2} = \left(-\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_a}\right) k m_1 . \tag{180}$$

Lassen wir den Punkt (α, β, γ) ins Unendliche rücken, d. h. $r_a = \infty$ werden, so wird schließlich nach (180) und (179):

$$A_\infty = -\frac{k m_1}{r_1} = \Phi_1 (x y z), \tag{181}$$

d. h. der Wert des Potentials im Punkte (x, y, z) ist gleich der Arbeit, die geleistet werden muß, um die Einheitsmasse aus dem Unendlichen an die Stelle (x, y, z) zu bringen.

Wenn wir nicht einen festen Massenpunkt m_1 im Punkte (x_1, y_1, z_1) haben, sondern mehrere, von denen wir einen beliebigen durch den Index λ charakterisieren, so würde jedem von ihnen, wenn er allein wäre, ein Potential Φ_λ zukommen; nämlich, wenn die Abstände der Punkte $(x_2 y_2 z_2) \ldots (x_\lambda y_\lambda z_\lambda) \ldots$ vom Aufpunkte $(x y z)$ durch $r_2 \ldots r_\lambda \ldots$ bezeichnet werden, so ist z. B.:

$$\Phi_2 = -\frac{k m_2}{r_2}, \quad \Phi_3 = -\frac{k m_3}{r_3}, \ldots \quad \Phi_\lambda = -\frac{k m_\lambda}{r_\lambda}, \ldots;$$

und da das Potential eine skalare Funktion ist, so erhalten wir das gesamte Potential Φ der vorhandenen Massenpunkte im Aufpunkte, indem wir die den einzelnen zukommenden Werte addieren; also:

$$\Phi (x y z) = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \ldots \Phi_\lambda + \ldots = -k \sum_\lambda \frac{m_\lambda}{r_\lambda} . \tag{182}$$

In der Tat überzeugt man sich leicht davon, daß die negativen partiellen Ableitungen von Φ nach x, y, z die gesamten Kraftkomponenten auf die Einheitsmasse darstellen. Was für die Koordinatenrichtungen gilt, gilt, wie man leicht zeigen kann, für jede beliebige Richtung s; die negative partielle Ableitung $-\frac{\partial \Phi}{\partial s}$ stellt die Kraftkomponente $\mathfrak{K}_s$ in der Richtung von s dar:

$$\mathfrak{K}_s = -\frac{\partial \Phi}{\partial s}. \tag{183}$$

Ferner sieht man leicht, daß Φ eine eindeutige und mit Ausnahme der Punkte $(x_\lambda y_\lambda z_\lambda)$ stetige Funktion ist; nur in diesen letzteren Punkten würde sie unendlich werden.

Wir wollen nun zwei Punkte (α) und (β) (Figur 71) annehmen und durch einen beliebigen Kurvenzug s verbinden. Dann führen wir die

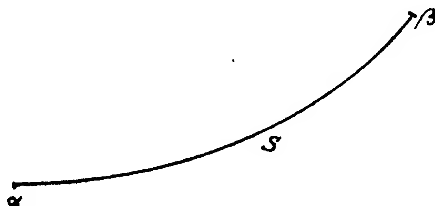


Fig. 71.

Einheitsmasse vom Punkte (α) nach (β). Nennen wir die Kraftkomponente parallel der Kurve $\mathfrak{K}_s$, so ist die Arbeit $A_{\alpha\beta}$ längs des Weges s

$$A_{\alpha\beta} = \int_\alpha^\beta (\mathfrak{K}_s \cdot d\mathfrak{s}),$$

oder nach (183):

$$A_{\alpha\beta} = -\int_\alpha^\beta \frac{\partial \Phi}{\partial s} ds, \tag{184}$$

also, da das Integral sofort sich angeben läßt:

$$A_{\alpha\beta} = -(\Phi_\alpha - \Phi_\beta), \tag{185}$$

woraus hervorgeht, daß die Arbeit, wenn die Kräfte ein Potential haben, nicht vom Wege, sondern nur vom Anfangs- und Endpunkte abhängt. Lassen wir speziell den Punkt β mit α zusammenfallen, mit anderen Worten: beschreiben wir eine geschlossene Kurve s (Fig. 72), die in einer bestimmten Richtung (etwa der Pfeilrichtung in Fig. 72), von der Einheitsmasse durchlaufen wird, so ist wegen der Eindeutigkeit und Stetigkeit von Φ nach (185) die längs der geschlossenen Kurve geleistete Arbeit:

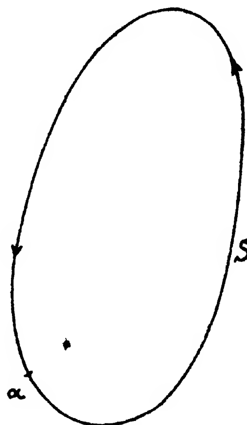


Fig. 72.

$$\underset{\mathfrak{S}}{A} = \int_{\mathfrak{S}} \frac{\partial \Phi}{\partial s} ds = 0, \tag{186}$$

d. h. also: wenn die Kräfte ein Potential besitzen, kann durch Herumführen von Massen auf geschlossenen Kurven niemals Arbeit gewonnen werden; die positiven Anteile des Integrals (186) werden gerade durch die negativen kompensiert. Natürlich ist bei der obigen Betrachtung vorausgesetzt, daß keiner der Punkte

$(x_\lambda\, y_\lambda\, z_\lambda)$ auf der Kurve s liegt, denn dann würde in diesem Punkte die Funktion nicht endlich sein.

Den Raum, innerhalb dessen sich gewisse Kräfte bemerkbar machen, nennt man das „Feld" dieser Kräfte; in diesem Sinne sprechen wir z. B. vom „Schwerefeld" der Erde oder auch kurz vom „Erdfelde". Jedem Punkte dieses Feldes entspricht ein bestimmter Betrag und eine bestimmte Richtung der Kraft, wie allgemein jedem Punkte eines Kraftfeldes; statt Kraftfeld werden wir auch häufig, um es allgemein zu charakterisieren, „Vektorfeld" sagen, da die Kraft ein Vektor ist. Umgekehrt kann man auch von „skalaren Feldern" sprechen, indem man jedem Punkte des Feldes einen bestimmten Wert einer skalaren Funktion zuordnet, wie z. B. das Potential es ist. Wir können z. B. das Erdfeld auch als das skalare Feld des „Schwerepotentials" oder „Gravitationspotentials" auffassen, also dem vektoriellen Schwerkraftfelde ein skalares Feld zuordnen. Die skalaren Felder sind im allgemeinen einfacher als die Vektorfelder, und darauf beruht die Bedeutung der Zuordnung eines Skalarfeldes zu einem Vektorfelde.

Wir wollen nun ein solches Feld untersuchen. Zu diesem Zwecke fragen wir nach der geometrischen Bedeutung der Gleichung:

$$\Phi(x,\, y,\, z) = C. \tag{187}$$

Diese Gleichung stellt offenbar eine Oberfläche dar mit der Eigenschaft, daß auf ihr das Potential einen konstanten Wert C hat. Solche Flächen heißen „Äquipotentialflächen" oder „Niveauflächen". Im Falle des Erdfeldes z. B. ist das Potential gz, also die Niveauflächen sind horizontale Ebenen.

Es ist nun leicht zu zeigen, daß in jedem Punkte der Niveauflächen die dort wirkende Kraft senkrecht zu ihr, also parallel der Flächennormale gerichtet ist. Denn einerseits sind die Richtungskosinusse der Flächennormale einer Fläche $\Phi = \text{const}$ proportional den Größen $\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z}$, und anderseits sind die Kraftkomponenten X, Y, Z eben diesen Ausdrücken proportional, womit die Behauptung bewiesen ist. Parallel der Tangentialebene der Niveaufläche ist also die Kraftkomponente gleich Null; es kostet daher keine Arbeit, einen Massenpunkt auf einer Niveaufläche zu verschieben.

Wir wollen uns nun in ein gegebenes Feld die Niveauflächen eingezeichnet denken, und zwar derart, daß wir, von einem konstanten Werte C_0 des Potentials ausgehend, zu anderen Werten der Konstanten, $C_1, C_2, C_3 \ldots$ fortschreiten. Jede Konstante soll um ein bestimmtes Stück Δ größer sein als die vorhergehende; also z. B. $C_3 - C_2 = C_4 - C_3 \cdots = \Delta$. Diese Niveauflächen können sich nie schneiden, sondern umhüllen sich gegenseitig. Denn hätten wir eine Schnittlinie (Fig. 78) zweier benachbarter Niveauflächen, die in der Figur zu einem Schnittpunkte verkürzt ist, so hätten wir in jedem Punkte der Schnittlinie zwei Normalen-

richtungen, also zwei Kraftrichtungen in einem Punkte, was unmöglich ist. Denken wir uns in der beschriebenen Weise die Äquipotentialflächen $\Phi = \text{Const.}$ konstruiert (Fig. 74), so können wir aus dieser

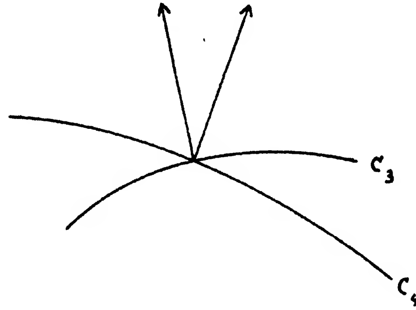


Fig. 73.

Konstruktion an jeder Stelle des Raumes die Größe und Richtung der Kraft bestimmen. Nach dem Vorhergehenden ist es selbstverständlich, da die Kraft normal auf der Niveaufläche steht, daß die Kraftrichtung aus den Niveauflächen abgelesen werden kann; aber auch ihr Betrag kann unmittelbar vermittels Gleichung (183) bestimmt werden. Denn nehmen wir in (183) $\partial \Phi$ gleich Δ, der konstanten

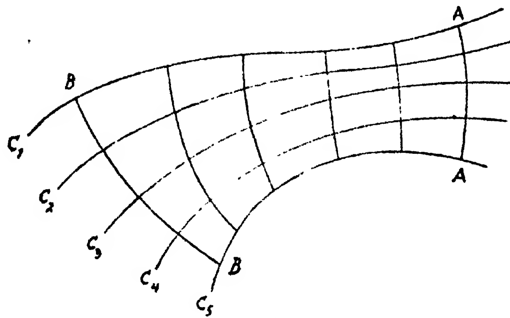


Fig. 74.

Potentialdifferenz zweier benachbarter Niveauflächen, und bezeichnen wir durch d den Abstand derselben, so geht $\frac{\partial \Phi}{\partial s}$ in $\frac{\Delta}{d}$ über; also ist der Betrag der Kraft gleich der Potentialdifferenz zweier aufeinanderfolgenden Niveauflächen, dividiert durch den Abstand derselben. Hält man, wie im vorhergehenden, Δ konstant, so ist der Betrag der Kraft umgekehrt propor-

tional d, dem Abstande der Niveauflächen. In Fig. 74 ist also prima vista zu erkennen, daß bei A die Kraft größer ist als bei B usw.

Man kann die Fig. 74 noch dadurch ergänzen, daß man, von einem beliebigen Punkte einer Niveaufläche anfangend, eine Kurve zieht, die alle Niveauflächen senkrecht durchschneidet. Diese Konstruktion führt man für alle Punkte einer Niveaufläche durch. Die so erhaltenen Kurven, die sogenannten orthogonalen Trajektorien, heißen „Kraftlinien“, weil die Richtung jeder Kurve in jedem Punkte mit der Kraftrichtung übereinstimmt. Mehrere solcher Kraftlinien sind in der Fig. 74 gezeichnet. Ein Kurvenelement ds der Kraftlinie habe die Komponenten dx, dy, dz; diesen drei Werten sind die Richtungskosinusse des Kurvenelementes ds proportional, und da die Kraftkomponenten XYZ dieselbe Richtung haben sollen, so ergibt sich als Gleichung der Kraftlinie:

$$X : Y : Z = dx : dy : dz. \tag{188}$$

Diese Art der Darstellung der räumlichen Anordnung von Kräften durch ein Skalarfeld oder ein Vektorfeld, d. h. durch Äquipotentialflächen oder Kraftlinien, hat besondere Bedeutung für die Elektrizitätslehre.

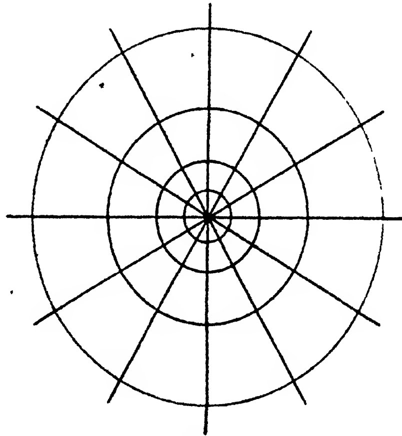


Fig. 75.

Wir kommen darauf im zweiten Bande zurück. Hier wollen wir nur den ganz einfachen Fall betrachten, daß eine Masse m_1 vorhanden ist. Dann ist nach (179):

$$\Phi = -\frac{k m_1}{r_1},$$

und die Äquipotentialflächen $\frac{k m_1}{r_1} = \text{Const.}$ sind offenbar Kugelflächen, die konzentrisch um m_1 geschlagen sind, und die Kraftlinien gehen folglich radial vom Zentrum nach allen Seiten aus (Fig. 75).

Das Potential selbst, Φ, gehorcht einer partiellen Differentialgleichung, die von **Laplace** aufgestellt und nach ihm benannt ist. Wenn wir nämlich die Gleichung (182) $\Phi = -k \sum_\lambda \frac{m_\lambda}{r_\lambda}$ je zweimal nach x, nach y und z differentiieren, so erhalten wir nacheinander folgendes:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \sum \frac{k m_\lambda}{r_\lambda^2} \frac{\partial r_\lambda}{\partial x} = \sum \frac{k m_\lambda}{r_\lambda^3}(x - x_\lambda),$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \sum \frac{k m_\lambda}{r_\lambda^3} - \sum \frac{3 k m_\lambda}{r_\lambda^5}(x - x_\lambda)^2;$$

ferner:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \sum \frac{k m_\lambda}{r_\lambda^3} - \sum \frac{3 k m_\lambda}{r_\lambda^5}(y - y_\lambda)^2;$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \sum \frac{k m_\lambda}{r_\lambda^3} - \sum \frac{3 k m_\lambda}{r_\lambda^5}(z - z_\lambda)^2;$$

und durch Addition der drei letzten Gleichungen folgt sofort die „Laplacesche Differentialgleichung“:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0. \tag{189}$$

Dieser Gleichung gehorcht das Potential in allen Punkten des Raumes, mit Ausnahme derjenigen, wo die Massenpunkte m_λ liegen. Denn in jedem solchen Punkte ist das Potential unendlich. Welche Gleichung in diesen Raumpunkten gilt, kann man überhaupt nicht beurteilen, solange man an der Fiktion punktförmig, d. h. diskontinuierlich verteilter Materie festhält; dazu ist vielmehr notwendig, die Materie selbst in den kleinsten Massenelementen als kontinuierlich zu betrachten, worauf wir später eingehen werden.

Zweites Buch.

Mechanik starrer Körper.

Sechstes Kapitel.

Kinematik starrer Körper.

65. Verschiebung eines starren Körpers; Translation und Rotation; Freiheitsgrade des starren Körpers.

Unter einem starren Körper verstehen wir, wie bereits in Nr. 3 definiert worden ist, ein System materieller Punkte mit der besonderen Eigenschaft, daß die Entfernung je zweier materieller Punkte dieses Systems konstant ist. Bedeuten $(x_\lambda, y_\lambda, z_\lambda)$ und (x_μ, y_μ, z_μ) zwei solche substantielle Punkte des starren Körpers und $r_{\lambda\mu}$ ihre Entfernung voneinander, so muß stets für alle möglichen Werte der Indizes λ und μ sein:

$$(1)\qquad \sqrt{(x_\lambda - x_\mu)^2 + (y_\lambda - y_\mu)^2 + (z_\lambda - z_\mu)^2} = r_{\lambda\mu} = \text{Const.},$$

wobei unter der Quadratwurzel stets ihr positiver Wert zu verstehen ist. Ein starrer Körper ist also ein spezielles System materieller Punkte, und die Mechanik starrer Körper daher eigentlich ein Teil der speziellen Mechanik von Punktsystemen. Allein dieser Teil ist so wichtig, und die Bewegung des starren Körpers zeigt so viele allgemeine Charaktere, daß es üblich geworden ist, die Mechanik starrer Körper als ein Ganzes und für sich Dastehendes der Mechanik substantieller Punkte an die Seite zu stellen, selbstverständlich unter Benutzung aller aus jenem früheren Teile gewonnenen Resultate.

Wir beschäftigen uns zunächst mit den geometrischen Eigenschaften der Bewegung starrer Körper, d. h. also, mit der Kinematik starrer Körper.

Die einzig mögliche Veränderung eines starren Körpers — stets natürlich unter Erfüllung der Relationen (1) — ist die Veränderung der Lage seiner Massenpunkte, oder, wie wir kurz sagen können, die Veränderung der „Lage des starren Körpers" relativ zu anderen Körpern. Die Lagenänderung eines starren Körpers, etwa aus der

Lage (1) nach der Lage (2), nennt man eine „Verschiebung" desselben von (1) nach (2).

Man kann leicht spezielle Verschiebungen angeben, die in evidenter Weise mit der Bedingung (1) verträglich sind, und die wegen ihrer Wichtigkeit durch besondere Namen ausgezeichnet worden sind; diese haben wir schon früher kennen gelernt und benutzt, stellen sie aber jetzt der Vollständigkeit halber noch einmal mit genauer Definition zusammen. Offenbar sind die Relationen (1) dann erfüllt, wenn die Koordinaten jedes Punktes dieselbe Veränderung erleiden, wenn also etwa (x, y, z) übergeht in $(x+a,\ y+b,\ z+c)$, wo die a, b, c feste Größen darstellen, d. h. solche, die für alle Punkte des starren Körpers denselben Wert haben. Ist vor der Verschiebung die Lage eines beliebigen Punktes durch (x, y, z) charakterisiert, nach derselben durch (x', y', z'), so muß für die betrachtete spezielle Verschiebung offenbar sein:

$$(2) \qquad \begin{cases} x' = x + a\,, \\ y' = y + b\,, \\ z' = z + c\,. \end{cases}$$

Jeder Punkt des starren Körpers verschiebt sich also **geradlinig** um das Stück

$$(3) \qquad l = +\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\,;$$

und diese geraden Strecken sind für alle Punkte einander parallel, da ihre Richtungskosinusse sich wie $a:b:c$ verhalten.

Die hier betrachtete Verschiebung ist also dadurch charakterisiert, daß **die geraden Linien, die jeder Punkt von der Anfangslage zur Endlage beschreibt, einander parallel und von gleicher Länge sind. Eine solche Verschiebung ändert also mit anderen Worten die Orientierung des starren Körpers im Raume, d. h. relativ zu einem im Raume festen Koordinatensystem, nicht**; wir nennen sie eine „**Translation**".

Man erkennt leicht die Richtigkeit folgender einfacher Sätze: Werden einem starren Körper gleichzeitig oder nacheinander zwei Translationen erteilt, so ist das Resultat **unabhängig** von der Reihenfolge der Translationen und kann auch durch eine einzige Translation erreicht werden, die man die „resultierende Translation" nennt. Wir können jede Translation ferner vollständig charakterisieren durch eine gerichtete Strecke, die von der Anfangslage eines Punktes des starren Körpers nach seiner Endlage weist, und deren Länge gleich dem Abstand von Anfangslage bis Endlage, d. h. gleich der Verschiebung des Punktes ist. Dann sieht man leicht, daß die resultierende Translation die Vektorsumme der beiden primären ist. **Die Translation ist also ein Vektor.** Wir können denselben in jedem beliebigen Punkte des starren Körpers anbringen, da bei dieser Verschiebung alle Punkte gleichberechtigt sind, oder anders ausgedrückt: **der Translations-**

vektor kann in dem starren Körper beliebig verschoben werden. Wir nennen ihn deshalb einen „freien Vektor", zum Unterschiede von solchen, denen diese freie Verschiebbarkeit gar nicht oder nur mit Beschränkungen zukommt.

Eine zweite mit den Bedingungen (1) verträgliche Verschiebung ist die folgende: Die Lagenänderung des starren Körpers sei derart, daß während derselben alle Punkte einer bestimmten Geraden L ihre Lage unverändert behalten. Dann besteht die Bewegung aller nicht auf dieser Geraden gelegenen Punkte offenbar darin, daß sie Stücke von Kreisen in zu dieser Geraden senkrechten Ebenen beschreiben. Die Mittelpunkte dieser Kreise liegen sämtlich auf der Geraden L und ihre Radien sind respektive gleich den Abständen dieser Punkte von L. Dabei bleiben offenbar die relativen Entfernungen je zweier Punkte des starren Körpers unverändert, (1) ist also erfüllt. Diese mögliche Bewegung nennt man eine „Rotation um die Gerade L", diese selbst die „Rotationsachse".

Eine dritte mögliche Verschiebung ist die folgende: Während der Bewegung bleibt ein Punkt P des Körpers in Ruhe; dann müssen sich alle übrigen Punkte auf konzentrischen Kugelflächen um P bewegen, deren Radien gleich den verschiedenen Abständen der Punkte von P sind; diese Bewegung heißt „Rotation um den Punkt P", und P selbst das „Rotationszentrum". Eine Rotation um einen Punkt kann stets, wie wir später sehen werden, auf eine Rotation um eine durch den festen Punkt gehende Achse zurückgeführt werden.

Wir wollen hier noch die Frage erörtern, wieviel Freiheitsgrade ein freibeweglicher starrer Körper hat. Um diese Frage zu entscheiden, befestigen wir in einem Punkte desselben ein rechtwinkeliges Koordinatensystem (ξ, η, ζ), dessen Achsen im Körper festliegen, sich also bei der Bewegung desselben relativ zum Fundamentalsystem mitbewegen. Wir nennen kurz (ξ, η, ζ) das „bewegliche System" und, im Gegensatz dazu, das System (x, y, z) das „feste System", da es im Raume, d. h. relativ zum Fundamentalsystem festliegt. O' sei der im Körper feste Anfangspunkt des ersteren, O der im Raume feste Anfangspunkt des letzteren. Die Lage des starren Körpers gegen das feste System ist also bestimmt, wenn die Lage des beweglichen Systems gegen das feste bestimmt ist. Dazu gehört aber die Kenntnis des Koordinatenanfangspunktes O' und der Richtungen der ξ-, η-, ζ-Achsen, die durch ihre 9 Richtungskosinusse gegeben sind. Zwischen diesen bestehen aber 6 Relationen, so daß diese 9 Richtungskosinusse 3 unabhängigen Daten äquivalent sind, und da auch der Koordinatenanfangspunkt O' durch 3 Koordinaten festgelegt ist, so besitzt ein vollkommen frei beweglicher starrer Körper 6 Freiheitsgrade, während ein in einem Punkte festgehaltener starrer Körper nur noch 3 Freiheitsgrade, und ein starrer Körper, von dem eine Gerade, d. h. zwei Punkte festliegen, nur noch einen Frei-

heitsgrad besitzt. Ist der starre Körper eben, und werden nur Bewegungen in dieser seiner Ebene zugelassen, so hat er offenbar 3 Freiheitsgrade, 2 zur Festlegung des Anfangspunktes des beweglichen $(\xi\,\eta)$-Systems, einen zur Bestimmung der Achsenrichtungen dieses Systems gegen das feste $(x\,y)$-System.

Die Bewegung eines starren Körpers ist im allgemeinen sehr kompliziert, und wir wollen daher zunächst möglichst einfache Fälle betrachten und dann allmählich zu verwickelteren fortschreiten. Wir behandeln deshalb zunächst Bewegungen ebener starrer Körper in ihrer Ebene.

66. Allgemeinste ebene Bewegung eines starren Körpers.

Ein beliebiger starrer ebener Körper erleide eine irgendwie geartete Verschiebung, die wir dadurch charakterisieren können, daß wir die Anfangs- und Endlagen zweier beliebiger Punkte desselben angeben; die Anfangslage sei durch die Raumpunkte A, B, die Endlage durch die Raumpunkte A', B' gegeben (Fig. 76). Zunächst ist es klar, daß

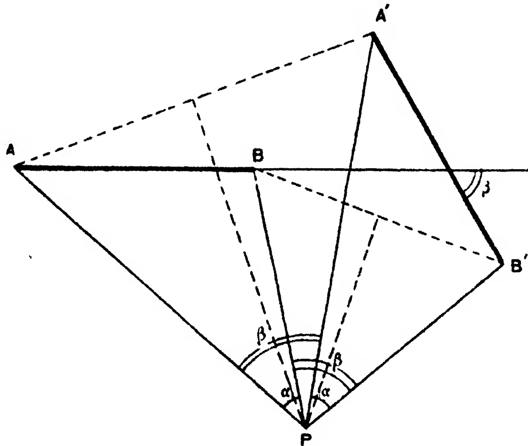


Fig. 76.

durch die Angabe der Lage zweier beliebiger Punkte die Lage des ebenen Körpers vollkommen bestimmt ist. Denn z. B. der Punkt A ist durch zwei Koordinaten charakterisiert, der Punkt B ebenfalls; jedoch kommt davon in Abzug die Bedingungsgleichung (1), der B hinsichtlich A unterworfen ist, so daß die beiden Punkte A, B durch drei Koordinaten charakterisiert werden. So viele Freiheitsgrade hat aber überhaupt nur der ebene starre Körper: er ist also in der Tat durch zwei Punkte vollkommen bestimmt.

Sodann wollen wir folgendes hervorheben: Wir betrachten die Bewegung des Körpers aus der durch (A, B) charakterisierten Lage in die Lage (A', B') nur insofern, als wir Anfangs- und Endlage ins Auge fassen; alle Zwischenlagen ignorieren wir. Nun ist es klar, daß unendlich viele Bewegungen von (A, B) zu (A', B') hinführen, von denen eine die wirkliche Bewegung des Körpers ist. Unser Bestreben geht darauf hinaus, von diesen vielen möglichen Bewegungsformen zwischen (A, B) und (A', B'), eine besonders einfache mögliche zu finden, durch die also, in Rücksicht auf Anfangs- und Endlage, die wirkliche Bewegung ersetzt werden kann. Von einer möglichen Bewegung, die mit einer gegebenen wirklichen Anfangs- und Endlage gemeinsam hat, wollen wir sagen, sie sei der wirklichen Bewegung „äquivalent". Dabei ist wohl verstanden die wirkliche Bewegung im allgemeinen von der äquivalenten sehr verschieden, nur Anfangs- und Endlage fallen zusammen.

Wir wollen nun den Satz beweisen: Jede Verschiebung eines ebenen starren Körpers in seiner Ebene ist äquivalent einer Rotation um einen Punkt, d. h., um es nochmals ausführlicher zu sagen: der Körper kann aus einer gegebenen Anfangslage in jede vorgeschriebene Endlage durch eine Rotation um einen geeignet gewählten Punkt übergeführt werden. Um dies nachzuweisen, setzen wir zunächst einmal die Richtigkeit des Satzes voraus und suchen den Drehpunkt zu bestimmen. Verbinden wir zu diesem Zwecke A mit A', B mit B', so ist klar, daß der gesuchte Punkt von A und A' gleiche Entfernung haben muß; ebenso von B und B'. Er muß also auf den Mittelsenkrechten von AA' und BB', d. h. in ihrem Schnittpunkte liegen. Die Ausführung dieser Konstruktion nach Fig. 76 liefert uns den Punkt P, den wir nun mit A, B, A', B' verbinden. Nun sind offenbar die beiden Dreiecke PAB und $PA'B'$ kongruent; denn nach Konstruktion von P sind $\overline{PA} = \overline{PA'}$, $\overline{PB} = \overline{PB'}$, und ferner nach Voraussetzung $\overline{AB} = \overline{A'B'}$. Folglich sind die Winkel $\widehat{APB}$ und $\widehat{A'PB'}$ einander gleich, die wir mit α in Fig. 76 bezeichnen wollen. Es muß nun noch gezeigt werden, daß, wenn man die Gerade PA um den Winkel $\beta = \widehat{APA'}$ um P dreht, so daß A auf A' zu liegen kommt, dann gleichzeitig durch dieselbe Drehung $\overline{PB}$ in die Richtung von $\overline{PB'}$, also B auf B' zu liegen kommt, d. h. es muß gezeigt werden, daß $\sphericalangle \widehat{BPB'} = \sphericalangle APA' = \beta$ ist. Das ergibt sich aber sofort aus Fig. 76, da jeder der beiden Winkel gleich der Summe des Winkels α und des Winkels $\widehat{BPA'}$ ist. Und zwar ist dieser Drehungswinkel β gleich dem Winkel, den die beiden Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{A'B'}$ miteinander bilden, denn denkt man sich vom Drehpunkte P auf $\overline{AB}$ und $\overline{A'B'}$ die Lote gefällt, so ist der Winkel zwischen den beiden Loten auch offenbar

gleich β, da ja bei der Bewegung von $\overline{AB}$ nach $\overline{A'B'}$ das Lot auf $\overline{AB}$ in dasjenige von $\overline{A'B'}$ übergeführt wird. Also ist der Drehungswinkel β gleich dem Winkel, den $\overline{AB}$ und $\overline{A'B'}$ miteinander bilden, wie dies in der Figur (76) auch angedeutet ist.

Die in Fig. 76 ausgeführte Konstruktion des Punktes P kann unter Umständen unmöglich werden, wenn nämlich die Geraden $\overline{AA'}$ und $\overline{BB'}$ einander zufällig parallel sein sollten. Dies kann erstens der Fall sein, wenn $\overline{AB}$ und $\overline{A'B'}$ einander parallel sind (Fig. 77). Dann rückt der Schnittpunkt P der Mittelsenkrechten von AA' und BB' ins Unendliche, und die Rotation geschieht um einen unendlich fernen Punkt, d. h. sie ist eine Translation, wie auch direkt aus Fig. 77 gemäß

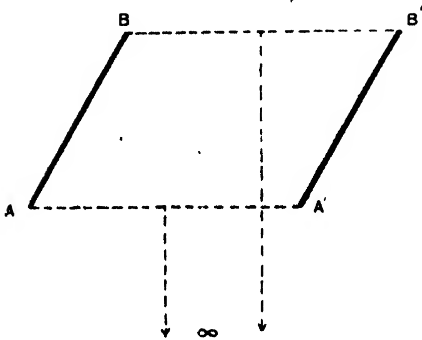


Fig. 77.

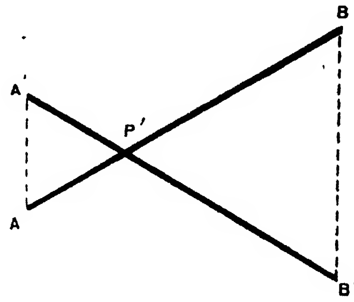


Fig. 78.

der Definition der Translation in der vorigen Nummer zu entnehmen ist. Denn in diesem Falle sind die Geraden, die Anfangs- und Endlage aller Punkte des Körpers verbinden, parallel und von der gleichen Länge $\overline{AA'}$.

Zweitens kann $\overline{AA'}$ auch dann parallel $\overline{BB'}$ werden, wenn $\overline{AB}$ und $\overline{A'B'}$ einander schneiden (Fig. 78). In diesem Falle ist es leicht ersichtlich, daß der Schnittpunkt P' von $\overline{AB}$ und $\overline{A'B'}$ der Punkt ist, um den die äquivalente Rotation als stattfindend gedacht werden muß. Daß hier der Winkel $\widehat{AP'A'} = \sphericalangle B'P'B$ ist, folgt unmittelbar; es ist nur noch zu zeigen, daß einerseits $\overline{P'B} = \overline{P'B'}$, und anderseits $\overline{P'A} = \overline{P'A'}$ ist. Dieser Beweis ergibt sich aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $AP'A'$ und $B'P'B$, unter Hinzunahme des Umstandes, daß $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ ist. Denn es verhält sich $\overline{P'A} : \overline{P'B} = \overline{P'A'} : \overline{P'B'}$, also auch: $\overline{AB} : \overline{P'A} = \overline{A'B'} : \overline{P'A'} = \overline{AB} : \overline{P'A'}$; folglich ist wirklich $\overline{P'A'} = \overline{P'A}$, und ebenso folgt $\overline{P'B'} = \overline{P'B}$, womit

alles erledigt ist. Auch in diesen beiden Ausnahmefällen ist offenbar der Drehungswinkel gleich dem Winkel, den die beiden Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{A'B'}$ miteinander bilden. Wenn wir also eine Translation als eine Rotation um einen unendlich fernen Punkt auffassen, so ist allgemein bewiesen, daß jede Verschiebung eines ebenen Körpers in seiner Ebene einer Rotation um einen Punkt äquivalent ist.

Der hier abgeleitete Satz ist nun offenbar nicht beschränkt auf ebene starre Körper, sondern erweitert sich unmittelbar auf einen beliebigen starren Körper, der sich so bewegt, daß die Bahnen aller Punkte desselben einer im Raume festen Ebene parallel sind. Dann führt der Körper, wie man sagt, eine sogenannte „ebene Bewegung“ aus. Jede dieser festen Raumebene parallele Körperebene bewegt sich nur in sich selbst, und für jede dieser Ebenen gilt daher offenbar der obige Satz. Es sei nun in Fig. 79 $E, E_1 E_2 \ldots$ diese Schar von untereinander parallelen Ebenen des Körpers, und ferner seien (A, B) (A', B') Anfangs- und Endlage zweier Punkte in der Ebene E; dazu bestimmen wir den Drehpunkt P. Betrachten wir nun auch in den Ebenen $E_1, E_2 \ldots$ ebenfalls je vier Punkte $A_1 B_1 A'_1 B_1'$, $A_2 B_2$ $A_2' B_2' \ldots$, die folgendermaßen mit A, B, A', B' in E zusammenhängen sollen: $A_1 A_2 \ldots$ sollen auf der Normalen der Ebene E liegen die durch A geht; ebenso sollen $B_1 B_2 \ldots$, $B_1' B_2' \ldots$, $A_1' A_2' \ldots$, dieselbe Lage zu resp. B, A', B' haben. Dann ist auch klar, daß die jeweiligen Drehpunkte $P_1 P_2 \ldots$ auf dem Lote liegen, das durch P hindurchgeht. Ist also für eine der Ebenen E der Drehpunkt bestimmt, so ist er für alle Ebenen E bestimmt, und zwar liegen dieselben offenbar auf einer Geraden, nämlich der durch P gehenden Normalen auf der Ebene E. Diese Gerade bleibt während der von uns betrachteten Bewegung im Raume unbeweglich; also ist eine Bewegung des starren Körpers, bei der die Bahnen aller seiner Punkte einer festen Ebene im Raume parallel bleiben oder, kurz gesagt: eine „ebene Bewegung“ einer Rotation um eine Achse äquivalent, die senkrecht zu jener Ebene steht.

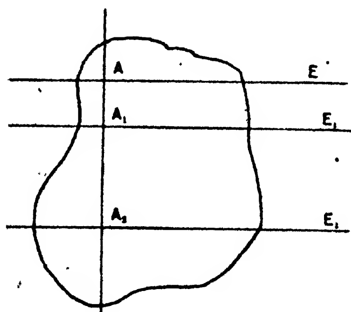


Fig. 79.

Wir wollen nunmehr die wirkliche Bewegung eines ebenen starren Körpers, die (AB) in $(A'B')$ überführt, und die also einer Rotation um einen Punkt äquivalent ist, durch zwei äquivalente Bewegungen darstellen. Dazu verhilft uns eine Betrachtung der vorhin besprochenen Ausnahmefälle, die in Fig. 77 und 78 dargestellt sind.

Es sei (Fig. 80) durch eine Rotation um P (AB) in $(A'B')$ übergeführt, und es soll nun diese Rotation durch zwei äquivalente Verschiebungen ersetzt werden. Zu diesem Zwecke denken wir uns $\overline{AB}$ durch eine Drehung um P' in die zur Endlage parallele Lage $\overline{A''B''}$ gebracht; das ist eine Drehung um denselben Winkel, durch den auch bei der einfachen Rotation gedreht werden muß. Dann führen wir $\overline{A''B''}$ in $\overline{A'B'}$ über, was durch eine Translation geschehen kann. Also erhalten wir den Satz: Eine Rotation eines ebenen starren Körpers in seiner Ebene um einen Punkt ist äquivalent einer Rotation um den nämlichen Winkel um einen anderen Punkt und einer Translation. Wie die Konstruktion zeigt, ist

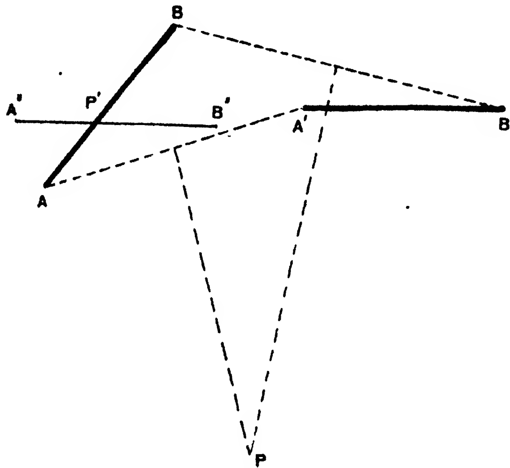


Fig. 80.

dabei die Reihenfolge der Rotation und der Translation gleichgültig. Dieser Satz läßt sich offensichtlich umkehren und liefert dann das Resultat: Eine Rotation durch einen bestimmten Winkel um einen bestimmten Punkt eines ebenen starren Körpers in seiner Ebene und eine darauf folgende oder voraufgehende Translation sind äquivalent einer Rotation durch denselben Winkel um einen anderen Punkt.

Um diesen Satz etwas anders formulieren zu können, wollen wir eine allgemeine Bemerkung über äquivalente Verschiebungen einschalten. Nach Definition heißen zwei Bewegungen einander äquivalent, wenn sie den starren Körper aus derselben Anfangslage (1) in dieselbe Endlage (2) überführen. Nehme ich eine dieser beiden äquivalenten Verschiebungen in umgekehrtem Sinne, so führt sie den Körper, der durch die direkte Verschiebung von (1) nach (2) gebracht wird, wieder

nach (1) in seine alte Lage zurück. Also haben wir den Satz: Eine Verschiebung gemeinsam mit der „inversen", ihr äquivalenten Verschiebung bewirkt im ganzen keine Lagenveränderung des starren Körpers.

Nun kann man den obigen Satz offenbar auch folgendermaßen aussprechen: Eine Rotation durch einen bestimmten Winkel um einen bestimmten Punkt eines ebenen starren Körpers in seiner Ebene, eine Translation in derselben Ebene und eine Rotation durch den entgegengesetzten Winkel um einen geeignet bestimmten anderen Punkt bewirken keine Lagenänderung des starren Körpers. Also können wir durch andere Gruppierung der drei Einzelbewegungen den Satz so formulieren: Zwei gleich große, aber entgegengesetzt gerichtete Rotationen eines ebenen starren Körpers um zwei gegebene Punkte sind äquivalent einer Translation des starren Körpers in seiner Ebene.

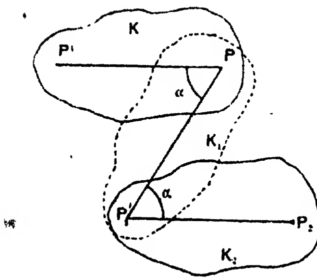


Fig. 81.

Man kann sich diesen Satz unmittelbar anschaulich machen (Fig. 81). Denn sei K ein ebener starrer Körper in der Anfangslage und P und P' die beiden Punkte, um die die Rotationen stattfinden sollen. Dann bringt eine Drehung um P durch den Winkel α den Körper offenbar in die Lage K_1, wobei P' an den Punkt P_1' gelangt; dreht man nun in umgekehrtem Sinne um P_1' wieder durch den Winkel α, so hat der Körper die Lage K_2, und P ist nach P_2 gelangt, derartig, daß P_2P_1' parallel $\overline{PP'}$ ist. Und man sieht, daß das für jede Gerade im Körper gilt: die Endlage ist parallel der Anfangslage, also hätte die ganze Verschiebung auch durch eine Translation bewirkt werden können.

Nach dem Vorhergehenden erweitert sich dieser Satz sofort auf die Zusammensetzung zweier entgegengesetzt gerichteter gleich großer Rotationen eines beliebigen starren Körpers um zwei parallele Achsen: Zwei aufeinanderfolgende gleich große, aber entgegengesetzte Rotationsbewegungen eines starren Körpers um parallele Achsen sind äquivalent einer Translation in einer zu den Achsen senkrechten Ebene.

Wir wollen jetzt einen Schritt weiter gehen und mehrere aufeinander folgende Verschiebungen eines starren ebenen Körpers in seiner Ebene betrachten; jede Lage des Körpers wird wieder durch die Lage zweier Punkte im Raume charakterisiert wie vorher. Die Anfangslage dieser Punkte sei wieder durch A, B, die Endlage nach der ersten Verschiebung durch A', B', nach der zweiten Verschiebung durch A'', B'' usw. bezeichnet. Es ist wohl zu beachten, daß die A, B im

Raume feste Punkte sind, d. h. im festen System (x, y) festliegen. Zu jeder dieser Verschiebungen konstruieren wir nun die äquivalente Rotation um einen Punkt; der ersten Verschiebung entspreche der Drehpunkt P', der zweiten P'', der dritten P''' usw., die wir nach der Methode der Fig. 76 aus den jeweiligen Anfangs- und Endlagen finden. Die so erhaltenen Punkte $P'\,P''\,P'''\ldots$ sind gleichfalls im Raume feste Punkte, da die Punkte $A, B, A', B', A'', B''\ldots$ es sind, auf denen ihre Konstruktion beruht. Sie werden natürlich im allgemeinen nicht zusammenfallen; denn dies trifft nur zu bei der ganz speziellen Verschiebung, bei der ein ebener Körper in seiner Ebene um einen festgehaltenen Punkt rotiert, nicht aber bei der hier betrachteten ganz allgemeinen ebenen Verschiebung. Verbinden wir die Punkte $P'\,P''\ldots$ durch gerade Linien, so erhalten wir im allgemeinen einen gebrochenen Linienzug, ein Polygon, das im Raume fest ist und das wir daher auch kurz als das „Raumpolygon" bezeichnen wollen.[1]) Betrachten wir nun einmal die aufeinanderfolgenden, der wirklichen Bewegung äquivalenten Rotationen um resp. die Punkte $P'\,P''\,P'''\ldots$ usw. Bei jeder dieser Rotationen fällt ein bestimmter Punkt des Körpers, den wir allgemein durch Π bezeichnen wollen, mit einem der Punkte P zusammen. Z. B. bei der ersten äquivalenten Rotation fällt ein Körperpunkt Π' mit P', bei der zweiten ein anderer Körperpunkt Π'' mit P'' zusammen usf. Denken wir uns diese sämtlichen im Körper, d. h. im beweglichen System (ξ, η) festliegenden Punkte durch gerade Linien verbunden, so erhalten wir ein zweites Polygon, das wir kurz als das „Körperpolygon" bezeichnen wollen. Dann lassen sich die äquivalenten Bewegungen des Körpers folgendermaßen beschreiben: Wenn der Körper in seiner Anfangslage AB ist, fällt Π' mit P' zusammen; um ihn in die erste Endlage $A'B'$ zu bringen, genügt eine äquivalente Rotation um P' $(= \Pi')$ durch einen solchen Winkel, daß nunmehr Π'' auf P'' fällt; um den Körper in die Lage $A''B''$ zu bringen, genügt es, ihn um P'' $(= \Pi'')$ zu drehen, bis P''' mit Π''' zusammenfällt, und so fort.

Man kann also die der wirklichen Bewegung äquivalente Bewegung des betrachteten Körpers, die ihn von AB über $A'B'$, $A''B''\ldots$ in eine vorgeschriebene Endlage führt, dadurch erhalten, daß man das Körperpolygon $(\Pi'\,\Pi''\,\Pi'''\ldots)$ um das Raumpolygon „kantet".

Dieser Satz erweitert sich sofort auf die ebene Bewegung eines beliebigen starren Körpers, die ja auf äquivalente Rotationen um parallele Achsen zurückgeführt werden kann. Verbindet man die aufeinanderfolgenden Achsen durch Ebenen, so erhält man sowohl ein im Raume

[1]) Der Name „Raumpolygon" ist im Gegensatz zu einem weiter unten eingeführten Begriff „Körperpolygon" benutzt, nicht jedoch in dem prägnanten Sinne der Geometrie als Gegensatz von „ebenem" Polygon; unsere Raumpolygone sind natürlich eben.

als auch im Körper festes Prisma, und man kann die Bewegung dadurch ersetzen, daß das bewegliche Prisma auf dem festen kantet.

In den bisherigen Auseinandersetzungen haben wir die wirkliche endliche Verschiebung eines Körpers stets auf eine äquivalente zurückgeführt, d. h. auf eine solche, die mit der wirklichen Bewegung im allgemeinen nur Anfangs- und Endlage gemeinsam hat, während die Zwischenlagen voneinander abweichen. Wählen wir aber die Verschiebung infinitesimal, unendlich klein, so gibt es gewissermaßen keine Zwischenlagen mehr, und die äquivalente Bewegung wird dann mit der wirklichen identisch. Wir können also für unendlich kleine Verschiebungen in den vorhergehenden Sätzen das Wort „äquivalent" durch „identisch" ersetzen und erhalten die folgenden Formulierungen derselben:

„Jede unendlich kleine Verschiebung eines ebenen starren Körpers in seiner Ebene ist eine Rotation um einen Punkt."

„Jede unendlich kleine Verschiebung eines beliebigen starren Körpers ist eine Rotation um eine Achse, die senkrecht zu dieser Ebene steht" usw.

Betrachten wir nun die Polygone $P' P'' P''' \ldots$ und $\Pi' \Pi'' \Pi''' \ldots$, die resp. im Raume und im Körper festliegen. Sie gehen für infinitesimale Verschiebungen in stetig verlaufende Kurven über, die „Zentroden" genannt werden, von denen die eine, bewegliche, die sog. „Körperzentrode", auf der anderen, festen, der sog. „Raumzentrode" „abrollt", da das „Kanten" jetzt ins „Rollen" übergeht. Ebenso gehen die bei Rotation eines starren Körpers um parallele Achsen konstruierten Prismen über in Zylinder, die aufeinander abrollen. Man hat daher die beiden Sätze:

Jede beliebige Bewegung eines ebenen starren Körpers in seiner Ebene kann dadurch hervorgebracht werden, daß eine bestimmte, im Körper feste Kurve, die Körperzentrode, auf einer bestimmten im Raume festen Kurve, der Raumzentrode, abrollt, und:

Jede beliebige ebene Bewegung eines starren Körpers kann dadurch erzielt werden, daß ein im Körper fester Zylinder auf einem im Raume festen Zylinder abrollt.

Obwohl es anschaulich klar sein dürfte, was wir unter Rollen verstehen, wollen wir doch hier die exakte Definition des Rollens folgen lassen. Man sagt von einer Kurve, daß sie auf einer anderen rolle, wenn sie in jedem Augenblick die letztere berührt, und die Kurvenbögen beider, welche zwischen irgend zweien der aufeinanderfolgenden Berührungspunkte liegen, gleich sind. Ist nur die erste Bedingung erfüllt, so wird die Bewegung als „Gleiten" bezeichnet. Ganz analog ist die Definition für das Rollen der Zylinder. Man überzeugt sich in der Tat leicht (unter Zugrundelegung dieser Definition) von der Richtigkeit der obigen Sätze.

Die beiden Zentroden haben in jedem Augenblicke einen Punkt P ($= \Pi$) gemeinsam, um den die Rotation erfolgt, und der deshalb als das „instantane Rotationszentrum" oder als „Momentanzentrum" oder kurz als „Pol" bezeichnet wird; ebenso heißt die den beiden Zylindern in jedem Augenblick gemeinsame Gerade, um die gerade die Rotation des beweglichen Zylinders stattfindet, die „instantane Rotationsachse".

67. Allgemeine Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt (sphärische Bewegung); das Theorem von Euler.

Ein ganz analoger Satz, wie über die Bewegung eines ebenen starren Körpers in seiner Ebene, gilt, wie Leonhard Euler gefunden hat, auch für die Bewegung eines Körpers um einen festen Punkt O. Zum Unter-

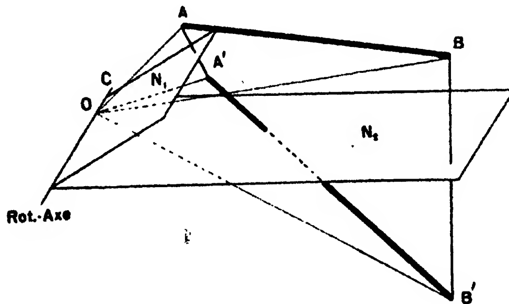


Fig. 82.

schiede von der ebenen Bewegung nennt man diese Bewegung eines starren Körpers „sphärische". Sind die Anfangslagen A und B zweier Punkte des starren Körpers, die ja zur Festlegung genügen, und ihre Endlagen A' und B' gegeben, so kann man dies nach Euler stets durch eine Rotation um eine durch den festen Punkt O gehende Achse erzielen. D. h. also: „Die allgemeinste Verschiebung eines starren Körpers um einen festen Punkt ist äquivalent einer Rotation um eine durch den Punkt gehende Achse."

Der Beweis wird ganz analog geführt wie für die ebene Bewegung. Es seien OA, OB die Anfangslagen zweier Geraden des starren Körpers, OA', OB' ihre Endlagen (Fig. 82). Verbinden wir A mit A', B mit B', so bestimmen die Dreiecke OAA' und OBB' zwei Ebenen. Wir errichten auf AA' und BB' die mittelsenkrechten Ebenen N_1N_1 resp. N_2N_2, die offenbar durch O hindurchgehen; die eine halbiert den Winkel $\widehat{AOA'}$, die andere $\widehat{BOB'}$. Diese beiden Ebenen N_1N_1 und N_2N_2 schneiden sich in der Geraden OC, die folgende Eigenschaft besitzt: Jeder Punkt

der Ebene N_1N_1 ist von A und A' gleich weit entfernt, jeder Punkt der Ebene N_2N_2 desgleichen von B und B'. Die Schnittlinie OC von N_1N_1 und N_2N_2 hat also die Eigenschaft beider Ebenen gemeinsam: jeder ihrer Punkte ist sowohl von A und A' gleich weit entfernt als auch von B und B'. Ferner sind resp. gleich die Winkel $\widehat{AOC}$ und $\widehat{A'OC}$ einerseits und $\widehat{BOC}$ und $\widehat{B'OC}$ anderseits. Die Gerade OC steht räumlich also in derselben Relation zu OAB wie zu $OA'B'$; d. h. $OABC$ kann als starrer Körper aufgefaßt werden. Wird dieser aus der Position OAB in die Position $OA'B'$ gebracht, so muß die Linie OC dabei unverändert bleiben, d. h. sie ist die Rotationsachse der der Verschiebung äquivalenten Rotation, womit der Satz bewiesen ist.

Wenn die Ebenen N_1N_1 und N_2N_2 sich nicht schneiden sollten, so nehmen wir für OC die Schnittlinie der Ebenen OAB und $OA'B'$. Das ist derselbe Ausnahmefall, wie bei der ebenen Bewegung eines starren Körpers, und kann auch auf dieselbe Weise erledigt werden.

Betrachten wir nun eine Reihe aufeinanderfolgender Verrückungen des starren Körpers um den festen Punkt O, so können wir für jede Verrückung auf die eben auseinandergesetzte Weise die äquivalente Rotation konstruieren, d. h. wir erhalten der Reihe nach eine Anzahl von sich im Punkte O schneidenden Achsen OC, OC', OC'' ..., die im Raume festliegen, da die Lagen AB, $A'B'$ ..., aus denen sie bestimmt sind, es tun. Durch je zwei aufeinanderfolgende Achsen ist eine Ebene bestimmt, und legen wir durch je zwei aufeinanderfolgende Achsen diese Ebenen hindurch, so erhalten wir eine im Raum feste Pyramide oder ein Vielkant mit der Spitze in O. Gleichzeitig können wir aber offenbar, da während Ausführung jeder äquivalenten Rotation die Rotationsachsen auch im Körper festliegen, die Stelle der Achsen im Körper markieren; wir wollen diese Geraden $O\gamma$, $O\gamma'$, $O\gamma''$ ... nennen. Diese bestimmen ebenfalls eine Pyramide mit der Spitze in O, die im Körper fest ist, also im Raume sich bewegt. Wir nennen die beiden Pyramiden resp. die „feste" und die „bewegliche". Während der ersten äquivalenten Rotation fallen OC und $O\gamma$ zusammen, und um diese Achse führt der Körper eine Rotation aus, bis OC' und $O\gamma'$ zusammenfallen, d. h. bis die Lage $A'B'$ erreicht ist. Dann beginnt die Rotation um die gemeinsame Linie OC' ($= O\gamma'$) um einen solchen Winkel, daß OC'' und $O\gamma''$ zusammenfallen usw. Man kann also die sukzessiven Verschiebungen der Lagen unseres starren Körpers dadurch erhalten, daß man die bewegliche Pyramide um die feste Pyramide kantet — ein völliges Analogon zu dem Satze über die ebene Bewegung in der vorigen Nummer.

Gehen wir — genau wie vorher — zu unendlich kleinen Verschiebungen des starren Körpers über, so fällt die äquivalente Bewegung mit der wirklichen zusammen, und wir können sagen: Eine beliebige

unendlich kleine Verschiebung eines starren Körpers um einen festen Punkt ist eine unendlich kleine Rotation um eine durch den Punkt gehende Achse. Diese Achse, deren Lage stetig im Raume und im Körper variiert, nennen wir die „instantane Rotationsachse“. Bei dem Grenzübergange zu unendlich kleinen Verrückungen gehen die feste und die bewegliche Pyramide über in einen festen und einen beweglichen Kegel, mit gemeinsamer fester Spitze im Drehpunkt O, die eine Gerade gemeinsam haben, eben die instantane Rotationsachse OC. Wir können also jede Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt dadurch erhalten,

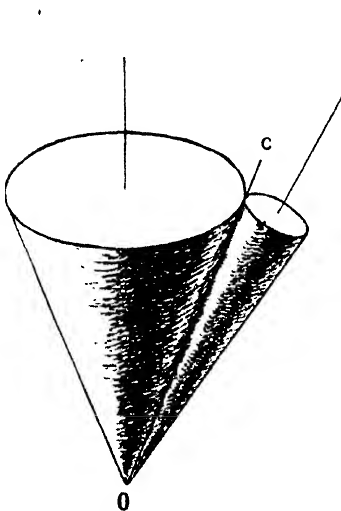


Fig. 83.

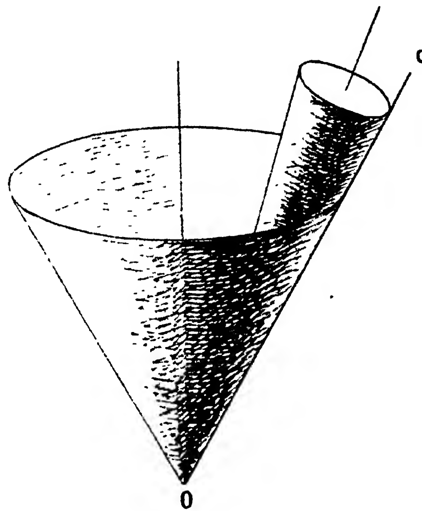


Fig. 84.

daß wir einen bestimmten, im Körper festen Kegel, der seine Spitze im festen Punkte O hat, auf einem im Raume festen Kegel, dessen Spitze gleichfalls in O ist, rollen lassen. Dieses ist die Vorstellung, die man Poinsot verdankt. Den im Körper festen Kegel nennt man den „Polhodiekegel“, den im Raume festen den „Herpolhodiekegel“. Die Herkunft und die Bedeutung dieser beiden Bezeichnungen kann erst später, am Schlusse von Nr. 68, gegeben werden. Also: „Jede Bewegung eines starren Körpers um einen Punkt kann dadurch erzielt werden, daß der Polhodiekegel auf dem Herpolhodiekegel abrollt.“

Wir werden später an geeigneten Beispielen die Nützlichkeit dieser Vorstellung dartun. Zwei spezielle Fälle, die bei der Kreiselbewegung eine Rolle spielen, stellen die Figg. 83 und 84 dar; in beiden Fällen sind die Kegel Kreiskegel; in Fig. 83 rollt der Polhodiekegel von außen,

bei Fig. 84 von innen auf dem Herpolhodiekegel ab; die gemeinsame Gerade OC ist die instantane Rotationsachse, die also in diesen beiden Fällen selbst einen Kreiskegel im Raume beschreibt.

68. Zusammensetzung von zwei aufeinanderfolgenden Rotationen um zwei Achsen.

Betrachtet man drei aufeinanderfolgende Positionen eines starren Körpers, so ist klar, daß derselbe statt durch zwei aufeinanderfolgende Rotationen auch direkt durch eine einzige aus der Anfangslage in die Endlage übergeführt werden kann, die man als die „resultierende" äquivalente Rotation bezeichnen kann, und es entsteht die Aufgabe, die Bestimmungsstücke dieser resultierenden äquivalenten Rotation abzuleiten. Wir wollen hier die beiden Fälle behandeln, daß ein starrer Körper zwei aufeinanderfolgende Rotationen um resp. die Winkel α und β erstens um parallele Achsen ausführt (ebene Bewegung), und zweitens um zwei sich unter einem Winkel in dem festgehaltenen Punkte des Körpers schneidende Achsen ausführt (sphärische Bewegung). In beiden Fällen ist der Körper durch die Lage zweier Punkte bestimmt.

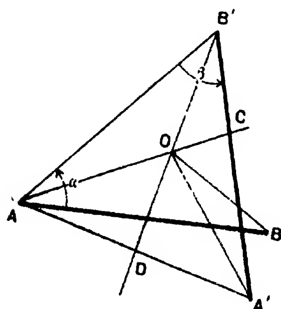


Fig. 85.

Es sei die Anfangslage des starren Körpers im ebenen Falle durch die beiden Punkte A und B charakterisiert; die beiden Rotationsachsen sollen durch zwei im Körper (nicht im Raume) feste Punkte, eben durch die Punkte AB, gehen und senkrecht zur Papierebene stehen. Um die durch A gehende Achse werde im positiven Sinne durch den Winkel α gedreht; dann gelangt B mit der stets hindurchgehenden Achse an die Stelle B' des Raumes; dann wird weiter um B' in positivem Sinne durch den Winkel β gedreht, was A an den Raumpunkt A' bringt (Fig. 85). Die Lage der beiden Rotationsachsen im Raume ist bei dieser Anordnung der Rotationen durch die Punkte A und B' des Raumes charakterisiert, die ihre Durchstoßpunkte durch die Zeichenebene sind.

Ziehen wir durch die beiden Punkte A und B' die Winkelhalbierungslinie AC für den Winkel α und $B'D$ für den Winkel β, die sich in O schneiden mögen. Dann läßt sich zeigen, daß eine einzige Rotation um eine durch O gehende Achse senkrecht zur Papierebene durch den Winkel $(\alpha + \beta)$ den starren Körper gleichfalls von (A, B) nach (A', B') bringt; das ist also die resultierende Rotation. Denn der Schnittpunkt O der Winkelhalbierenden hat als einziger Punkt die Eigenschaft, gleiche

Entfernung sowohl von A und A' als auch B und B' zu besitzen, d. h. es bestehen die Gleichungen:

$$\overline{OA} = \overline{OA'}; \quad \overline{OB} = \overline{OB'}.$$

Ferner ist der Winkel $\widehat{AOA'}$ gleich dem doppelten Winkel $\widehat{AOD}$, und dieser als Außenwinkel des Dreiecks AOB' ist gleich $\frac{\alpha+\beta}{2}$; also ist der Winkel $\widehat{AOA'}$ gleich $(\alpha+\beta)$. Das gleiche gilt von dem Winkel $\widehat{BOB'}$, der gleich dem doppelten Winkel $\widehat{B'OC}$ ist; auch dieser letztere ist gleich $\frac{\alpha+\beta}{2}$, also Winkel $\widehat{BOB'}$ gleich $(\alpha+\beta)$. Damit ist gezeigt, daß durch eine Rotation um O durch den Winkel $(\alpha+\beta)$ der Körper aus seiner Anfangslage (A, B) in seine Endlage (A', B') gelangt; diese eine Rotation ist also die Resultierende der beiden Einzelrotationen um A und B'.

Aus den obigen Darlegungen ergibt sich folgende Konstruktion der Achse der resultierenden Drehung. In einer zu den beiden Achsen der Teilrotationen senkrechten Ebene (der Papierebene) verbinde man die beiden Durchstoßpunkte der Achsen (A, B') durch eine Gerade, trage an dieselbe in den Endpunkten resp. die halben Drehungswinkel $\left(\text{resp. } \frac{\alpha}{2} \text{ und } \frac{\beta}{2}\right)$ an; der Durchschnittspunkt der so gewonnenen Richtungen ist der Durchstoßpunkt der gesuchten Achse durch die Papierebene, der anliegende Außenwinkel gleich $\frac{\alpha+\beta}{2}$ gibt den halben Winkel der resultierenden Drehung. Die Größe derselben ist also $(\alpha+\beta)$, d. h. gleich der Summe der Einzeldrehungen. Um die Lage des Punktes O analytisch zu bestimmen, liefert der gewöhnliche Sinussatz auf das Dreieck $AB'O$ angewendet:

$$(4) \qquad \frac{\overline{AO}}{\sin\frac{\beta}{2}} = \frac{\overline{B'O}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\overline{A'B}}{\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}.$$

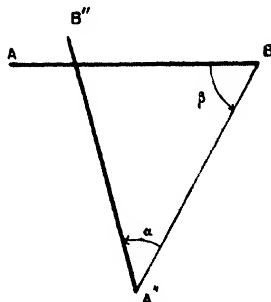


Fig. 86.

Es ist wichtig, sich klar zu machen, daß bei diesem Prozesse die Reihenfolge der Rotationen α und β wesentlich ist; die umgekehrte Reihenfolge liefert ein ganz anderes Resultat. Denn drehen wir (Fig. 86) den Körper aus seiner Anfangslage AB zuerst durch eine Rotation um B in positivem Sinne durch den Winkel β, so gelangt A nach A''; dreht man jetzt um A'' durch den Winkel α, so gelangt B nach B''. Die Endlage $A''B''$ ist also in diesem Falle eine ganz andere wie vorher. Dies liegt daran, daß jetzt die Rotationsachsen eine ganz andere Lage im Raume haben; denn die Verbindungs-

linie der Durchstoßpunkte derselben ist jetzt $\overline{BA''}$, während es vorher $\overline{AB'}$ war. Dementsprechend hat zwar die resultierende Rotation noch die Größe $(\alpha+\beta)$, aber die Achse derselben hat eine andere Lage; d. h. aber: die resultierende Rotation ist eine andere, wenn die Reihenfolge der Teilrotationen umgekehrt wird.

Man kann den obigen Satz auch anders formulieren, indem man den um zwei parallele Achsen gedrehten starren Körper durch die inverse resultierende Rotation wieder auf (A, B) zurückbringt. Nun ist aber klar, daß eine Drehung durch den Winkel 2π die Lage des Körpers nicht ändert; also sind zwei Drehungen um dieselbe Achse, einmal um den Winkel δ, dann durch den Winkel $(2\pi-\delta)$ zueinander inverse äquivalente Rotationen, oder die Rotation $-\delta$ um eine Achse ist äquivalent der Rotation $+[2\pi-\delta]$ um dieselbe Achse. Statt also in unserem Falle durch die Rotation um die durch O gehende Achse durch den Winkel $-(\alpha+\beta)$ den starren Körper aus der Endlage wieder nach (A, B) zurückzubringen, kann man dies auch durch die äquivalente Rotation durch den Winkel $[2\pi-(\alpha+\beta)]$ erreichen. Nun ist aber in der Konstruktion nach Fig. 85 in dem Dreieck AOB' der Winkel an der Spitze O gleich $\left[\pi-\frac{\alpha+\beta}{2}\right]$, also gleich der Hälfte der inversen äquivalenten Drehung. Mithin kann man folgenden Satz aussprechen: „Drei aufeinanderfolgende Rotationen um drei parallele Achsen durch die doppelten Kantenwinkel des von ihnen gebildeten Prismas bringen den Körper wieder in seine ursprüngliche Lage zurück." Denn diese Kantenwinkel sind in unserem Falle resp. $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \pi-\frac{\alpha+\beta}{2}$, also resp. gleich den halben Winkeln der beiden Teildrehungen und der inversen resultierenden Drehung.

Betrachten wir nun den zweiten (sphärischen) Fall, daß ein starrer Körper, von dem ein Punkt O festgehalten wird, zwei Rotationen um durch diesen Punkt gehende Achsen ausführt. Nach dem Theorem von Euler kann die allgemeine Bewegung dieses Körpers auf eine Rotation um eine durch O gehende Achse zurückgeführt werden; also kann auch hier das Resultat der zwei Drehungen durch eine Drehung um eine ebenfalls durch den festen Punkt O gehende Achse hervorgebracht werden. Es gilt darüber der dem obigen ganz analoge Satz von Hamilton: „Drei aufeinanderfolgende Rotationen um drei in einem Punkte sich schneidende Achsen durch die doppelten Winkel der von ihnen gebildeten Ebenen bringen den starren Körper wieder in seine Anfangslage zurück."

Der Beweis ist ganz ähnlich wie in dem ebenen Falle und kann dem Leser überlassen bleiben. Wir wollen nur die geometrische Konstruktion der Achsenrichtung der resultierenden Drehung und des resultierenden Drehungswinkels besprechen. Wir schlagen um den festgehaltenen Punkt O die Einheitskugel, und markieren auf ihr die Durchstoß-

punkte A und B der Achsen der beiden Teildrehungen durch resp. die Winkel α und β. Die Punkte A und B verbinden wir durch einen größten Kreis und tragen in A und B die halben Drehungswinkel $\frac{\alpha}{2}$ und $\frac{\beta}{2}$ an (Fig. 87). Der Schnittpunkt der so erhaltenen größten Kreise sei C; verbinden wir diesen mit dem festen Punkte O, so ist OC die Achse der resultierenden Drehung; der anliegende Außenwinkel $\frac{\gamma}{2}$ an der Spitze des sphärischen Dreiecks ACB ist gleich dem halben Drehungswinkel der resultierenden Rotation. Man sieht, daß diese Konstruktion ganz dieselbe ist, wie im ebenen Falle, nur daß sie hier auf der Kugel ausgeführt wird; denn das Dreieck ACB ist hier sphärisch. Durch dieselben Überlegungen wie vorhin erkennt man auch hier, daß die Reihenfolge der (endlichen) Teilrotationen nicht vertauscht werden darf.

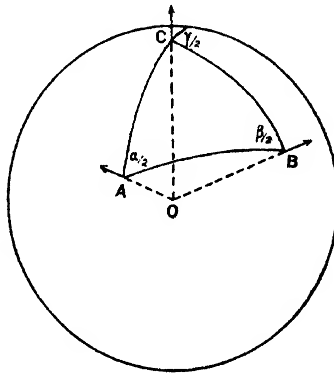


Fig. 87.

Wir wollen hier noch die Größe des resultierenden Drehungswinkels γ bestimmen, wenn die Winkel α und β der Teildrehungen gegeben sind. Diese Beziehung liefert der Kosinussatz der sphärischen Trigonometrie für die Winkel; danach ist nämlich aus dem sphärischen Dreieck ABC:

$$(5) \qquad \cos\frac{\gamma}{2} = \cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\widehat{AOB};$$

ebenso liefert der Sinussatz der sphärischen Trigonometrie zur analytischen Bestimmung des Durchstoßpunktes C der Achse OC der resultierenden Drehung:

$$(6) \qquad \frac{\sin\widehat{AOC}}{\sin\frac{\beta}{2}} = \frac{\sin\widehat{BOC}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\widehat{AOB}}{\sin\frac{\gamma}{2}}.$$

Diese etwas komplizierten Verhältnisse vereinfachen sich in außerordentlicher Weise, wenn die beiden zusammengesetzten Rotationen (sei es im ebenen, sei es im sphärischen Falle) **unendlich klein** sind. Man erkennt leicht aus den Konstruktionen der Fig. 85 und 87, daß im ebenen Falle das Zentrum O der resultierenden Rotation in die Verbindungslinie der Zentren A und B' der beiden primären Rotationen fällt, und daß im sphärischen Falle die Achse OC der resultierenden Drehung in der Ebene der beiden Rotationsachsen OA und OB der primären Rotationen liegt.

Nehmen wir zunächst den ebenen Fall, so ergibt sich unter Beachtung obiger Sätze aus Fig. 85 folgende Lage der drei Punkte A, O, B' zueinander (Fig. 88), wobei die Lage von O sich nach Gleichung (4), in der wegen der Kleinheit der Winkel $\frac{\alpha}{2}$ und $\frac{\beta}{2}$ die Sinus mit dem Argument vertauscht werden können, berechnet:

(7) $$\frac{\overline{OA}}{\beta} = \frac{\overline{OB'}}{\alpha} = \frac{\overline{AB'}}{\alpha+\beta},$$

d. h. der Punkt O teilt die Strecke AB' im umgekehrten Verhältnis der Rotationswinkel: er liegt demjenigen Punkte näher, um den die größere Rotation erfolgt. Oder anders ausgedrückt: Denkt man sich den Punkten A und B' resp. die Massen α und β mitgeteilt, so ist der Punkt O ihr gemeinsamer Schwerpunkt mit der Masse $(\alpha+\beta)$.

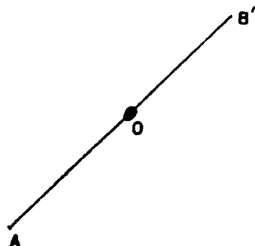


Fig. 88.

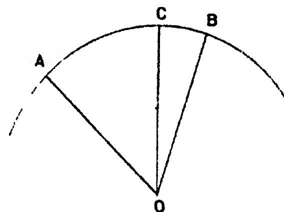


Fig. 89.

Ganz analog liegt die Sache im sphärischen Falle. Die Lage der drei Achsen OA, OB, OC wird dann durch die ebene Zeichnung der Fig. 89 dargestellt. Zunächst ergibt sich für die Größe des resultierenden Drehungswinkels γ nach Gleichung (5), in der $\cos x$ durch $1-\frac{x^2}{2}$ ersetzt werden darf:

(8) $$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\,\alpha\,\beta \cos \widehat{AOB},$$

und für die Lage des Punktes C auf der Einheitskugel nach Gleichung (6):

(9) $$\frac{\sin \widehat{AOC}}{\beta} = \frac{\sin \widehat{BOC}}{\alpha} = \frac{\sin \widehat{AOB}}{\alpha+\beta}.$$

Der Winkel $(\widehat{AOB})$ zwischen den Achsen der primären Rotationen wird durch die Achse OC der resultierenden Rotation so geteilt, daß die Sinusse der Teilwinkel sich umgekehrt verhalten wie die primären Rotationswinkel.

Gleichzeitig lehrt die Gleichung (8) folgendes: Der Winkel γ der resultierenden Rotation ist aus α und β zusammengesetzt nach der Regel des Parallelogramms der Kräfte, d. h. α, β, γ, oder allgemein beliebige unendlich kleine Drehungen können als Vektoren

behandelt werden. Trägt man auf der Achse OA von O aus den Drehungswinkel α, auf OB den entsprechenden Winkel β auf, so liefert die Parallelogrammkonstruktion den Winkel γ nicht nur der Größe nach, sondern auch die Achse, um die die resultierende Rotation erfolgt (Fig. 90). Statt der unendlich kleinen Winkel α, β, γ, die in einem Zeitelement dt durchstrichen werden, können wir auch die entsprechenden Winkelgeschwindigkeiten $\omega_1, \omega_2, \omega$ einführen, da ja offenbar ist:

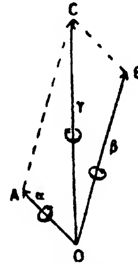


Fig. 90.

$$\alpha = \omega_1\, dt; \quad \beta = \omega_2\, dt; \quad \gamma = \omega\, dt.$$

Dann folgt aus (8):

$$(10) \qquad \omega^2 = \omega_1{}^2 + \omega_2{}^2 + 2\,\omega_1\omega_2 \cos(\widehat{AOB});$$

also können auch die Rotationsgeschwindigkeiten, wenn sie längs der Achse aufgetragen werden, um die die betr. Rotation stattfindet, als Vektoren behandelt werden. Wir nennen einen Vektor, der längs der Rotationsachse aufgetragen ist, und dessen Betrag gleich der Winkelgeschwindigkeit um diese Achse ist, den „Drehungsvektor", den wir allgemein durch $\mathfrak{u}$ (Betrag ω) bezeichnen werden. Nennen wir $\mathfrak{u}_1$ und $\mathfrak{u}_2$ die beiden Drehungsvektoren, deren Beträge wir oben durch ω_1 und ω_2 bezeichnet haben, so läßt sich Gleichung (10) in Vektorschreibweise so formulieren:

$$(11) \qquad \mathfrak{u} = \mathfrak{u}_1 + \mathfrak{u}_2 .$$

Die positive Richtung des Drehungsvektors ist dadurch festgelegt, daß ein derselben entgegenschauender Beobachter die Rotation um die Achse entgegen dem Uhrzeigersinne wahrnimmt.

Es muß besonders betont werden, daß der Drehungsvektor $\mathfrak{u}$ zwar an jedem beliebigen Punkte der Rotationsachse angebracht werden kann, d. h. daß er sich im starren Körper längs seiner eigenen Richtung beliebig verschieben läßt, aber er darf keineswegs an einem Punkte außerhalb der Rotationsachse angebracht werden. Dies folgt daraus, daß Rotationen um parallele Achsen völlig andere Bewegungen des Körpers darstellen. Während also der Vektor der Translation an jedem beliebigen Körperpunkte angebracht werden darf, darf der Rotationsvektor nur in den Punkten der Rotationsachse selbst angebracht werden. Man nennt daher den Rotationsvektor, da er sich nur in seiner eigenen Richtung verschieben läßt, im Gegensatz zu dem „freien" Translationsvektor einen „linienflüchtigen" Vektor.

Der Endpunkt des Drehungsvektors, der nach der obigen Vorschrift konstruiert ist, heißt der „Drehpol". Während der Bewegung bleibt nach den früheren Auseinandersetzungen die Rotationsachse im

allgemeinen weder im Raume noch im Körper fest, sondern beschreibt in beiden einen Kegelmantel. Der Drehpol beschreibt dabei je eine auf den Kegeln liegende Kurve, eine im Raume feste, eine im Körper feste. Die letztere heißt „Polhodiekurve“, d. h. „Weg des Drehpoles“, die erstere „Herpolhodiekurve“, d. h. „Weg, auf dem der Drehpol entlang kriecht“. Beide Ausdrücke sind nach unseren früheren Darlegungen leicht verständlich; zugleich erkennt man den Grund, weshalb die die beiden Kurven enthaltenden Kegel als Polhodiekegel und Herpolhodiekegel bezeichnet werden.

69. Allgemeinste Verschiebung eines starren Körpers; Theorem von Chasles.

Nach der Erledigung der Spezialfälle der Translation, der ebenen und sphärischen Rotation eines starren Körpers gehen wir jetzt zur allgemeinsten Verschiebung eines starren Körpers über. Derselbe hat 6 Freiheitsgrade; er ist also festgelegt durch die Angabe von dreien seiner Punkte, deren Anfangslage wir A, B, C, deren Endlage nach einer endlichen Verschiebung wir A', B', C' nennen wollen.

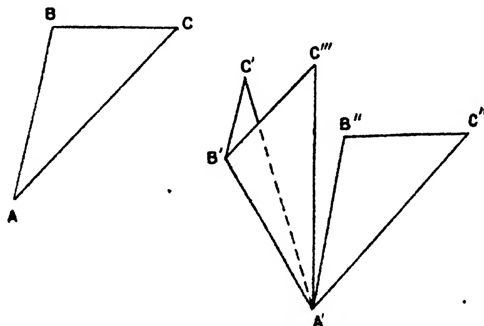


Fig. 91.

Dann läßt sich zunächst zeigen, daß durch eine geeignete Translation und darauffolgende Rotation um eine bestimmte Achse der Körper aus der Anfangslage (ABC) in die beliebig vorgeschriebene Endlage ($A'B'C'$) gebracht werden kann. Denn man kann zunächst den starren Körper durch eine Translation so verschieben, daß A auf A' fällt (Fig. 91); dann fällt B auf B'', C auf C''. Denken wir nun durch A' senkrecht auf der Ebene von $A'B'$ und $A'B''$ eine Gerade gezogen, so kann durch eine Rotation um diese durch den Winkel ($\widehat{B''A'B'}$) erreicht werden, daß B'' auf B' fällt, während C'' etwa nach C''' gelangen möge. Dreht man jetzt den Körper um $A'B'$ als Achse durch den Winkel zwischen den Ebenen $A'B'C'$ und $A'B'C'''$, so muß C''' auf C' fallen, womit der starre Körper in seiner vorgeschriebenen Endlage angelangt ist. Die beiden Rotationen, die dazu erforderlich

waren, geschehen um im Punkte A' sich schneidende Achsen, können also nach dem in der vorhergehenden Nummer ausgesprochenen Theorem von Hamilton zu einer einzigen um eine gleichfalls durch A' gehende Achse erfolgenden Rotation zusammengesetzt werden. Damit ist in der Tat bewiesen, daß ein starrer Körper aus seiner gegebenen Anfangslage in eine beliebige Endlage durch die Kombination einer Translation und einer Rotation übergeführt werden kann.

Es läßt sich aber noch weiter zeigen, daß die Translation und die Rotation so gewählt werden können, daß die Translation in der Richtung der Rotationsachse geschieht; eine

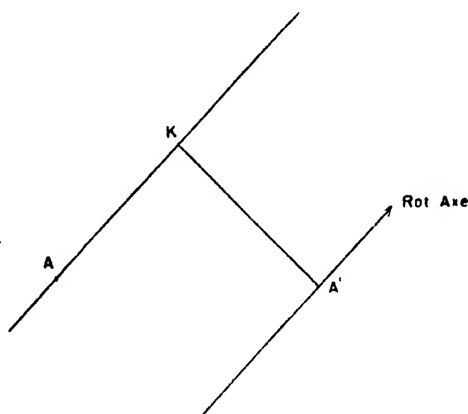


Fig. 92.

solche Kombination von Translation und Rotation nennt man eine „Schraubenbewegung“ oder eine „Bewegungsschraube“. In dieser Ausdrucksweise sagt der jetzt zu beweisende Satz: Die allgemeinste Verschiebung eines starren Körpers ist äquivalent einer Schraubenbewegung; dieses Theorem verdankt man Chasles, und es ist nach ihm auch benannt. Der Beweis gestaltet sich folgendermaßen: Es ist oben bereits gezeigt worden, daß eine Translation und eine Rotation äquivalent der allgemeinsten Bewegung eines starren Körpers sind. Wir betrachten einen Punkt eines starren Körpers, dessen Anfangslage A sei; durch die Translation werde er nach A' gebracht; durch A' geht dann, wie im Vorhergehenden auseinandergesetzt, die Achse der Rotation, die notwendig ist, um den Körper in die vorgeschriebene Endlage zu bringen (Fig. 92). Wir ziehen nun durch A eine Parallele zur Rotationsachse und fällen von A' das Lot auf die erstere, das sie im Punkte K treffen möge. Nun ist es selbstverständlich möglich, die Translation des Körpers, durch die A nach A' gelangt,

in zwei Schritten zu vollziehen, nämlich durch eine erste Translation A nach K, und durch eine zweite, senkrecht dazu erfolgende, K nach A'

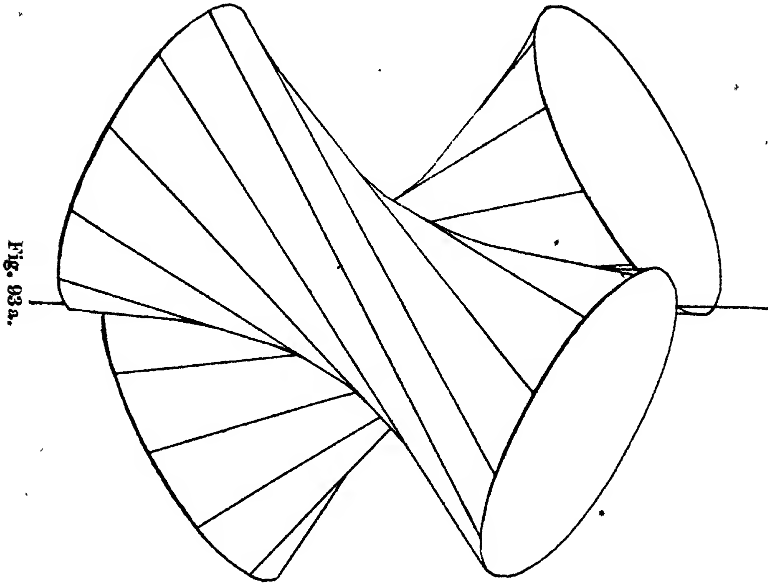


Fig. 93 a.

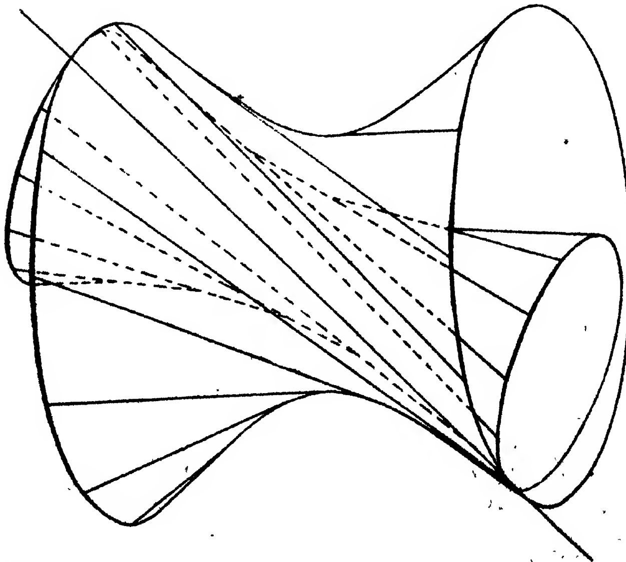


Fig. 93 b.

zu schaffen. Diese letztere aber kann, zusammen mit der Rotation, die ja um eine durch A' gehende Achse erfolgt, durch eine Rotation

um eine parallele Achse ersetzt werden. Denn nach einem in Nr. 66 bewiesenen Satze ist eine Rotation um eine Achse zusammen mit einer Translation in einer zur Achse senkrechten Ebene äquivalent einer Rotation um eine parallele Achse. Damit ist der Chaslessche Satz bewiesen.

Gehen wir nun zu einer unendlich kleinen Verschiebung über, so können wir statt „äquivalent" wieder „gleich" sagen, und wir erhalten den Satz:

„Die allgemeinste unendlich kleine Verschiebung eines starren Körpers ist eine unendlich kleine Schraubenbewegung."

Betrachten wir jetzt eine Reihe aufeinanderfolgender unendlich kleiner Verrückungen eines freien starren Körpers, so können wir in jedem Moment im Raume und im Körper eine Richtung angeben, um die die momentane Rotation und parallel der die momentane Translation stattfindet. Dieses Verfahren ist ganz analog dem früheren, wenn ein Punkt des starren Körpers fest war, nur daß die Schar der hier erhaltenen Geraden natürlich nicht mehr durch einen Punkt geht; sie sind vielmehr sowohl im Raume als im Körper windschief zueinander. Man erhält daher als Gesamtheit der aufeinanderfolgenden Achsen keine Kegelflächen mehr, sondern allgemeinere, die aber ebenfalls durch gerade Linien gebildet werden und die „Regelflächen" heißen. Die feste und die bewegliche Regelfläche berühren sich in jedem Augenblicke längs einer Geraden, die gleichzeitig Rotationsachse und Richtung des Translationsvektors ist: die Flächen rollen also nicht nur aufeinander, sondern sie gleiten auch längs der Berührungsgeraden aneinander. Diese kombinierte Bewegung nennt man: „aufeinander schroten". Wir haben also den Satz, der eine Verallgemeinerung der Poinsotschen Darstellung für die sphärische Bewegung ist, „daß die allgemeinste Bewegung eines starren Körpers dadurch hervorgebracht werden kann, daß eine im Körper feste Regelfläche auf einer im Raume festen Regelfläche schrotet." In Fig. 93 sind zwei solcher Regelflächen in ihrer gegenseitigen Lage gezeichnet; sie entsprechen den Figg. 83 und 84 für die sphärische Bewegung.

70. Analytische Darstellung der ebenen Bewegung eines starren Körpers.

Wir wollen nun die geometrischen Betrachtungen der vorhergehenden Nummern durch die notwendigen analytischen Ergänzungen vervollständigen, und zwar betrachten wir zunächst der Einfachheit halber die ebene Bewegung eines starren Körpers. Bei dieser bewegt eine Schar paralleler Körperebenen sich in sich selbst; wir haben also nur notwendig, eine dieser Ebenen zu betrachten, von der wir annehmen

wollen, daß sie mit der im Raum festen xy-Ebene zusammenfalle. Im Körper befestigen wir, gleichfalls in dieser Ebene, ein Koordinatensystem (ξ, η), das sich mit dem Körper bewegt. Dann ist die Lage des starren Körpers im Raume offenbar völlig bestimmt, wenn die Lage des beweglichen (ξ, η)-Systems gegen das feste (x, y)-System bekannt ist (Fig. 94). Dazu gehören drei Daten, nämlich die zwei Koordinaten (x_0, y_0) des Anfangspunktes O' des beweglichen Systems im festen System, und die Richtung der ξ-Achse, also z. B. der Winkel φ, den die posi-

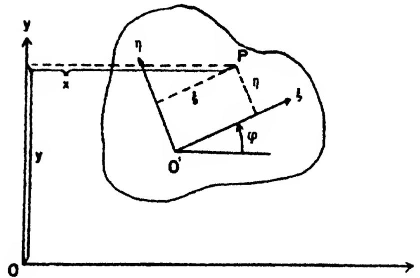


Fig. 94.

tive ξ-Richtung mit der positiven x-Richtung bildet. Denn vermittels dieser drei Stücke lassen sich x und y durch ξ und η ausdrücken, und zwar durch die bekannten Transformationsformeln:

$$(12)\qquad \begin{cases} x = x_0 + \xi\cos\varphi - \eta\sin\varphi\,, \\ y = y_0 + \xi\sin\varphi + \eta\cos\varphi\,. \end{cases}$$

Dabei sind (ξ, η) resp. (x, y) die Koordinaten eines beliebigen Punktes P des starren Körpers im beweglichen resp. festen Koordinatensystem.

Wir wollen nun dem Körper eine unendlich kleine Verrückung erteilen, deren Komponenten im festen System wir durch $\delta x, \delta y$ bezeichnen wollen; im beweglichen System bleiben natürlich ξ und η fest, da ja das bewegliche System sich mit dem Körper verschiebt; es können sich nur x_0, y_0, φ ändern. Wir erhalten also aus (12):

$$(13)\qquad \begin{cases} \delta x = \delta x_0 - \xi\sin\varphi\,\delta\varphi - \eta\cos\varphi\,\delta\varphi = \delta x_0 - (y - y_0)\,\delta\varphi\,, \\ \delta y = \delta y_0 + \xi\cos\varphi\,\delta\varphi - \eta\sin\varphi\,\delta\varphi = \delta y_0 + (x - x_0)\,\delta\varphi\,; \end{cases}$$

es ergibt sich aus (13), daß man die Verschiebung $\delta x, \delta y$ aus zweien zusammensetzen kann, nämlich:

$$(14)\qquad \begin{cases} \delta x_1 = \delta x_0\,; & \delta y_1 = \delta y_0\,; \\ \delta x_2 = -(y - y_0)\,\delta\varphi\,; & \delta y_2 = +(x - x_0)\,\delta\varphi\,. \end{cases}$$

so daß in der Tat $\delta x_1 + \delta x_2 = \delta x$; $\delta y_1 + \delta y_2 = \delta y$ ist. Den Charakter dieser beiden Teilverschiebungen werden wir jetzt feststellen.

Zunächst: Die Verschiebung $\delta x_1 = \delta x_0$, $\delta y_1 = \delta y_0$ stellt eine für den ganzen Körper **gemeinschaftliche** Veränderung der Koordinaten dar; alle Punkte verschieben sich um parallele gleich große Strecken von der Länge $\sqrt{\delta x_0^2 + \delta y_0^2}$. Diese erste Verschiebung ist also eine **reine Translation** des betrachteten Körpers. Der Charakter der zweiten Verschiebung ergibt sich folgendermaßen: Die Koordinaten des betrachteten Punktes vor der Verschiebung sind x, y, nach der Verschiebung $x + \delta x_2$, $y + \delta y_2$. Wir wollen ihre Abstände von dem Koordinatenanfangspunkte O' mit den Koordinaten (x_0, y_0) feststellen. Wir haben die folgenden Werte für die Quadrate dieser Abstände:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2,$$

und

$$(x - x_0 + \delta x_2)^2 + (y - y_0 + \delta y_0)^2.$$

Der letztere Ausdruck ergibt ausgerechnet:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + 2(x - x_0)\delta x_2 + 2(y - y_0)\delta y_2,$$

wenn die Quadrate δx_2^2, δy_2^2, als von höherer Ordnung unendlich klein, vernachlässigt werden. Setzt man aus (14) für δx_2 und δy_2 die Werte in die letzte Gleichung ein, so erhält man für das Quadrat des Abstandes nach der Verschiebung:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - 2(x - x_0)(y - y_0)\delta\varphi + 2(x - x_0)(y - y_0)\delta\varphi$$
$$= (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2,$$

d. h. die Entfernung vom Koordinatenanfangspunkte O' ändert sich durch die betrachtete Verrückung (bis auf Größen höherer Ordnung) nicht: der Punkt hat sich also auf einem **Kreise** um O' bewegt. Die hier betrachtete Verrückung ist also eine unendlich kleine Rotation durch den Winkel $\delta\varphi$, und zwar um den Punkt (x_0, y_0) als Rotationszentrum, oder, wenn wir den gesamten Körper, nicht nur die xy-Ebene, betrachten, so ist die Verschiebung eine unendlich kleine Rotation um eine durch (x_0, y_0) gehende, parallel der z-Richtung weisende Achse durch den Winkel $\delta\varphi$.

Wir erhalten also das Resultat: **Eine beliebige, unendlich kleine ebene Verschiebung eines starren Körpers kann aus einer unendlich kleinen Translation und einer unendlich kleinen Rotation um eine senkrecht zu der Ebene stehende Achse zusammengesetzt werden.**

Es ist zu beachten, daß der Punkt O', in dem wir das (ξ, η)-System verankert haben, ein ganz beliebiger ist; δx_0, δy_0 können wir, da sie dem ganzen Körper gemeinsam sind, auch als die Translationskomponenten des Punktes O' bezeichnen; um O' erfolgt auch die ebene Rotation. Man nennt daher O' den Bezugspunkt, — dessen Wahl, wie betont, willkürlich ist — und kann den obigen Satz auch so aussprechen: Eine

beliebige ebene unendlich kleine Verschiebung eines starren Körpers kann dadurch hervorgebracht werden, daß ein beliebig vorgegebener Punkt eine unendlich kleine Translation erfährt, und dann um denselben als Zentrum eine unendlich kleine ebene Rotation stattfindet.

Die nächste Frage ist nun die, wie die Translation und die Rotation von der Wahl der Bezugspunktes abhängen. Wählen wir als Bezugspunkt einen Punkt O'' mit den Koordinaten (X_0, Y_0), fixieren in ihm also das (ξ, η)-System, so daß der Winkel zwischen der neuen ξ-Achse und der x-Achse jetzt ψ ist; dann haben wir in den Gleichungen (12) statt (x_0, y_0) die Koordinaten (X_0, Y_0), statt φ den Winkel ψ einzusetzen und erhalten also:

$$(15) \quad \begin{cases} x = X_0 + \xi \cos\psi - \eta \sin\psi\,, \\ y = Y_0 + \xi \sin\psi + \eta \cos\psi\,; \end{cases}$$

und wenn wir unserem Punkte $P(x, y)$ die nämliche Verschiebung δx, δy, wie vorhin erteilen, folgt ebenso wie in Gleichung (13):

$$(16) \quad \begin{cases} \delta x = \delta X_0 - (y - Y_0)\, \delta\psi\,; \\ \delta y = \delta Y_0 + (x - X_0)\, \delta\psi\,. \end{cases}$$

Es müssen also die Relationen bestehen:

$$(17) \quad \begin{cases} \delta X_0 - (y - Y_0)\, \delta\psi = \delta x_0 - (y - y_0)\, \delta\varphi\,; \\ \delta Y_0 + (x - X_0)\, \delta\psi = \delta y_0 + (x - x_0)\, \delta\varphi\,. \end{cases}$$

Diese Gleichungen gelten für alle Werte von x und y; sie können also nur bestehen, wenn die Koeffizienten jeder Potenz von x und y einzeln gleich Null werden. Also folgt aus (17):

$$(18) \quad \begin{cases} \delta X_0 + Y_0\, \delta\psi = \delta x_0 + y_0\, \delta\varphi\,; \\ \delta Y_0 - X_0\, \delta\psi = \delta y_0 - x_0\, \delta\varphi\,; \\ \delta\psi = \delta\varphi\,; \end{cases}$$

und gemäß der letzten dieser Gleichungen lassen sich die beiden ersten schreiben:

$$(19) \quad \begin{cases} \delta X_0 = \delta x_0 + (y_0 - Y_0)\, \delta\varphi\,; \\ \delta Y_0 = \delta y_0 - (x_0 - X_0)\, \delta\varphi\,. \end{cases}$$

D. h. die Translationskomponenten δX_0, δY_0 sind verschieden von den alten δx_0, δy_0, aber der Rotationswinkel $\delta\varphi$ ist derselbe geblieben. Also: Bei Veränderung des Bezugspunktes verändert sich die Translation, der Rotationswinkel aber bleibt erhalten.

Dieses Resultat legt die Frage nahe, ob nicht durch geeignete Wahl des Bezugspunktes die Translation ganz zum Verschwinden gebracht werden könne. Aus den geometrischen Betrachtungen der Nr. 66 wissen wir, daß dies in der Tat der Fall sein muß, da eine beliebige ebene Bewegung einer Rotation äquivalent ist. Nennen wir den zu

bestimmenden Bezugspunkt, der dieses leistet, $\bar{x}, \bar{y}$, so muß $\delta \bar{x} = \delta \bar{y} = 0$ sein. Aus Gleichung (19) ergibt sich, indem man $X_0, Y_0, \delta X_0, \delta Y_0$ durch $\bar{x}, \bar{y}, 0, 0$ ersetzt:

$$0 = \delta x_0 + (y_0 - \bar{y})\delta\varphi,$$
$$0 = \delta y_0 + (x_0 - \bar{x})\delta\varphi,$$

woraus sich für den ausgezeichneten Bezugspunkt $(\bar{x}, \bar{y})$, der also offenbar mit dem Momentanzentrum identisch ist, ergibt:

(20)
$$\begin{cases} \bar{x} = x_0 - \dfrac{\delta y_0}{\delta\varphi}, \\ \bar{y} = y_0 + \dfrac{\delta x_0}{\delta\varphi}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen drücken die Koordinaten des Momentanzentrums der ebenen Bewegung aus durch die Koordinaten (x_0, y_0) des beliebigen Anfangspunktes des (ξ, η)-Systems, die Verschiebung $\delta x_0, \delta y_0$ desselben und den unendlich kleinen Rotationswinkel $\delta\varphi$. Betont sei besonders, daß (20) die Koordinaten des Momentanzentrums im Raume angibt, nicht im Körper. Den Ort des Momentanzentrums im Körper werden wir später bestimmen, wenn wir den Gleichungen (20) eine geeignetere Form gegeben haben. Jedenfalls haben wir jetzt auch analytisch den Satz bewiesen, daß jede unendlich kleine ebene Bewegung des starren Körpers eine unendlich kleine Rotation um eine Achse ist.

Und wenn dieser Satz mit dem anderen in dieser Nummer bewiesenen kombiniert wird, daß jede unendlich kleine ebene Bewegung durch eine geeignete Translation und eine Rotation hervorgebracht werden kann, so folgt auch der Satz, „daß zwei gleich große entgegengesetzt gerichtete unendlich kleine Rotationen um parallele Achsen eine unendlich kleine Translation in der zu den Achsen senkrechten Ebene sind", alles Aussagen, die wir schon aus der Nr. 66 kennen, und die hier analytisch bewiesen sind.

Wir wollen uns nun die Verschiebung $\delta x, \delta y$ eines beliebigen Punktes P des starren Körpers in der Zeit δt vor sich gehend denken. Die Gleichungen (18) sowie alle folgenden bleiben natürlich auch nach Division mit δt richtig; gehen wir nun zur Grenze $\delta t = 0$ über, so gehen

$$\frac{\delta x}{\delta t}, \frac{\delta y}{\delta t}, \frac{\delta x_0}{\delta t}, \frac{\delta y_0}{\delta t}, \frac{\delta\varphi}{\delta t} \text{ resp. über in } \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dx_0}{dt}, \frac{dy_0}{dt}, \frac{d\varphi}{dt}.$$

Wir haben also folgende Gleichungen, die (18) entsprechen:

(21)
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dx_0}{dt} - (y - y_0)\dfrac{d\varphi}{dt}, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dy_0}{dt} + (x - x_0)\dfrac{d\varphi}{dt}. \end{cases}$$

$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ sind die Geschwindigkeitskomponenten eines beliebigen Punktes des starren Körpers; $\frac{dx_0}{dt}, \frac{dy_0}{dt}$ diejenigen des willkürlich vorgeschriebenen Bezugspunktes; $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$ ist die Winkelgeschwindigkeit der um den Bezugspunkt erfolgenden ebenen Rotation. Die Gleichungen (21), die von Euler herrühren, gestatten also, die Geschwindigkeit eines beliebigen Körperpunktes auszudrücken durch die Geschwindigkeit eines willkürlich gegebenen und die — von der Wahl des Bezugspunktes unabhängige — Winkelgeschwindigkeit.

Insbesondere ergibt sich für die Koordinaten $(\bar{x}, \bar{y})$ des Momentanzentrums aus (20):

$$(22)\quad \begin{cases} \bar{x} = x_0 - \frac{dy_0}{dt} \frac{1}{\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)} = x_0 - \frac{1}{\omega} \frac{dy_0}{dt}, \\ \bar{y} = y_0 + \frac{dx_0}{dt} \frac{1}{\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)} = y_0 + \frac{1}{\omega} \frac{dx_0}{dt}. \end{cases}$$

Das Momentanzentrum ist also bestimmt durch die Koordinaten (x_0, y_0) eines willkürlich vorgeschriebenen Bezugspunktes, die Geschwindigkeit $\left(\frac{dx_0}{dt}, \frac{dy_0}{dt}\right)$ desselben und die Winkelgeschwindigkeit ω.

Im allgemeinen sind natürlich $x_0, y_0, \frac{dx_0}{dt}, \frac{dy_0}{dt}, \omega$ Funktionen der Zeit, da der Körper sich in einer beliebigen ebenen Bewegung befindet; also stellen die Gleichungen

$$(23)\quad \begin{cases} \bar{x} = \bar{x}(t), \\ \bar{y} = \bar{y}(t) \end{cases}$$

die Parameterdarstellung derjenigen ebenen Kurve dar, die das Momentanzentrum im Laufe der Zeit im Raume beschreibt; (22) ist mit anderen Worten die Gleichung der Raumzentrode.

Um nun die Gleichung der Körperzentrode zu erhalten, haben wir nur mittels der allgemeinen Transformationsformeln (12) auf das Koordinatensystem (ξ, η) überzugehen; nennen wir die $\bar{x}, \bar{y}$ entsprechenden Werte $\bar{\xi}, \bar{\eta}$, so folgt aus (12) und (22):

$$\bar{\xi} \cos\varphi - \bar{\eta} \sin\varphi = -\frac{1}{\omega} \frac{dy_0}{dt},$$

$$\bar{\xi} \sin\varphi + \bar{\eta} \cos\varphi = +\frac{1}{\omega} \frac{dx_0}{dt},$$

folglich ergibt sich für $\bar{\xi}$ und $\bar{\eta}$:

$$(24)\quad \begin{cases} \bar{\xi} = \frac{1}{\omega} \left\{ \frac{dx_0}{dt} \sin\varphi - \frac{dy_0}{dt} \cos\varphi \right\}, \\ \bar{\eta} = \frac{1}{\omega} \left\{ \frac{dx_0}{dt} \cos\varphi + \frac{dy_0}{dt} \sin\varphi \right\}. \end{cases}$$

die beide zusammen die Gleichung der Körperzentrode darstellen. Aus der geometrischen Darstellung wissen wir bereits, daß die letztere auf der Raumzentrode abrollt.

Wir wollen dies an einem ganz einfachen Beispiele illustrieren. Ein Stab von der Länge l sei gezwungen, mit je einem Ende auf der x- resp. y-Achse zu gleiten; es wird nach der Lage und der Art der beiden Zentroden gefragt (Fig. 95). Wir nehmen den Punkt O', in dem das eine Stabende die x-Achse berührt, als Anfangspunkt für ein mit dem Stabe verbundenes (ξ, η)-System, und zwar werde die η-Achse längs des Stabes gerechnet, positiv von O' nach A gerichtet. Senkrecht

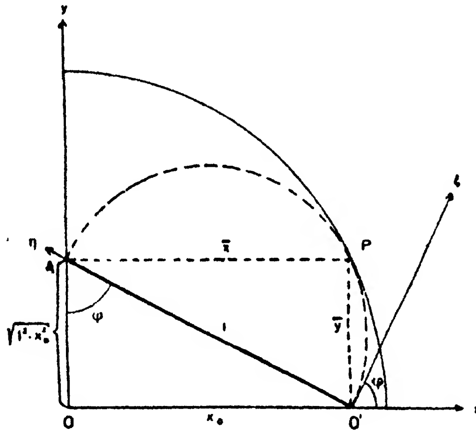


Fig. 95.

dazu in O' ist die ξ-Achse gezogen. Der Winkel (ξ, x) sei wieder φ. Auch der Winkel $(\widehat{OAO'})$ ist gleich φ; nennen wir noch $\overline{OO'} = x_0$, so ist $OA = \sqrt{l^2 - x_0^2}$; also:

$$\cos\varphi = \frac{1}{l}\sqrt{l^2 - x_0^2}; \qquad \sin\varphi = \frac{x_0}{l};$$

mithin ist die Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\frac{dx_0}{dt}}{\sqrt{l^2 - x_0^2}}.$$

y_0, die y-Koordinate des Bezugspunktes, ist gleich Null; also liefern die Gleichungen (22) für das Momentanzentrum:

$$(25) \qquad \begin{cases} \bar{x} = x_0, \\ \bar{y} = \sqrt{l^2 - x_0^2}. \end{cases}$$

Das Momentanzentrum ist also der Schnittpunkt P der durch O' gehenden Vertikalen und der durch A gehenden Horizontalen. Durch Elimination von x_0 folgt als Bahngleichung der Raumzentrode aus (25):

$$\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = l^2; \tag{26}$$

das ist also ein Kreis mit dem Radius l um den Koordinatenanfangspunkt O des festen Systems; er ist in Figur (95) ausgezogen.

Anderseits folgt die Gleichung der Körperzentrode aus (24), in dem die oben angegebenen Werte von cos φ, sin φ, ω, x_0, y_0 eingesetzt werden. So ergibt sich:

$$\begin{cases} \bar{\xi} = \sqrt{l^2 - x_0^2} \cdot \frac{x_0}{l}, \\ \bar{\eta} = (l^2 - x_0^2) \cdot \frac{1}{l}. \end{cases} \tag{27}$$

Eliminiert man daraus den Parameter x_0, so erhält man als Gleichung der Körperzentrode:

$$\bar{\xi}^2 + \bar{\eta}^2 - l\,\bar{\eta} = 0,$$

oder in bequemerer Schreibweise:

$$\bar{\xi}^2 + \left(\bar{\eta} - \frac{l}{2}\right)^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2, \tag{28}$$

woraus hervorgeht, daß auch die Körperzentrode ein Kreis, und zwar mit dem Radius $\frac{1}{2}\,l$ um die Mitte des Stabes $\overline{AO'}$ als Zentrum ist, der in Fig. 95 gestrichelt eingetragen ist. Gemäß den Bedingungen der Aufgabe kommt als Raumzentrode nur der im ersten Quadranten liegende, in Fig. 95 ausgezogene Viertelkreis, als Körperzentrode der in der Figur gestrichelte Halbkreis in Frage. Diese beiden Kurvenstücke sind nun, was für das Rollen ohne Gleiten Vorbedingung ist, gleich lang, und man erkennt durch den Augenschein, daß durch das Abrollen des gestrichelten Halbkreises auf dem ausgezogenen Viertelkreise tatsächlich die vorgeschriebene Bewegung des starren Körpers dargestellt wird; der jeweilige Berührungspunkt P ist das Momentanzentrum.

71. Analytische Darstellung der allgemeinsten Bewegung eines starren Körpers.

Führt der starre Körper nicht, wie bisher, eine ebene Bewegung aus, so muß die Betrachtung auf den Raum ausgedehnt werden. Außer dem festen Koordinatensystem (x, y, z) nehmen wir im Körper ein in ihm verankertes System (ξ, η, ζ) an. Sein willkürlich wählbarer Anfangspunkt O' habe die Koordinaten (x_0, y_0, z_0). Betrachten wir nun einen beliebigen Körperpunkt P, der im Körper die Koordinaten (ξ, η, ζ), im Raume (x, y, z) hat, so bestehen die bekannten Transformationsformeln:

$$(29)\qquad \begin{cases} x - x_0 = \alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta + \alpha_3 \zeta\,, \\ y - y_0 = \beta_1 \xi + \beta_2 \eta + \beta_3 \zeta\,, \\ z - z_0 = \gamma_1 \xi + \gamma_2 \eta + \gamma_3 \zeta\,. \end{cases}$$

Die Lage des Körpers ist vollkommen bestimmt, wenn die Lage des Koordinatenanfangspunktes des beweglichen Systems sowie die Richtung seiner Achsen bekannt ist. Diese Richtungen sind in (29) durch die 9 Richtungskosinusse $\alpha_1 \ldots \gamma_3$ ausgedrückt, zwischen denen aber bekanntlich 6 Relationen, die wir später notieren werden, bestehen; also sind in toto 6 Daten erforderlich, um die Lage des starren Körpers

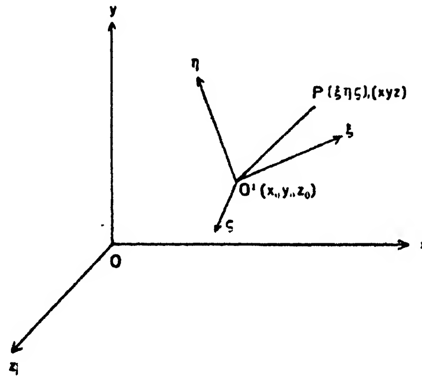


Fig. 96.

im Raume zu fixieren, entsprechend seinen 6 Freiheitsgraden. Die Transformationsgleichungen beziehen sich auf den in Fig. 96 dargestellten Fall.

Es ist offenbar das Quadrat des Abstandes des betrachteten Punktes P von O' gänzlich unabhängig davon, welches Koordinatensystem zugrunde gelegt wird; es ist also:

$$(30)\qquad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2\,;$$

beide Seiten dieser Gleichung sind positive quadratische Formen von 3 Variabeln, die durch die Substitutionsgleichungen (29) ineinander übergeführt werden. Die Diskriminante beider quadratischer Formen ist gleich der Einheit. Wir betrachten $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$ als die ursprüngliche, durch (29) in $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$ transformierte quadratische Form. Nach einem bekannten, schon früher (auf pag. 251) benutzten Satze ist nun die Diskriminante der transformierten quadratischen Form (hier $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$) gleich dem Produkt aus der Diskriminante der ursprünglichen quadratischen Form und dem Quadrate der Substitutionsdeterminante. In unserem Falle ist also zufolge dieses Satzes:

(31)
$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 1 ,$$

also:

$$\Delta = \pm 1 .$$

Unser (ξ, η, ζ)-System ist so gewählt, daß, wenn die positiven ξ- und η-Richtungen resp. mit den positiven x- resp. y-Richtungen parallel werden, dann auch die positive ζ-Richtung der positiven z-Richtung parallel wird. In diesem Spezialfalle haben die Richtungskosinusse folgende Werte:

$$\begin{array}{lll} \alpha_1 = 1; & \alpha_2 = 0; & \alpha_3 = 0; \\ \beta_1 = 0; & \beta_2 = 1; & \beta_3 = 0; \\ \gamma_1 = 0; & \gamma_2 = 0; & \gamma_3 = 1; \end{array}$$

woraus folgt, daß bei uns sein muß:

(32)
$$\Delta = +1 .$$

Wir wollen jetzt die 6 Relationen bilden, die zwischen den 9 Richtungskosinussen $\alpha_1 \ldots \gamma_3$ bestehen. Zu diesem Zwecke tragen wir auf der rechten Seite von (30) die Werte von $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ aus (29) ein. Dann folgt:

$$\begin{aligned} \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \xi^2(\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2) + \eta^2(\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2) + \zeta^2(\alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2) \\ + 2\xi\eta(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2) + 2\eta\zeta(\alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3) \\ + 2\zeta\xi(\alpha_3\alpha_1 + \beta_3\beta_1 + \gamma_3\gamma_1) , \end{aligned}$$

und daraus sofort weiter:

(33)
$$\left\{ \begin{array}{ll} \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1; & \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0; \\ \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 = 1; & \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3 = 0; \\ \alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 = 1; & \alpha_3\alpha_1 + \beta_3\beta_1 + \gamma_3\gamma_1 = 0 . \end{array} \right.$$

Dies sind die gewünschten Relationen, die man aber noch in anderer Form ausdrücken kann. Wegen der Bedeutung der $\alpha_1 \ldots \gamma_3$ als Richtungskosinusse kann man nun die Gleichungen (29) in folgender Form nach ξ, η, ζ auflösen:

(34)
$$\left\{ \begin{array}{l} \xi = \alpha_1(x - x_0) + \beta_1(y - y_0) + \gamma_1(z - z_0) , \\ \eta = \alpha_2(x - x_0) + \beta_2(y - y_0) + \gamma_2(z - z_0) , \\ \zeta = \alpha_3(x - x_0) + \beta_3(y - y_0) + \gamma_3(z - z_0) . \end{array} \right.$$

und indem man diese Werte in die linke Seite von (30) einträgt, folgen ganz analog wie vorhin die 6 Beziehungen:

(35)
$$\left\{ \begin{array}{ll} \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1; & \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0; \\ \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1; & \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3 = 0; \\ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1; & \gamma_1\alpha_1 + \gamma_2\alpha_2 + \gamma_3\alpha_3 = 0; \end{array} \right.$$

diese stimmen inhaltlich mit den 6 Gleichungen (33) überein, aber ihre Form ist anders. Wir benutzen beide nebeneinander, je nach ihrer größeren Bequemlichkeit.

Lösen wir endlich das Gleichungssystem (29) nach ξ, η, ζ durch die gewöhnlichen Methoden auf, ohne davon Gebrauch zu machen, daß die $\alpha_1 \ldots \gamma_3$ Richtungskosinusse sind, so folgt:

$$(36)\quad \begin{cases} \xi = (x-x_0)\dfrac{\beta_2\gamma_3-\beta_3\gamma_2}{\Delta} + (y-y_0)\dfrac{\gamma_2\alpha_3-\gamma_3\alpha_2}{\Delta} + (z-z_0)\dfrac{\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2}{\Delta}, \\ \eta = (x-x_0)\dfrac{\beta_3\gamma_1-\beta_1\gamma_3}{\Delta} + (y-y_0)\dfrac{\gamma_3\alpha_1-\gamma_1\alpha_3}{\Delta} + (z-z_0)\dfrac{\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3}{\Delta}, \\ \zeta = (x-x_0)\dfrac{\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1}{\Delta} + (y-y_0)\dfrac{\gamma_1\alpha_2-\gamma_2\alpha_1}{\Delta} + (z-z_0)\dfrac{\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1}{\Delta}. \end{cases}$$

Da $\Delta = 1$ ist, erhält man durch Vergleich von (34) und (36) noch die Beziehungen:

$$(37)\quad \begin{cases} \alpha_1 = \beta_2\gamma_3-\beta_3\gamma_2; & \beta_1 = \gamma_2\alpha_3-\gamma_3\alpha_2; & \gamma_1 = \alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2; \\ \alpha_2 = \beta_3\gamma_1-\beta_1\gamma_3; & \beta_2 = \gamma_3\alpha_1-\gamma_1\alpha_3; & \gamma_2 = \alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3; \\ \alpha_3 = \beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1; & \beta_3 = \gamma_1\alpha_2-\gamma_2\alpha_1; & \gamma_3 = \alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1. \end{cases}$$

Wir wollen nun dem starren Körper eine unendlich kleine Verschiebung erteilen, so daß der Punkt P vom Raumpunkte (x, y, z) an den Raumpunkt $(x+\delta x,\ y+\delta y,\ z+\delta z)$ rückt; ξ, η, ζ bleiben dabei natürlich unverändert, da das (ξ, η, ζ)-System sich mit dem Körper mitbewegt. Nach (29) erhalten wir also:

$$(38)\quad \begin{cases} \delta x = \delta x_0 + \xi\,\delta\alpha_1 + \eta\,\delta\alpha_2 + \zeta\,\delta\alpha_3, \\ \delta y = \delta y_0 + \xi\,\delta\beta_1 + \eta\,\delta\beta_2 + \zeta\,\delta\beta_3, \\ \delta z = \delta z_0 + \xi\,\delta\gamma_1 + \eta\,\delta\gamma_2 + \zeta\,\delta\gamma_3. \end{cases}$$

In diesen Gleichungen wollen wir ξ, η, ζ nach (34) durch x, y, z ausdrücken. Das liefert z. B. für δx:

$$\begin{aligned} \delta x = \delta x_0 &+ \delta\alpha_1[\alpha_1(x-x_0) + \beta_1(y-y_0) + \gamma_1(z-z_0)] \\ &+ \delta\alpha_2[\alpha_2(x-x_0) + \beta_2(y-y_0) + \gamma_2(z-z_0)] \\ &+ \delta\alpha_3[\alpha_3(x-x_0) + \beta_3(y-y_0) + \gamma_3(z-z_0)], \end{aligned}$$

oder anders geordnet:

$$\begin{aligned} \delta x = \delta x_0 &+ (x-x_0)[\alpha_1\delta\alpha_1 + \alpha_2\delta\alpha_2 + \alpha_3\delta\alpha_3] \\ &+ (y-y_0)[\beta_1\delta\alpha_1 + \beta_2\delta\alpha_2 + \beta_3\delta\alpha_3] \\ &+ (z-z_0)[\gamma_1\delta\alpha_1 + \gamma_2\delta\alpha_2 + \gamma_3\delta\alpha_3]. \end{aligned}$$

Durch Variation der ersten Gleichung (35) folgt aber sofort, daß der Faktor von $(x-x_0)$ gleich Null ist; also folgt einfacher für δx, wie auch für δy und δz:

$$\delta x = \delta x_0 + (y - y_0)[\beta_1 \delta \alpha_1 + \beta_2 \delta \alpha_2 + \beta_3 \delta \alpha_3] + (z - z_0)[\gamma_1 \delta \alpha_1 + \gamma_2 \delta \alpha_2 + \gamma_3 \delta \alpha_3],$$
$$\delta y = \delta y_0 + (x - x_0)[\alpha_1 \delta \beta_1 + \alpha_2 \delta \beta_2 + \alpha_3 \delta \beta_3] + (z - z_0)[\gamma_1 \delta \beta_1 + \gamma_2 \delta \beta_2 + \gamma_3 \delta \beta_3],$$
$$\delta z = \delta z_0 + (x - x_0)[\alpha_1 \delta \gamma_1 + \alpha_2 \delta \gamma_2 + \alpha_3 \delta \gamma_3] + (y - y_0)[\beta_1 \delta \gamma_1 + \beta_2 \delta \gamma_2 + \beta_3 \delta \gamma_3].$$

Die Klammerausdrücke, die als Faktoren von $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ auftreten, stehen miteinander ebenfalls in Beziehungen durch die Gleichungen (35); z. B. ergibt die vierte dieser Gleichungen durch Variation:

$$\alpha_1 \delta \beta_1 + \alpha_2 \delta \beta_2 + \alpha_3 \delta \beta_3 = -(\beta_1 \delta \alpha_1 + \beta_2 \delta \alpha_2 + \beta_3 \delta \alpha_3),$$

usw., so daß die 6 Klammerfaktoren sich auf 3 reduzieren, für die wir die folgenden Abkürzungen einführen, deren physikalische Bedeutung sofort klar werden wird:

(39)
$$\begin{cases} \beta_1 \delta \gamma_1 + \beta_2 \delta \gamma_2 + \beta_3 \delta \gamma_3 = \delta p, \\ \gamma_1 \delta \alpha_1 + \gamma_2 \delta \alpha_2 + \gamma_3 \delta \alpha_3 = \delta q, \\ \alpha_1 \delta \beta_1 + \alpha_2 \delta \beta_2 + \alpha_3 \delta \beta_3 = \delta r. \end{cases}$$

Damit werden die obigen Gleichungen:

(40)
$$\begin{cases} \delta x = \delta x_0 + 0 - (y - y_0)\delta r + (z - z_0)\delta q, \\ \delta y = \delta y_0 + (x - x_0)\delta r + 0 - (z - z_0)\delta p, \\ \delta z = \delta z_0 - (x - x_0)\delta q + (y - y_0)\delta p + 0. \end{cases}$$

Wir können nach (40) die Verschiebung δx, δy, δz wieder als Summe zweier Verrückungen $\delta x' + \delta x''$, $\delta y' + \delta y''$, $\delta z' + \delta z''$ auffassen, derartig, daß wir setzen:

(41 a)
$$\delta x' = \delta x_0; \quad \delta y' = \delta y_0; \quad \delta z' = \delta z_0;$$

(41 b)
$$\begin{cases} \delta x'' = -(y - y_0)\delta r + (z - z_0)\delta q; \\ \delta y'' = (x - x_0)\delta r - (z - z_0)\delta p; \\ \delta z'' = -(x - x_0)\delta q + (y - y_0)\delta p. \end{cases}$$

Die erste Verrückung mit den Komponenten $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ ist offenbar allen Punkten des Körpers gemeinsam, da die Koordinaten aller Punkte eine gleich große Änderung erfahren: wir haben es mit einer unendlich kleinen Translation des starren Körpers zu tun.

Um den zweiten Teil der Verschiebung zu charakterisieren, fragen wir zunächst, ob es Punkte des Körpers gibt, die ihre Lage im Raume während der Verschiebung unverändert beibehalten. Für diese speziellen Punkte muß $\delta x'' = \delta y'' = \delta z'' = 0$ sein, also nach den Gleichungen (41 b), wenn man die Koordinaten dieser ausgezeichneten Punkte durch $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ andeutet:

$$(\bar{y}-y_0)\delta r = (\bar{z}-z_0)\delta q\,,$$
$$(\bar{x}-x_0)\delta r = (\bar{z}-z_0)\delta p\,,$$
$$(\bar{x}-x_0)\delta q = (\bar{y}-y_0)\delta p\,,$$

oder in anderer Schreibweise:

$$\delta p : \delta q : \delta r = (\bar{x}-x_0) : (\bar{y}-y_0) : (\bar{z}-z_0)\,. \tag{42}$$

Das ist aber die Gleichung einer Geraden durch den Punkt (x_0, y_0, z_0), deren Richtungskosinusse proportional δp, δq, δr sind. Eine derartig beschaffene unendlich kleine Verrückung, bei der alle Punkte einer Geraden ihre Lage beibehalten, ist eine unendlich kleine Rotation um diese Gerade als Achse. Alle Punkte bewegen sich also auf zur Achse konzentrischen Kreisen in zur Achse senkrechten Ebene. Wie groß ist der unendlich kleine Drehungswinkel? Um diesen festzustellen, rechnen wir den Betrag $\delta s''$ der Verschiebung $\delta \mathfrak{s}''$ mit den Komponenten $\delta x''$, $\delta y''$, $\delta z''$ aus. Wir erhalten für das Quadrat derselben offenbar:

$$\begin{aligned}\delta s''^2 = (y-y_0)^2\delta r^2 + (z-z_0)^2\delta q^2 + (x-x_0)^2\delta r^2 + (z-z_0)^2\delta p^2 \\ + (x-x_0)^2\delta q^2 + (y-y_0)^2\delta p^2 \\ - 2(y-y_0)(z-z_0)\delta q\delta r - 2(x-x_0)(z-z_0)\delta p\delta r \\ - 2(x-x_0)(y-y_0)\delta p\delta q\,.\end{aligned}$$

Diesem Ausdruck kann man eine übersichtlichere Form geben, wenn man die drei Terme $(x-x_0)^2\delta p^2$, $(y-y_0)^2\delta q^2$, $(z-z_0)^2\delta r^2$ addiert und wieder subtrahiert. Man erhält dann durch geeignete Zusammenfassung:

$$\begin{aligned}\delta s''^2 = [(x-x_0)^2 + (y-y_0)_2 + (z-z_0)^2]\,[\delta p^2 + \delta q^2 + \delta r^2] \\ -[(x-x_0)\delta p + (y-y_0)\delta q + (z-z_0)\delta q]^2\,,\end{aligned}$$

und dabei ist $+\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$ offenbar der Abstand R des betrachteten Punktes (x, y, z) von dem Bezugspunkte (x_0, y_0, z_0); vektoriell gesprochen können wir sagen, daß $\mathfrak{R}$ der Lagenvektor des Punktes (x, y, z) in bezug auf (x_0, y_0, z_0) ist. Setzen wir noch $+\sqrt{\delta p^2 + \delta q^2 + \delta z^2} = \delta\varphi$, so kann die letzte Gleichung geschrieben werden:

$$\delta s''^2 = R^2\delta\varphi^2 - R^2\delta\varphi^2\left[\frac{(x-x_0)\delta p + (y-y_0)\delta q + (z-z_0)\delta r}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)+(z-z_0)^2}\cdot\sqrt{\delta p^2+\delta q^2+\delta r^2}}\right]$$

Nun sind offenbar

$$\frac{x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}$$

die Richtungskosinusse des Lagenvektors $\mathfrak{R}$ des betrachteten Punktes, anderseits

$$\frac{\delta p,\ \delta q,\ \delta r}{\sqrt{\delta p^2+\delta q^2+\delta r^2}}$$

diejenigen der Rotationsachse (Fig. 97). Also ist die eckige Klammer der letzten Gleichung gleich dem Kosinus des Winkels Θ zwischen Rotationsachse und Lagenvektor $\mathfrak{R}$. Also können wir die letzte Gleichung schreiben:

$$\delta s'' = R \cdot \delta \varphi \cdot \sin \Theta. \tag{43}$$

$R \sin \Theta$ ist nun offenbar gleich dem in der Fig. 97 mit a bezeichneten senkrechten Abstande des Punktes (x, y, z) von der Achse; also ist die Verschiebung dieses Punktes durch die Rotation:

$$\delta s'' = a \cdot \delta \varphi. \tag{44}$$

Mithin ist $\delta\varphi$ der Rotationswinkel:

$$\delta \varphi = + \sqrt{\delta p^2 + \delta q^2 + \delta r^2}. \tag{45}$$

Als Gesamtresultat ergeben sich also aus unseren analytischen Untersuchungen die beiden schon bekannten Sätze:

„Die allgemeinste unendlich kleine Bewegung eines freibeweglichen starren Körpers ist eine unendlich kleine Translation eines beliebig gewählten Bezugspunktes und eine Rotation um eine durch denselben gehende Achse.“

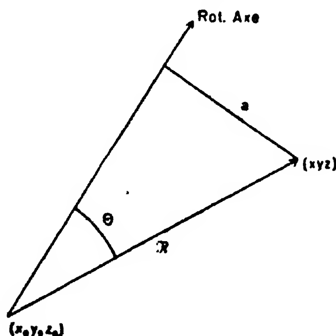


Fig. 97.

Ist ein Punkt des Körpers festgehalten, so wählen wir diesen als Bezugspunkt; die Translation verschwindet dann und es resultiert der Satz:

„Die allgemeinste Bewegung eines in einem Punkte festgehaltenen starren Körpers ist eine unendlich kleine Rotation um eine durch diesen Punkt gehende Achse.“

Man kann, ebenso wie im Falle der ebenen Bewegung, fragen, wie eine Veränderung des Bezugspunktes die Größe der Translation und der Rotation beeinflußt. Nennen wir den neuen Bezugspunkt O'', seine Koordinaten X_0, Y_0, Z_0, bezeichnen wir die Richtungskosinusse der neuen ξ-, η-, ζ-Achsen durch O'' gegen die Achsen des festen Systems durch $\alpha_1' \ldots \gamma_3'$, so erhält man, wenn man im übrigen die ganz analogen Überlegungen und Abkürzungen benutzt, die nämliche Verschiebung $\delta x, \delta y, \delta z$ ausgedrückt durch:

$$(46)\quad \begin{cases} \delta x = \delta X_0 - (y - Y_0)\,\delta r' + (z - Z_0)\,\delta q', \\ \delta y = \delta Y_0 + (x - X_0)\,\delta r' - (z - Z_0)\,\delta p', \\ \delta z = \delta Z_0 - (x - X_0)\,\delta q' + (y - Y_0)\,\delta p', \end{cases}$$

wo z. B. $\delta p'$ die Abkürzung für $\beta_1'\delta\gamma_1' + \beta_2'\delta\gamma_2' + \beta_3'\delta\gamma_3'$ gemäß (39) ist. Der Vergleich von (40) und (46) ergibt dann folgende, für alle Werte von x, y, z gültigen Relationen:

$$\begin{aligned} \delta X_0 - (y - Y_0)\delta r' + (z - Z_0)\,\delta q' &= \delta x_0 - (y - y_0)\,\delta r + (z - z_0)\,\delta q, \\ \delta Y_0 + (x - X_0)\delta r' - (z - Z_0)\,\delta p' &= \delta y_0 + (x - x_0)\,\delta r - (z - z_0)\,\delta p, \\ \delta Z_0 - (x - X_0)\,\delta q' + (y - Y_0)\,\delta p' &= \delta z_0 - (x - x_0)\,\delta q + (y - y_0)\,\delta p. \end{aligned}$$

Diese können nur bestehen, wenn die zu gleichen Potenzen von x, y, z gehörigen Faktoren auf beiden Seiten gleich sind; das liefert zunächst:

$$\delta p' = \delta p; \qquad \delta q' = \delta q; \qquad \delta r' = \delta r,$$

d. h. der resultierende Drehungswinkel um die durch „O" gehende Achse ist gleich $\delta\varphi' = \sqrt{\delta p'^2 + \delta q'^2 + \delta r'^2} = \delta\varphi$, d. h. von der Wahl des Bezugspunktes unabhängig. Mit dieser Vereinfachung werden die obigen Gleichungen:

$$(47)\quad \begin{cases} \delta X_0 = \delta x_0 - (Y_0 - y_0)\,\delta r + (Z_0 - z_0)\,\delta q, \\ \delta Y_0 = \delta y_0 + (X_0 - x_0)\,\delta r - (Z_0 - z_0)\,\delta p, \\ \delta Z_0 = \delta z_0 - (X_0 - x_0)\,\delta q + (Y_0 - y_0)\,\delta p. \end{cases}$$

Diese Gleichungen geben die Translationskomponenten des neuen Bezugspunktes (δX_0, δY_0, δZ_0) an, ausgedrückt durch die Translationskomponenten des alten Bezugspunktes, die den Drehungswinkel bestimmenden Größen δp, δq, δr, und die Koordinaten des neuen und alten Bezugspunktes. Die Translation ist also ebenso wie im ebenen Falle sehr wesentlich von der Wahl des Bezugspunktes abhängig. Es liegt nahe, zu fragen, ob derselbe so gewählt werden kann, daß die Richtung der Translation mit der der Rotationsachse übereinstimmt. Da nach (42) die Richtungskosinusse der Rotationsachse sich wie $\delta p : \delta q : \delta r$ verhalten, muß für einen derartigen Bezugspunkt $(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}, \bar{\bar{z}})$ gelten:

$$\delta\bar{\bar{x}} : \delta\bar{\bar{y}} : \delta\bar{\bar{z}} = \delta p : \delta q : \delta r,$$

also nach Gleichung (47):

$$(48)\quad \begin{aligned} \frac{\delta x_0 - (\bar{\bar{y}} - y_0)\,\delta r + (\bar{\bar{z}} - z_0)\,\delta q}{\delta p} &= \frac{\delta y_0 - (\bar{\bar{z}} - z_0)\,\delta p + (\bar{\bar{x}} - x_0)\,\delta r}{\delta q} \\ &= \frac{\delta z_0 - (\bar{\bar{x}} - x_0)\,\delta q + (\bar{\bar{y}} - y_0)\,\delta p}{\delta r}. \end{aligned}$$

Das ist aber die Gleichung einer Geraden mit den Richtungskosinussen $\frac{\delta p,\ \delta q,\ \delta r}{\sqrt{\delta p^2 + \delta q^2 + \delta r^2}}$, deren sämtliche Punkte $(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}, \bar{\bar{z}})$ die geforderte Eigenschaft besitzen, daß die Richtung der Translation parallel der Rotations-

achse wird. Gleichung (48) stellt daher selbst die Gleichung dieser ausgezeichneten Rotationsachse, der sogenannten „Zentralachse", dar. Wir haben damit auch analytisch gezeigt, daß die allgemeinste unendlich kleine Bewegung eines starren Körpers eine Schraubenbewegung ist.

Die Gleichungen (42) stellen die Lage der instantanen Rotationsachse im Raume dar. Im Falle, daß der Punkt (x_0, y_0, z_0) des starren Körpers im Raume fest ist, und wenn wir δp, δq, δr als Funktionen der Zeit betrachten, so stellen sie in Parameterdarstellung die Gesamtheit der durch den festen Punkt hindurchgehenden Rotationsachsen dar, und zwar bezogen auf das feste System, d. h. den Herpolhodiekegel. Drückt man in (42) x, y, z durch ξ, η, ζ aus, so folgt analog die Gleichung des Polhodiekegels.

Ganz ebenso ist (48), wenn darin $\delta x_0, \delta y_0, \delta z_0, \delta p, \delta q, \delta r, x_0, y_0, z_0$ als Funktionen der Zeit gegeben sind, die Gleichung der Regelfläche, die durch die Bewegung der Schraubenachse im Raume erzeugt wird, und wenn man alles durch ξ, η, ζ ausdrückt, würde sich die Gleichung der auf ihr schrotenden Regelfläche ergeben, die die Rotationsachsen im Körper erzeugen. So gelangt man analytisch zu den geometrischen Resultaten Poinsots.

Man kann die vorhergehenden Betrachtungen in einer wichtigen Weise abändern. Bisher zerlegten wir die allgemeinste Bewegung, indem wir einen beliebigen Bezugspunkt wählten, in eine Translation desselben und eine Rotation um eine durch den Bezugspunkt gehende Achse. Der Bezugspunkt (x_0, y_0, z_0) bewegt sich aber i. a. im Raume, und es ist manchmal eine andere Zerlegung zweckmäßig. Diese wird sofort geliefert durch eine andere Gruppierung der Gleichungen (40). Schreiben wir dieselben nämlich:

$$(49)\qquad \begin{cases} \delta x = [\delta x_0 + y_0 \delta r - z_0 \delta q] - y \delta r + z \delta q, \\ \delta y = [\delta y_0 + z_0 \delta p - x_0 \delta r] - z \delta p + x \delta r, \\ \delta z = [\delta z_0 + x_0 \delta q - y_0 \delta p] - x \delta q + y \delta p, \end{cases}$$

so ersieht man, daß die in eckigen Klammern stehenden Ausdrücke, da sie von x, y, z unabhängig sind, als die Komponenten $\delta x_0', \delta y_0', \delta z_0'$ einer dem ganzen Körper gemeinsamen Translation aufgefaßt werden können; anderseits stellen die übrigen Glieder, wie man durch Vergleich mit den Gleichungen (41 b) sofort sieht, die Komponenten einer Rotation um eine durch den festen Koordinatenanfangspunkt gehende Achse vor. Eine beliebige Bewegung kann also aufgefaßt werden als eine Translation, verbunden mit einer Rotation um eine durch den festen Koordinatenanfangspunkt gehende Achse. Diese Zerlegung werden wir für die Ableitung der Bewegungsgleichungen eines starren Körpers im folgenden Kapitel benutzen.

Endlich ist noch eine Darstellung möglich, die die allgemeinste Bewegung eines starren Körpers in Bezug auf die bewegten Achsen

ξ, η, ζ zerlegt; auch diese ist bei Aufstellung der Bewegungsgleichungen von großem Nutzen. Das (ξ, η, ζ)-System hat zur Zeit t eine bestimmte Lage; denken wir dem Körper eine unendlich kleine Verschiebung erteilt und dabei das (ξ, η, ζ)-System in seiner Lage zur Zeit t festgehalten, so können wir die Verrückung im Raume durch $\delta x, \delta y, \delta z$, wie vorher, charakterisieren, gleichzeitig aber auch natürlich durch $\delta \xi, \delta \eta, \delta \zeta$, bezogen auf das im Moment t festgehaltene (ξ, η, ζ)-System, oder anders ausgedrückt: bezogen auf ein festes System, das im Momente t mit dem beweglichen (ξ, η, ζ)-System zusammenfällt. Der Zusammenhang zwischen $\delta \xi, \delta \eta, \delta \zeta$ und $\delta x, \delta y, \delta z$ ist derselbe wie zwischen (x, y, z) und (ξ, η, ζ) in Gleichung (34), wo nur $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ zu setzen ist; also

$$(50) \qquad \begin{cases} \delta \xi = \alpha_1 \delta x + \beta_1 \delta y + \gamma_1 \delta z, \\ \delta \eta = \alpha_2 \delta x + \beta_2 \delta y + \gamma_2 \delta z, \\ \delta \zeta = \alpha_3 \delta x + \beta_3 \delta y + \gamma_3 \delta z. \end{cases}$$

Für δx, δy, δz setzen wir nun die Ausdrücke (38) ein; dann folgt unter Rücksicht auf (37) und (33) durch elementare Rechnungen, die den schon erledigten ganz analog sind:

$$(51) \qquad \begin{cases} \delta \xi = \delta \xi_0 + \zeta \delta \chi - \eta \delta \varrho, \\ \delta \eta = \delta \eta_0 + \xi \delta \varrho - \zeta \delta \pi, \\ \delta \zeta = \delta \zeta_0 + \eta \delta \pi - \xi \delta \chi, \end{cases}$$

wo $\delta \xi_0$, $\delta \eta_0$, $\delta \zeta_0$; $\delta \pi$, $\delta \chi$, $\delta \varrho$ folgende Abkürzungen sind:

$$(52) \qquad \begin{cases} \delta \xi_0 = \alpha_1 \delta x_0 + \beta_1 \delta y_0 + \gamma_1 \delta z_0, \\ \delta \eta_0 = \alpha_2 \delta x_0 + \beta_2 \delta y_0 + \gamma_2 \delta z_0, \\ \delta \zeta_0 = \alpha_3 \delta x_0 + \beta_3 \delta y_0 + \gamma_3 \delta z_0, \\ \delta \pi = \alpha_3 \delta \alpha_2 + \beta_3 \delta \beta_2 + \gamma_3 \delta \gamma_2 = -(\alpha_2 \delta \alpha_3 + \beta_2 \delta \beta_3 + \gamma_2 \delta \gamma_3), \\ \delta \chi = \alpha_1 \delta \alpha_3 + \beta_1 \delta \beta_3 + \gamma_1 \delta \gamma_3 = -(\alpha_3 \delta \alpha_1 + \beta_3 \delta \beta_1 + \gamma_3 \delta \gamma_1), \\ \delta \varrho = \alpha_2 \delta \alpha_1 + \beta_2 \delta \beta_1 + \gamma_2 \delta \gamma_1 = -(\alpha_1 \delta \alpha_2 + \beta_1 \delta \beta_2 + \gamma_1 \delta \gamma_2). \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (51) folgt ganz analog wie aus (40), daß eine beliebige Verrückung zusammengesetzt werden kann aus einer Translation $(\delta \xi_0, \delta \eta_0, \delta \zeta_0)$ und einer Rotation $(\delta \pi, \delta \chi, \delta \varrho)$ um eine durch den Koordinatenanfangspunkt des bewegten Systems gehende Achse.

Wir wollen noch einige Bemerkungen an Gleichung (45), die den Rotationswinkel angibt, anknüpfen. Es folgt unmittelbar aus derselben, daß δp, δq, δr selbst als spezielle Rotationswinkel betrachtet werden können, und es bleibt nur noch festzustellen, was für Rotationen ihnen entsprechen. Setzen wir zu dem Zwecke in den Gleichungen (41 b) etwa $\delta q = \delta r = 0$, so folgt:

$$\delta x'' = 0, \qquad \delta y'' = -(z - z_0) \delta p, \qquad \delta z'' = (y - y_0) \delta p,$$

und das ist eine Rotation um die x-Achse, und zwar mit δp als Rotationswinkel. Ebenso erhält man aus (41 b), wenn $\delta r = \delta p = 0$ gesetzt werden:

$$\delta x'' = (z - z_0)\delta q; \quad \delta y'' = 0; \quad \delta z'' = -(x - x_0)\delta q,$$

was eine Rotation um die y-Achse durch den Winkel δq darstellt. Ebenso stellt für $\delta p = \delta q = 0$ die Gleichung (41 b) eine Rotation um die z-Achse durch den Winkel δr vor.

Wir können also die allgemeine Rotation $(\delta x'', \delta y'', \delta z'')$, die in (41 b) charakterisiert ist, um eine Achse durch (x_0, y_0, z_0) mit den Richtungskosinussen $\frac{\delta p, \delta q, \delta r}{\sqrt{\delta p^2 + \delta q^2 + \delta r^2}}$ durch den Winkel $\delta\varphi = \sqrt{\delta p^2 + \delta q^2 + \delta r^2}$ ersetzen durch drei Rotationen um drei zueinander senkrechte, durch (x_0, y_0, z_0) gehende, den Koordinatenachsen parallele Geraden durch resp. die Winkel δp, δq, δr. Da auch die dem starren Körper erteilte Translation nach Gleichung (41 a) aus drei zueinander senkrechten δx_0, δy_0, δz_0 parallel den Koordinatenrichtungen vor sich gehenden Translationen ersetzt werden kann, so haben wir das für die Formulierung der Bewegungsgleichungen wichtige Resultat: Jede unendlich kleine Verschiebung eines freien starren Körpers kann durch drei Translationen parallel den Koordinatenachsen und durch drei Drehungen um Parallelen zu den Koordinatenachsen ersetzt werden.

Man erkennt auch leicht folgendes: Trägt man auf den Koordinatenachsen resp. die Stücke δp, δq, δr auf und konstruiert die Raumdiagonale des Parallelepipedons mit den Kantenlängen δp, δq, δr, so hat diese die Länge $\sqrt{\delta p^2 + \delta q^2 + \delta r^2}$ und eine Richtung, die durch die Verhältnisse der Richtungskosinusse $\delta p : \delta q : \delta r$ bestimmt ist. Die Raumdiagonale ist also der Richtung nach die Achse der resultierenden Rotation und dem Betrage nach ist sie gleich dem resultierenden Drehungswinkel. Verfährt man allgemein so, daß man auf den Drehungsachsen den zugehörigen Rotationswinkel abträgt, so kann man eine unendlich kleine Rotation als einen Vektor betrachten, dessen Betrag gleich dem Rotationswinkel, dessen Richtung gleich der der Rotationsachse ist: ein Resultat, das wir bereits im wesentlichen in Nr. 68 erkannt hatten.

Wir haben bisher auf die Zeit, in der die Verschiebungen vor sich gehen, keine Rücksicht genommen. Denken wir uns jetzt aber die Verschiebungen δx, δy, δz in der Zeit δt vor sich gehend, und gehen wir zur Grenze $\delta t = 0$ über, so gehen die Ausdrücke:

$$\frac{\delta x}{\delta t}, \frac{\delta y}{\delta t}, \frac{\delta z}{\delta t}, \frac{\delta x_0}{\delta t}, \frac{\delta y_0}{\delta t}, \frac{\delta z_0}{\delta t}, \frac{\delta p}{\delta t}, \frac{\delta q}{\delta t}, \frac{\delta r}{\delta t}$$

resp. über in die Größen:

$$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, \frac{dx_0}{dt}, \frac{dy_0}{dt}, \frac{dz_0}{dt}, \frac{dp}{dt}, \frac{dq}{dt}, \frac{dr}{dt}.$$

Die drei ersten sind die Geschwindigkeitskomponenten eines beliebigen Punktes des starren Körpers, die zweiten drei diejenigen des Bezugspunktes, und die letzten drei die Rotationsgeschwindigkeiten um durch

den Bezugspunkt gehende Parallelen zu den Koordinatenachsen. Aus (40) folgt also durch Division mit δt und Übergang zur Grenze $\delta t = 0$:

$$(53)\quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{dx_0}{dt} + (z - z_0)\frac{dq}{dt} - (y - y_0)\frac{dr}{dt}, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{dy_0}{dt} + (x - x_0)\frac{dr}{dt} - (z - z_0)\frac{dp}{dt}, \\ \frac{dz}{dt} = \frac{dz_0}{dt} + (y - y_0)\frac{dp}{dt} - (x - x_0)\frac{dq}{dt}, \end{cases}$$

oder in Vektorschreibweise, wenn die resultierende Rotationsgeschwindigkeit durch $\mathfrak{u}$, die Geschwindigkeiten resp. durch $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c}_0$ bezeichnet werden, endlich der Lagenvektor von (x, y, z) in Bezug auf (x_0, y_0, z_0) durch charakterisiert wird:

$$(54)\quad \begin{cases} \mathfrak{c}_x = \mathfrak{c}_{0x} + \{\mathfrak{R}_z \mathfrak{u}_y - \mathfrak{R}_y \mathfrak{u}_z\}, \\ \mathfrak{c}_y = \mathfrak{c}_{0y} + \{\mathfrak{R}_x \mathfrak{u}_z - \mathfrak{R}_z \mathfrak{u}_x\}, \\ \mathfrak{c}_z = \mathfrak{c}_{0z} + \{\mathfrak{R}_y \mathfrak{u}_x - \mathfrak{R}_x \mathfrak{u}_y\}; \end{cases}$$

darin sind aber, wie ein Blick auf Gleichung (31) des vierten Kapitels auf pag. 190 lehrt, die Ausdrücke in den geschweiften Klammern nichts

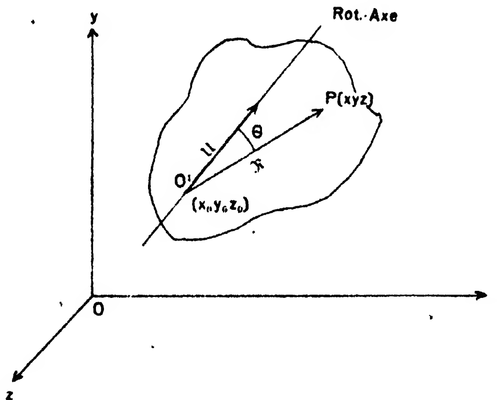


Fig. 98.

anderes als die Komponenten des Vektorproduktes $[\mathfrak{u}\,\mathfrak{R}]$, so daß (54) in sehr einfacher und übersichtlicher Weise geschrieben werden kann:

$$(55)\quad \mathfrak{c} = \mathfrak{c}_0 + [\mathfrak{u}\,\mathfrak{R}].$$

Dabei ist $\mathfrak{c}_0$ die Geschwindigkeit des willkürlichen Bezugspunktes (x_0, y_0, z_0), $\mathfrak{R}$ der Lagenvektor von diesem nach dem Punkte P (x, y, z), dessen Geschwindigkeit bestimmt werden soll; $\mathfrak{u}$ endlich die auf der durch (x_0, y_0, z) gehenden Rotationsachse aufgetragene Winkelgeschwindigkeit (Fig. 98). Durch geeignete Wahl des Bezugspunktes O' (x_0, y_0, z_0) kann

man natürlich erreichen, daß $\mathfrak{c}_0$ parallel $\mathfrak{u}$, d. h. parallel der Rotationsachse wird.

Mit Hilfe der Geschwindigkeitskomponenten kann man die Gleichungen (42) und (48) etwas bequemer schreiben, indem man überall durch δt dividiert und zur Grenze $\delta t = 0$ übergeht. (42) geht über in:

$$(56) \qquad (\bar{x} - x_0):(\bar{y} - y_0):(\bar{z} - z_0) = \frac{dp}{dt}:\frac{dq}{dt}:\frac{dr}{dt},$$

die also die Gleichung des Herpolhodiekegels durch den Punkt (x_0, y_0, z_0) darstellt, wenn dieser festgehalten wird. Analog wird die Gleichung der Zentralachse nach (48):

$$(57) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\frac{dx_0}{dt} - (\bar{y} - y_0)\frac{dr}{dt} + (\bar{z} - z_0)\frac{dq}{dt}}{\frac{dp}{dt}} &= \frac{\frac{dy_0}{dt} - (\bar{z} - z_0)\frac{dp}{dt} + (\bar{x} - x_0)\frac{dr}{dt}}{\frac{dq}{dt}} \\ &= \frac{\frac{dz_0}{dt} - (\bar{x} - x_0)\frac{dq}{dt} + (\bar{y} - y_0)\frac{dp}{dt}}{\frac{dr}{dt}}. \end{aligned} \right.$$

72. Die Eulerschen Winkel.

Die neun Größen $\alpha_1 \ldots \gamma_3$ gehorchen sechs Relationen, entsprechen also drei unabhängigen Daten. Es muß also möglich sein, sie durch drei unabhängige Stücke zum Ausdruck zu bringen. Dazu benutzt man meistens die drei sogenannten Eulerschen Winkel.

Wir denken uns zunächst den Anfangspunkt des (ξ, η, ζ)-Systems mit dem des im Raume festen (x, y, z)-Systems zusammenfallend, resp. was auf dasselbe herauskommt, durch den Koordinatenanfangspunkt des (ξ, η, ζ)-Systems dauernd Parallelen zu den x-, y-, z-Achsen gezogen, die wir auch als (x, y, z)-System bezeichnen wollen.

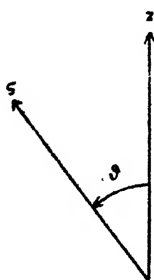


Fig. 99.

Dann schneiden sich die xy-Ebene und die $\xi\eta$-Ebene in einer durch den gemeinsamen Anfangspunkt gehenden Geraden, die man als „Knotenlinie" bezeichnet. Sie steht offenbar senkrecht auf der durch z und ζ gelegten Ebene; als positive Richtung der Knotenlinie nehmen wir diejenige an, für die ein in umgekehrter Richtung blickendes Auge die z-Achse zur Rechten, die ζ-Achse zur Linken sieht. In Fig. 99 ist also die Knotenlinie senkrecht zur Zeichenebene, positiv nach vorn zu denken.

Die Lage der ζ-Achse ist bestimmt durch zwei Stücke: erstens den Winkel ϑ (Fig. 99), den sie mit der positiven z-Achse bildet; ϑ wird positiv gerechnet von der positiven z-Achse zur positiven ζ-Achse hin: natürlich ist ϑ auch der Winkel zwischen der xy-Ebene und der $\xi\eta$-

Ebene (Fig. 100). Zweitens wird die ζ-Achse bestimmt durch den Winkel φ (Fig. 100), den die positive Richtung der Knotenlinie mit der positiven x-Achse bildet; φ ist dabei positiv in dem Sinne zu nehmen, daß wachsendes φ auf dem kürzesten Wege von der positiven x-Achse nach der positiven y-Achse hinführt.

Die einzige Möglichkeit der Bewegung des starren Körpers bei durch ϑ und φ festgelegter ζ-Achse ist offenbar eine Drehung um diese Achse. Diese entspricht bekanntlich einem Freiheitsgrade; wir bestimmen sie dadurch, daß wir den Winkel zwischen einer zur Rotationsachse senk-

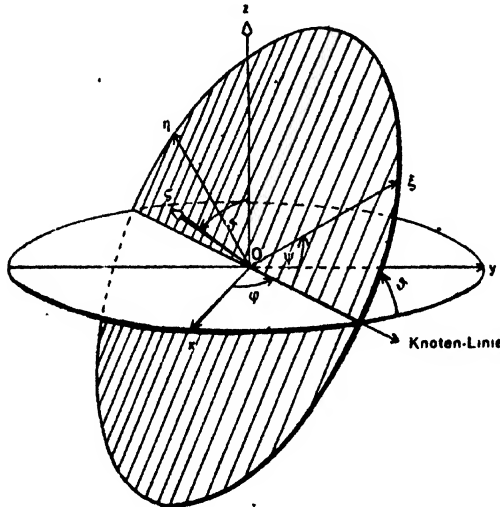


Fig. 100.

rechten Richtung mit einer festen Richtung angeben. Wir wählen dazu den Winkel ψ zwischen der Knotenlinie und der ξ-Achse, wobei dieser Winkel, von der ζ-Achse aus gesehen, positiv links herum gezählt wird (Fig. 100).

Die Winkel ϑ, φ, ψ gehorchen offenbar den folgenden Ungleichungen:

$$(58) \quad \begin{cases} 0 \leqq \vartheta \leqq \pi\,, \\ 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi\,, \\ 0 \leqq \psi \leqq 2\pi\,. \end{cases}$$

Zunächst ist es notwendig, die neun Richtungskosinusse durch die Eulerschen Winkel auszudrücken. Wegen der Bedeutung von γ_3 als $\cos\,(z\zeta)$ ist zunächst:

$$(58a) \qquad \gamma_3 = \cos\vartheta\,.$$

Nach Definition ist ferner φ der Winkel zwischen der positiven x-Achse und der positiven Richtung der Knotenlinie. Die Gleichung der Knoten-

linie ist dadurch gegeben, daß sie die Schnittlinie der x, y- und der ξ, η Ebene ist. Wir haben also die beiden Gleichungen:

$$z = 0; \quad \zeta = 0 .$$

Das ist aber nach der letzten Gleichung (34), wenn darin $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ gesetzt werden (da die Koordinatenanfangspunkte beider Systeme jetzt zusammenfallen):

$$\alpha_3 x + \beta_3 y = 0$$

als Gleichung der Knotenlinie. Die Richtungskosinusse derselben gegen die x- und y-Achse sind offenbar $\frac{-\beta_3,\ \alpha_3}{\pm\sqrt{\alpha_3^2+\beta_3^2}}$, und daraus folgt für Kosinus und Sinus des Winkels zwischen Knotenlinie und positiver x-Achse, d. h. des zweiten Eulerschen Winkels φ:

$$\cos\varphi = \mp \frac{\beta_3}{\sqrt{\alpha_3^2+\beta_3^2}},$$

$$\sin\varphi = \pm \frac{\alpha_3}{\sqrt{\alpha_3^2+\beta_3^2}}.$$

Nach der dritten Gleichung (33) ist die Quadratwurzel im Nenner $= \sin\vartheta$; also folgen die beiden Werte:

$$\mp \cos\varphi \sin\vartheta = \beta_3 ,$$
$$\pm \sin\varphi \sin\vartheta = \alpha_3 ,$$

worin das doppelte Vorzeichen einer Unbestimmtheit des Winkels φ um π entspricht. Durch unsere Festsetzungen über die positive Richtung der Knotenlinie ist für das obere Vorzeichen entschieden, so daß bleibt:

(58b) $$\begin{cases} \beta_3 = -\cos\varphi \sin\vartheta , \\ \alpha_3 = +\sin\varphi \sin\vartheta . \end{cases}$$

Auf dieselbe Weise lassen sich γ_1 und γ_2 durch ψ ausdrücken. Denn wir erhalten für die Gleichung der Knotenlinie $\alpha_3 x + \beta_3 y = 0$, wenn wir darin x und y durch ξ und η nach (29) ausdrücken, wobei $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$ und $\zeta = 0$ zu setzen sind:

$$\alpha_3(\alpha_1\xi + \alpha_2\eta) + \beta_3(\beta_1\xi + \beta_2\eta) = 0 ,$$

oder:

$$(\alpha_1\alpha_3 + \beta_1\beta_3)\xi + (\alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3)\eta = 0 .$$

Für die Faktoren von ξ und η kann nach der fünften und sechsten Gleichung (33) resp. geschrieben werden $-\gamma_1\gamma_3$ und $-\gamma_2\gamma_3$, so daß für die Gleichung der Knotenlinie im ξ, η-System folgt:

$$\gamma_1\xi + \gamma_2\eta = 0 .$$

Daraus ergibt sich unter Berücksichtigung des positiven Sinnes der Knotenlinie und der Richtung, in der ψ positiv gezählt wird:

$$(58c)\qquad \begin{cases} \gamma_1 = \sin\psi \sin\vartheta\,, \\ \gamma_2 = \cos\psi \sin\vartheta\,. \end{cases}$$

Dadurch ist nun alles übrige ausdrückbar. Man erhält z. B. aus den Relationen der Gleichungen (33) und (35):

$$\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 = -\alpha_3\gamma_3$$
$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1 - \alpha_3^2\,,$$

für α_1 und α_2 die Werte:

$$(58d)\qquad \begin{cases} \alpha_1 = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\vartheta\,, \\ \alpha_2 = -\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi\cos\vartheta\,, \end{cases}$$

usw. Insgesamt erhält man folgende Tabelle:

$$(59)\qquad \begin{cases} \alpha_1 = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\vartheta\,, \\ \alpha_2 = -\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi\cos\vartheta\,, \\ \alpha_3 = \sin\varphi\sin\vartheta\,, \\ \beta_1 = \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\vartheta\,, \\ \beta_2 = -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\vartheta\,, \\ \beta_3 = -\cos\varphi\sin\vartheta\,, \\ \gamma_1 = \sin\psi\sin\vartheta\,, \\ \gamma_2 = \cos\psi\sin\vartheta\,, \\ \gamma_3 = \cos\vartheta\,. \end{cases}$$

Nachdem so die sämtlichen Richtungskosinusse $\alpha_1 \ldots \gamma_3$ durch die Eulerschen Winkel ausgedrückt sind, kann man die Verrückungskomponenten $\delta x, \delta y, \delta z$, die Geschwindigkeitskomponenten $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$, speziell auch die Rotationsgeschwindigkeiten $\frac{dp}{dt}, \frac{dq}{dt}, \frac{dr}{dt}$ um die x, y, z-Achsen, wie auch $\frac{d\pi}{dt}, \frac{d\chi}{dt}, \frac{d\varrho}{dt}$ um die ξ, η, ζ-Achsen durch dieselben leicht ausdrücken. Z. B. erhält man aus der ersten Gleichung (39) und den Gleichungen (59) für $\frac{dp}{dt}$ und ähnlich für die übrigen Komponenten der Rotationsgeschwindigkeiten im (x, y, z)-System:

$$(60)\qquad \begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = \cos\varphi\dfrac{d\vartheta}{dt} + \sin\varphi\sin\vartheta\dfrac{d\psi}{dt}\,, \\ \dfrac{dq}{dt} = \sin\varphi\dfrac{d\vartheta}{dt} - \cos\varphi\sin\vartheta\dfrac{d\psi}{dt}\,, \\ \dfrac{dr}{dt} = \dfrac{d\varphi}{dt} + \cos\vartheta\dfrac{d\psi}{dt}\,, \end{cases}$$

und ebenso für die nach ξ, η, ζ zerlegten Komponenten der Rotationsgeschwindigkeit:

$$
(61) \quad \begin{cases} \dfrac{d\pi}{dt} = \sin\psi \sin\vartheta \dfrac{d\varphi}{dt} + \cos\psi \dfrac{d\vartheta}{dt}, \\ \dfrac{d\chi}{dt} = \cos\psi \sin\vartheta \dfrac{d\varphi}{dt} - \sin\psi \dfrac{d\vartheta}{dt}, \\ \dfrac{d\varrho}{dt} = \cos\vartheta \dfrac{d\varphi}{dt} + \dfrac{d\psi}{dt}. \end{cases}
$$

Die drei Eulerschen Winkel haben besondere Namen empfangen. Nehmen wir an, ϑ und φ seien konstant und allein ψ ändere sich. Dann ist nach den vorherigen Auseinandersetzungen (vgl. auch Fig. 100) die Bewegung folgende: die ζ-Achse bleibt unbeweglich, da sie durch ϑ und φ festgelegt ist. Wir haben also eine Rotation des starren Körpers um die ζ-Achse. Man nennt daher ψ den „Eigendrehungswinkel". Ändert

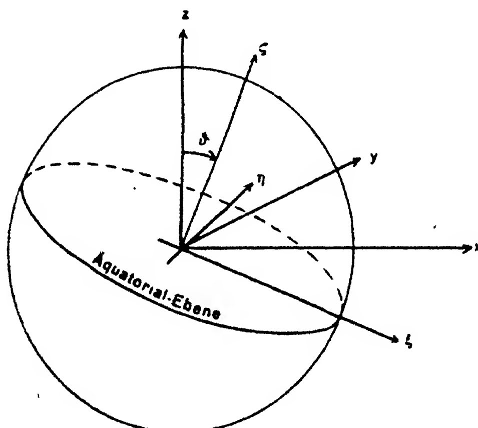


Fig. 101.

sich dagegen nur der Winkel φ, während ϑ und ψ konstant bleiben, so dreht sich die Knotenlinie in der x, y-Ebene, während die ζ-Achse, da ϑ konstant, einen Kreiskegelmantel um die z-Achse beschreibt; eine derartige Bewegung nennt man „Präzessionsbewegung" und den Winkel φ daher „Präzessionswinkel". Bleiben endlich φ und ψ konstant, so daß nur ϑ sich ändert, so bleibt die Knotenlinie bei der betrachteten Bewegung ungeändert. Die ζ-Achse ändert ihre Neigung gegen die z-Achse, oder was auf dasselbe herauskommt, die $\xi\,\eta$-Ebene ändert ihre Neigung gegen die $x\,y$-Ebene. In speziellen Fällen nennt man eine derartige Bewegung „Pendelung" und den Winkel ϑ den „Pendelungswinkel".

Wir wollen diese Bezeichnung noch durch Exemplifizierung auf die Bewegung der Erde erläutern. Als ζ-Achse diene die Erdachse, als $\xi\,\eta$-Ebene die Äquatorialebene der Erde. Als $x\,y$-Ebene nehmen wir

die Ebene der Ekliptik, die Bahnebene, die ja angenähert die invariable Ebene ist; als z-Achse die Normale auf derselben. Das gibt, wenn man die Anfangspunkte beider Systeme zusammenlegt, das Bild der Fig. 101. Bliebe die Erdachse im Raume fest, d. h. zeigte sie stets nach dem Polarstern, so änderte sich nur der Winkel zwischen Knotenlinie und ξ-Achse; die Erde führt dann lediglich eine Eigendrehung um die ζ-Achse, die in diesem Falle die Figurenachse ist, aus. Aber in Wirklichkeit beschreibt die Erdachse in rund 26000 Jahren einen Kegelmantel um die Normale zur Ekliptik; es ändert sich also auch der Winkel φ: die Erde führt also auch eine Präzessionsbewegung aus. Endlich aber ist auch der Winkel ϑ, der Kegelwinkel, noch kleinen Schwankungen unterworfen, so daß die Erdachse um einen gewissen Mittelwinkel ϑ hin und her schwankt, was als „Nutation“ (Nicken) oder als „Pendelung“ der Erdachse bezeichnet wird.

Siebentes Kapitel.

Allgemeine Dynamik starrer Körper.

73. Die Bewegungsgleichungen des starren Körpers.

Nachdem wir im vorigen Kapitel die Bewegungsmöglichkeiten des starren Körpers analysiert haben, gehen wir jetzt zur Untersuchung der Bewegung unter dem Einfluß gegebener Kräfte über. Dazu bedürfen wir vor allem der Bewegungsgleichungen. Als einheitlichen Ausgangspunkt zur Ableitung derselben bietet sich das d'Alembertsche Prinzip dar, das wir in der Form ansetzen:

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \sum_{\nu}\Big[\Big(X_\nu - m_\nu \frac{d^2 x_\nu}{d t^2}\Big)\delta x_\nu + \Big(Y_\nu - m_\nu \frac{d^2 y_\nu}{d t^2}\Big)\delta y_\nu \\ + \Big(Z_\nu - m_\nu \frac{d^2 z_\nu}{d t^2}\Big)\delta z_\nu\Big] = 0. \end{aligned}\right.$$

Diese Summe ist zu erstrecken über alle Massenpunkte ν des starren Körpers. δx_ν, δy_ν, δz_ν sind virtuelle, mit den Eigenschaften des starren Körpers, d. h. mit der Bedingung unveränderlichen Abstandes je zweier Punkte desselben, verträgliche Verrückungen. Für die allgemeinste unendlich kleine Verrückung des Körpers haben wir nun in Gleichung (40) VI. Kapitels auf pag. 326 die folgenden Gleichungen erhalten:

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \delta x_\nu &= \delta x_0 &&+ (z_\nu - z_0)\delta q - (y_\nu - y_0)\delta r, \\ \delta y_\nu &= \delta y_0 - (z_\nu - z_0)\delta p &&+ (x_\nu - x_0)\delta r, \\ \delta z_\nu &= \delta z_0 + (y_\nu - y_0)\delta p - (x_\nu - x_0)\delta q. \end{aligned}\right.$$

Diese drücken bekanntlich aus, daß die allgemeinste Verrückung eines starren Körpers sich zusammensetzen läßt aus drei zueinander senkrechten Translationen δx_0, δy_0, δz_0 eines beliebig gewählten Bezugspunktes parallel den Koordinatenachsen, sowie drei Rotationen δp, δq, δr um Parallele zu den Koordinatenachsen durch den Bezugspunkt. Wir könnten unmittelbar an diese Gleichungen (2) anknüpfen und sie mit (1) kombinieren; doch knüpfen wir zweckmäßiger noch an die Gleichungen (49) des vorhergehenden Kapitels auf pag. 330 an, die in geeigneter Bezeichnungsweise lauten:

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \delta x_\nu &= \delta x_0' &&+ z_\nu \delta q - y_\nu \delta r, \\ \delta y_\nu &= \delta y_0' - z_\nu \delta p &&+ x_\nu \delta r, \\ \delta z_\nu &= \delta z_0' + y_\nu \delta p - x_\nu \delta r. \end{aligned}\right.$$

Diese haben wir folgendermaßen interpretiert: $\delta x_0'$, $\delta y_0'$, $\delta x_0'$ sind die Komponenten einer Translation; ferner sind

$$z_\nu \delta q - y_\nu \delta r, \quad -z_\nu \delta p + x_\nu \delta r, \quad y_\nu \delta p - x_\nu \delta r$$

drei Rotationen um die Koordinatenachsen selbst, während wir es in den Gleichungen (2) mit Rotationen um Parallele zu diesen zu tun hatten. Wir können also sagen: Die allgemeinste unendlich kleine Verrückung eines starren Körpers kann ersetzt werden durch sechs unabhängige spezielle Verrückungen; nämlich durch drei Translationen $\delta x_0'$, $\delta y_0'$, $\delta z_0'$ parallel den Koordinatenachsen und drei Rotationen δp, δq, δr um diese als Achsen.

Die Gleichungen (3) kombinieren wir mit der Gleichung (1) des d'Alembertschen Prinzips. Das liefert:

$$\begin{aligned}\sum_\nu \Big[\Big(X_\nu - m_\nu \frac{d^2 x_\nu}{d t^2}\Big) & \Big(\delta x_0' + z_\nu \delta q - y_\nu \delta r\Big) \\ + \Big(Y_\nu - m_\nu \frac{d^2 y_\nu}{d t^2}\Big) & \Big(\delta y_0' - z_\nu \delta p + x_\nu \delta r\Big) \\ + \Big(Z_\nu - m_\nu \frac{d^2 z_\nu}{d t^2}\Big) & \Big(\delta z_0' + y_\nu \delta p - x_\nu \delta q\Big)\Big] = 0,\end{aligned}$$

oder in anderer Anordnung, wenn man gleichzeitig $\delta x_0, \delta y_0, \delta z_0, \delta p, \delta q, \delta r$ vor das Summenzeichen zieht, da sie für den ganzen Körper konstant sind:

$$\begin{aligned}\delta x_0' \sum_\nu \Big(X_\nu - m_\nu \frac{d^2 x_\nu}{d t^2}\Big) + \delta y_0' \sum_\nu \Big(Y_\nu - m_\nu \frac{d^2 y_\nu}{d t^2}\Big) \\ + \delta z_0' \sum_\nu \Big(Z_\nu - m_\nu \frac{d^2 z_\nu}{d t^2}\Big) \\ + \delta p \sum_\nu \Big\{\Big(Z_\nu - m_\nu \frac{d^2 z_\nu}{d t^2}\Big) y_\nu - \Big(Y_\nu - m_\nu \frac{d^2 y_\nu}{d t^2}\Big) z_\nu\Big\} \\ + \delta q \sum_\nu \Big\{\Big(X_\nu - m_\nu \frac{d^2 x_\nu}{d t^2}\Big) z_\nu - \Big(Z_\nu - m_\nu \frac{d^2 z_\nu}{d t^2}\Big) x_\nu\Big\} \\ + \delta r \sum_\nu \Big\{\Big(Y_\nu - m_\nu \frac{d^2 y_\nu}{d t^2}\Big) x_\nu - \Big(X_\nu - m_\nu \frac{d^2 x_\nu}{d t^2}\Big) y_\nu\Big\} = 0.\end{aligned}$$

Wegen der Unabhängigkeit der 6 Verrückungen $\delta x_0', \delta y_0', \delta z_0', \delta p, \delta q, \delta r$ zerfällt diese Gleichung in 6 Gleichungen, indem die Koeffizienten dieser Größen sich einzeln annulieren müssen. Das liefert also:

$$(4) \quad \left\{\begin{aligned}\sum X_\nu &= \sum m_\nu \frac{d^2 x_\nu}{d t^2}, \\ \sum Y_\nu &= \sum m_\nu \frac{d^2 y_\nu}{d t^2}, \\ \sum Z_\nu &= \sum m_\nu \frac{d^2 z_\nu}{d t^2}\end{aligned}\right.$$

und:

$$(5)\quad \begin{cases} \sum (Z_\nu y_\nu - Y_\nu z_\nu) = \sum m_\nu \left\{ \frac{d^2 z_\nu}{d t^2} y_\nu - \frac{d^2 y_\nu}{d t^2} z_\nu \right\}, \\ \sum (X_\nu z_\nu - Z_\nu x_\nu) = \sum m_\nu \left\{ \frac{d^2 x_\nu}{d t^2} z_\nu - \frac{d^2 z_\nu}{d t^2} x_\nu \right\}, \\ \sum (Y_\nu x_\nu - X_\nu y_\nu) = \sum m_\nu \left\{ \frac{d^2 y_\nu}{d t^2} x_\nu - \frac{d^2 x_\nu}{d t^2} y_\nu \right\}. \end{cases}$$

Diese 6 unabhängigen Gleichungen entsprechen genau den 6 Freiheitsgraden eines starren Körpers; durch ihre Auflösung ist also die Lage desselben vollkommen bestimmt, wenn noch die Anfangsdaten gegeben sind. Die beiden Gleichungstripel können noch etwas transformiert werden; das erste durch Einführung der Koordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ des Schwerpunktes und der Gesamtmasse M, das zweite durch Beachtung des Umstandes, daß die rechten Seiten vollständige Differentialquotienten nach der Zeit sind. Man findet so:

$$(6)\quad \begin{cases} \sum X_\nu = M \frac{d^2 \mathfrak{x}}{d t^2}, \\ \sum Y_\nu = M \frac{d^2 \mathfrak{y}}{d t^2}, \\ \sum Z_\nu = M \frac{d^2 \mathfrak{z}}{d t^2}. \end{cases}$$

$$(7)\quad \begin{cases} \sum (Z_\nu y_\nu - Y_\nu z_\nu) = \frac{d}{dt} \sum m_\nu \left(\frac{d z_\nu}{d t} y_\nu - \frac{d y_\nu}{d t} z_\nu \right), \\ \sum (X_\nu z_\nu - Z_\nu x_\nu) = \frac{d}{dt} \sum m_\nu \left(\frac{d x_\nu}{d t} z_\nu - \frac{d z_\nu}{d t} x_\nu \right), \\ \sum (Y_\nu x_\nu - X_\nu y_\nu) = \frac{d}{dt} \sum m_\nu \left(\frac{d y_\nu}{d t} x_\nu - \frac{d x_\nu}{d t} y_\nu \right). \end{cases}$$

Sie sind offenbar identisch mit den Sätzen über die Bewegung des Schwerpunktes und über die Rotationsmomente, die im IV. Kapitel in den Gleichungen (23) (pag. 184) und (35) (pag. 192) formuliert worden sind: eine selbstverständliche Folge davon, daß in unserer Auffassung ein starrer Körper ein spezielles System von Massenpunkten ist oder wenigstens als ein solches betrachtet werden kann. Wir sprechen sie mit spezieller Fassung für den starren Körper noch einmal aus:

Der Schwerpunkt eines starren Körpers bewegt sich so, als ob in ihm die Gesamtmasse konzentriert wäre und die Resultierende sämtlicher Kräfte in ihm angriffe.

Die Summe der Rotationsmomente der an einem starren Körper angreifenden äußeren Kräfte um die festen Koordinatenachsen ist gleich der zeitlichen Änderung der Summe der Rotationsmomente der Geschwindigkeiten um resp. dieselben Achsen.

Die Gleichung (7) kann man in eine andere Gestalt bringen durch Einführung von Polarkoordinaten in den jeweiligen Koordinatenebenen,

genau so, wie wir es bei dem Flächensatze gemacht haben. Z. B. ist in der yz-Ebene der Ausdruck $\frac{dz_\nu}{dt} y_\nu - \frac{dy_\nu}{dt} z_\nu$ gleich dem doppelten Inhalte der vom Radiusvektor $\sqrt{y_\nu^2 + z_\nu^2}$ in der Zeiteinheit beschriebenen Fläche; die Rotationsgeschwindigkeit ist in diesem Falle $\frac{dp}{dt}$; also ist zu setzen (ähnlich für die anderen Gleichungen):

$$(8)\quad \begin{cases} \frac{dz_\nu}{dt} y_\nu - \frac{dy_\nu}{dt} z_\nu = \left(y_\nu^2 + z_\nu^2\right) \frac{dp}{dt}, \\ \frac{dx_\nu}{dt} z_\nu - \frac{dz_\nu}{dt} x_\nu = \left(x_\nu^2 + z_\nu^2\right) \frac{dq}{dt}, \\ \frac{dy_\nu}{dt} x_\nu - \frac{dx_\nu}{dt} y_\nu = \left(y_\nu^2 + x_\nu^2\right) \frac{dr}{dt}, \end{cases}$$

wobei die Größen $\frac{dp}{dt}, \frac{dq}{dt}, \frac{dr}{dt}$ offenbar für den ganzen Körper konstant sind. Setzt man die Werte (8) in (7) ein, so lassen sich $\frac{dp}{dt}, \frac{dq}{dt}, \frac{dr}{dt}$ nach der eben gemachten Bemerkung vor das Summenzeichen ziehen, und es folgt das (7) äquivalente Tripel:

$$(9)\quad \begin{cases} \sum\limits_\nu \left(Z_\nu y_\nu - Y_\nu z_\nu\right) = \frac{d}{dt}\left[\frac{dp}{dt} \sum\limits_\nu m_\nu \left(y_\nu^2 + z_\nu^2\right)\right], \\ \sum\limits_\nu \left(X_\nu z_\nu - Z_\nu x_\nu\right) = \frac{d}{dt}\left[\frac{dq}{dt} \sum\limits_\nu m_\nu \left(z_\nu^2 + x_\nu^2\right)\right], \\ \sum\limits_\nu \left(Y_\nu x_\nu - X_\nu y_\nu\right) = \frac{d}{dt}\left[\frac{dr}{dt} \sum\limits_\nu m_\nu \left(x_\nu^2 + y_\nu^2\right)\right]. \end{cases}$$

Die Größen $(y_\nu^2 + z_\nu^2), \ldots$ usw. sind im allgemeinen Funktionen der Zeit, da sie aus den Koordinaten des beweglichen Punktes m_ν in Bezug auf das im Raume feste Koordinatensystem gebildet sind. Liegt jedoch die Rotationsachse gleichzeitig im Raume und im Körper fest, d. h. ist der Körper gezwungen, sich um eine feste Achse zu drehen, z. B. die x-Achse, so sind die Summen $(y_\nu^2 + z_\nu^2)$ natürlich konstant, also werden $\sum m_\nu (y_\nu^2 + z_\nu^2), \ldots$ dem Körper eigentümliche Konstanten. Man nennt die so gebildeten Ausdrücke „Trägheitsmomente". Die Bedeutung derselben können wir uns schon an dieser Stelle klar machen, indem wir den erwähnten Spezialfall, daß die Rotationsachse im Raume und im Körper fest sei, etwas weiter verfolgen; speziell wollen wir noch annehmen, daß die x- (resp. ξ)-Achse die Rotationsachse sei. Dann bleibt von den Gleichungen (9) nur die erste übrig, und wenn wir das jetzt zeitlich konstante Trägheitsmoment $\sum m_\nu (y_\nu^2 + z_\nu^2)$ abkürzend durch T bezeichnen, so haben wir:

$$(9a)\quad \sum_\nu \left(Z_\nu y_\nu - Y_\nu z_\nu\right) = \frac{d^2 p}{dt^2} \mathrm{T}.$$

d. h. die Summe der Rotationsmomente der äußeren Kräfte

ist in diesem Falle gleich dem Produkte aus dem Trägheitsmoment und der Winkelbeschleunigung. Vergleicht man damit die Newtonsche Bewegungsgleichung eines Massenpunktes

$$\mathfrak{K} = m \cdot \mathfrak{a} ,$$

so sieht man die formale Analogie zwischen beiden: An Stelle der Kraft tritt hier das Rotationsmoment der Kraft, an Stelle der Beschleunigung die Winkelbeschleunigung, an Stelle der Masse das Trägheitsmoment. Die d'Alembertsche Trägheitskraft wird also hier ersetzt durch das negativ genommene Produkt von Trägheitsmoment und Winkelbeschleunigung; kurz gesagt: Was die Masse für die fortschreitende Bewegung eines Punktes, ist das Trägheitsmoment für die Rotationsbewegung eines starren Körpers; T mißt die „Trägheit“ bei der Rotation.

Die fundamentale Bedeutung der Trägheitsmomente dürfte aus dem Obigen klar sein; zur Theorie derselben wollen wir jetzt übergehen.

74. Theorie der Trägheitsmomente und Deviationsmomente.

Die vorhin als Trägheitsmomente bezeichneten Größen sind folgendermaßen gebildet: Jedes Massenteilchen m_ν des starren Körpers ist multipliziert mit dem Quadrate seines Abstandes von der betreffenden Rotationsachse, und die so gebildeten Ausdrücke sind dann über alle Massenpunkte des Körpers summiert. Wegen der Beziehung zur Rotationsachse sagt man besser „Trägheitsmoment in Bezug auf eine bestimmte Achse“. So ist also $\sum m_\nu (y_\nu^2 + z_\nu^2)$ das Trägheitsmoment in Bezug auf die x-Achse, $\sum m_\nu (z_\nu^2 + x_\nu^2)$ dasjenige in Bezug auf die y-Achse, $\sum m_\nu (x_\nu^2 + y_\nu^2)$ dasjenige endlich in Bezug auf die z-Achse. Wir bezeichnen diese drei Trägheitsmomente durch resp. T_x, T_y, T_z:

$$(10) \qquad \begin{cases} T_x = \sum m_\nu (y_\nu^2 + z_\nu^2) , \\ T_y = \sum m_\nu (z_\nu^2 + x_\nu^2) , \\ T_z = \sum m_\nu (x_\nu^2 + y_\nu^2) . \end{cases}$$

Die folgende Untersuchung ist rein kinematisch; daher ist es gleichgültig, ob wir uns das (x, y, z)-System im Raume oder im Körper festliegend denken. Wir wollen für diesen Abschnitt annehmen, (x, y, z) sei ein mit dem Körper verbundenes System, so daß nach dem Vorhergehenden die Ausdrücke T_x, T_y, T_z Körperkonstanten sind, die freilich noch von der Lage des (x, y, z)-Systems im Körper abhängen werden.

Wir legen uns jetzt die Frage vor, wie eine Parallelverschiebung des Koordinatensystems im Körper die Trägheitsmomente beeinflußt. Wir wollen unter a, b, c Konstanten verstehen und ein neues Koordinatensystem x', y', z' einführen durch die Festsetzung:

$$(11)\qquad \begin{cases} x = x' + a\,, \\ y = y' + b\,, \\ z = z' + c\,. \end{cases}$$

a, b, c sind offenbar die Koordinaten des Anfangspunktes des (x', y', z')-Systems. Diese Werte setzen wir in Gleichung (10) ein. Es genügt, die Rechnung z. B. für T_x vorzunehmen, die übrigen können dann ohne weiteres hingeschrieben werden. Wir haben so:

$$T_x = \sum m_\nu [(z_\nu' + c)^2 + (y_\nu' + b)^2] = \sum m_\nu [z_\nu'^2 + y_\nu'^2] + (b^2 + c^2) \sum m_\nu + 2c \sum m_\nu z_\nu' + 2b \sum m_\nu y_\nu',$$

oder in anderer Schreibweise, da das erste Glied das Trägheitsmoment $T_{x'}$ um die x'-Achse ist:

$$(12)\qquad \begin{cases} T_x = T_{x'} + (c^2 + b^2) \sum m_\nu + 2c \sum m_\nu z_\nu' + 2b \sum m_\nu y_\nu', \\ T_y = T_{y'} + (a^2 + c^2) \sum m_\nu + 2a \sum m_\nu x_\nu' + 2c \sum m_\nu z_\nu', \\ T_z = T_{z'} + (b^2 + a^2) \sum m_\nu + 2b \sum m_\nu y_\nu' + 2a \sum m_\nu x_\nu'. \end{cases}$$

Die jeweiligen beiden letzten Glieder dieser drei Gleichungen können in Beziehung zu den Koordinaten $\mathfrak{x}', \mathfrak{y}', \mathfrak{z}'$ des Schwerpunktes, bezogen auf das (x', y', z')-System, gebracht werden. Denn es ist offenbar $\sum m_\nu x_\nu' = \mathfrak{x}' \sum m_\nu, \ldots$ usw. Setzen wir noch $\sum m_\nu = M$, so erhalten wir schließlich:

$$(13)\qquad \begin{cases} T_x = T_{x'} + M(b^2 + c^2) + 2bM\mathfrak{y}' + 2cM\mathfrak{z}', \\ T_y = T_{y'} + M(c^2 + a^2) + 2cM\mathfrak{z}' + 2aM\mathfrak{x}', \\ T_z = T_{z'} + M(a^2 + b^2) + 2aM\mathfrak{x}' + 2bM\mathfrak{y}'. \end{cases}$$

Man erkennt sofort, daß die Gleichungen (13) eine besonders einfache Gestalt annehmen, wenn $\mathfrak{x}' = \mathfrak{y}' = \mathfrak{z}' = 0$ ist, d. h. wenn der Anfangspunkt des (x', y', z')-Systems mit dem Schwerpunkte zusammenfällt. Dies wollen wir von jetzt ab annehmen, und dann folgt:

$$(14)\qquad \begin{cases} T_x = T_{x'} + M(b^2 + c^2), \\ T_y = T_{y'} + M(c^2 + a^2), \\ T_z = T_{z'} + M(a^2 + b^2). \end{cases}$$

Diese Gleichungen gestatten es offenbar, wenn die Trägheitsmomente $T_{x'}, T_{y'}, T_{z'}$ um durch den Schwerpunkt gehende Achsen gegeben sind, daraus die Trägheitsmomente um parallele, nicht durch den Schwerpunkt gehende Achsen zu berechnen. Es ist z. B. offenbar $(b^2 + c^2)$ gleich dem Quadrate des senkrechten Abstandes des Schwerpunktes von der x-Achse, $(c^2 + a^2)$ desgleichen von der y-Achse usw. Diese drei Größen wollen wir durch resp. h_x^2, h_y^2, h_z^2 bezeichnen und haben dann:

$$(15)\qquad \begin{cases} T_x = T_{x'} + Mh_x^2, \\ T_y = T_{y'} + Mh_y^2, \\ T_z = T_{z'} + Mh_z^2, \end{cases}$$

in Worten: Das Trägheitsmoment für eine vorgeschriebene Achse ist gleich demjenigen für die parallele durch den Schwerpunkt gehende Achse, vermehrt um das Trägheitsmoment der im Schwerpunkt konzentriert gedachten Gesamtmasse des Körpers, bezogen auf die vorgeschriebene Achse.

Da die Größen $Mh_s^2, \ldots$ stets positiv sind, da sie eben selbst auch Trägheitsmomente darstellen, so erkennt man, daß unter allen auf parallele Achsen bezogenen Trägheitsmomenten dasjenige um die durch den Schwerpunkt gehende Achse ein Minimum ist.

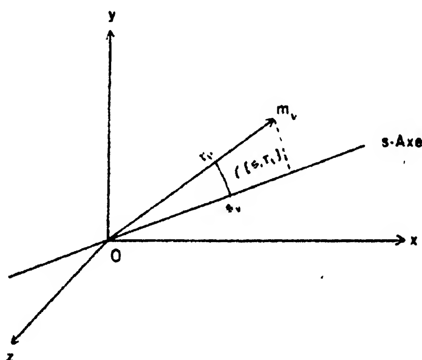


Fig. 102.

Da der Koordinatenanfangspunkt von (x, y, z) im Körper festliegt, so ist offenbar:

$$(16) \qquad \mathsf{T}_x + \mathsf{T}_y + \mathsf{T}_z = 2\sum m_\nu (x_\nu^2 + y_\nu^2 + z_\nu^2) = \text{Const.} = 2K;$$

also kann man schreiben:

$$(17) \qquad \begin{cases} \mathsf{T}_x = K - \sum m_\nu x_\nu^2 = K - \Theta_x, \\ \mathsf{T}_y = K - \sum m_\nu y_\nu^2 = K - \Theta_y, \\ \mathsf{T}_z = K - \sum m_\nu z_\nu^2 = K - \Theta_z. \end{cases}$$

Die $\Theta_x, \ldots$ werden manchmal als Mindingsche oder Binetsche Trägheitsmomente bezeichnet; sie sind einfacher gebaut als die eigentlichen Trägheitsmomente $\mathsf{T}_x, \ldots$; und man schließt daher die weitere Untersuchung in manchen Punkten zweckmäßiger an die $\Theta_x, \ldots$ an, von denen man ja in jedem Augenblick nach (17) zu den Trägheitsmomenten übergehen kann. Wir wollen uns das Bildungsgesetz der Größen $\Theta_x, \Theta_y, \Theta_z$ klarmachen. Jedes Massenteilchen m_ν ist dort multipliziert mit dem Quadrate der Projektion des Radiusvektors $\mathfrak{r}_\nu$ (Komponenten x_ν, y_ν, z_ν) auf die betreffende Rotationsachse. Die Gleichungen (17) können sofort

ausgedehnt werden auf eine beliebige Achse s, die durch den Koordinatenanfangspunkt hindurchgeht. Denn nennen wir die Projektion des absoluten Betrages des Radiusvektors $|\mathfrak{r}_\nu|$ auf diese s-Achse s_ν, so haben wir:

(18) $$\Theta_s = \sum m_\nu s_\nu^2 ,$$

und nach (17) für das Trägheitsmoment T_s um diese Achse:

(19) $$\mathsf{T}_s = K - \Theta_s .$$

Es liegt die Frage nahe: Wie verhalten sich die Größen der Trägheitsmomente um eine durch den Koordinatenanfangspunkt gehende Achse s, wenn dieser nach und nach alle möglichen Richtungen erteilt werden? Um diese Frage zu beantworten, wollen wir s_ν bilden (Fig. 102). Bezeichnen wir den Winkel zwischen der s-Achse und dem nach dem Massenpunkte m_ν weisenden Radiusvektor $\mathfrak{r}_\nu$ durch (s, r_ν), so ist die Projektion s_ν von $|\mathfrak{r}_\nu|$ auf die s-Achse offenbar:

$$s_\nu = |\mathfrak{r}_\nu| \cos(s r_\nu) = r_\nu \cos(s r_\nu) ,$$

oder, wenn die Richtungskosinusse der s-Achse durch $\cos(sx)$, $\cos(sy)$, $\cos(sz)$ bezeichnet werden:

$$s_\nu = r_\nu\{\cos(r_\nu x)\cos(sx) + \cos(r_\nu y)\cos(sy) + \cos(r_\nu z)\cos(sz)\},$$

oder da

$$\cos(r_\nu x) = \frac{x_\nu}{r_\nu}, \qquad \cos(r_\nu y) = \frac{y_\nu}{r_\nu}, \qquad \cos(r_\nu z) = \frac{z_\nu}{r_\nu}$$

ist:

(20) $$s_\nu = x_\nu \cos(sx) + y_\nu \cos(sy) + z_\nu \cos(sz) .$$

Nunmehr bilden wir nach (18) Θ_s. Dafür ergibt sich mit Hilfe von (20):

(21) $$\left\{\begin{aligned} \Theta_s = {} & \cos^2(sx)\sum m_\nu x_\nu^2 + \cos^2(sy)\sum m_\nu y_\nu^2 + \cos^2(sz)\sum m_\nu z_\nu^2 \\ & + 2\cos(sx)\cos(sy)\sum m_\nu x_\nu y_\nu + 2\cos(sy)\cos(sz)\sum m_\nu y_\nu z_\nu \\ & + 2\cos(sz)\cos(sx)\sum m_\nu z_\nu x_\nu . \end{aligned}\right.$$

Darin sind

$$\sum m_\nu x_\nu^2 = \Theta_x, \quad \sum m_\nu y_\nu^2 = \Theta_y, \quad \sum m_\nu z_\nu^2 = \Theta_z .$$

Die drei Ausdrücke:

(22) $$\left\{\begin{aligned} \sum m_\nu y_\nu z_\nu &= U_x , \\ \sum m_\nu z_\nu x_\nu &= U_y , \\ \sum m_\nu x_\nu y_\nu &= U_z , \end{aligned}\right.$$

bezeichnet man als die „Deviationsmomente um die Koordinatenachsen"; woher dieser Name kommt, werden wir später (in Nr. 77) erkennen. Damit läßt sich (21) schreiben:

(23) $$\left\{\begin{aligned} \Theta_s = {} & \Theta_x \cdot \cos^2(sx) + \Theta_y \cdot \cos^2(sy) + \Theta_z \cdot \cos^2(sz) \\ & + 2U_x \cdot \cos(sy)\cos(sz) + 2U_y \cos(sz)\cos(sx) \\ & + 2U_z \cdot \cos(sx)\cdot\cos(sy) , \end{aligned}\right.$$

und nach (17) und (19) folgt für das Trägheitsmoment T_s um die s-Achse:

$$(24)\quad \begin{cases} T_s = T_x \cdot \cos^2(sx) + T_y \cos^2(sy) + T_z \cdot \cos^2(sz) \\ \qquad - 2\,U_x \cdot \cos(sy)\cos(sz) - 2\,U_y \cos(sz)\cos(sx) \\ \qquad - 2\,U_z \cos(sx) \cdot \cos(sy)\,. \end{cases}$$

Bezeichnen wir die Richtungskosinusse der Kürze halber durch $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, so können wir übersichtlicher statt (23) und (24) schreiben:

$$(25)\quad \Theta_s = \alpha_1^2 \Theta_x + \alpha_2^2 \Theta_y + \alpha_3^2 \Theta_z + 2\alpha_2\alpha_3 U_x + 2\alpha_3\alpha_1 U_y + 2\alpha_1\alpha_2 U_z\,,$$

$$(26)\quad T_s = \alpha_1^2 T_x + \alpha_2^2 T_y + \alpha_3^2 T_z - 2\alpha_2\alpha_3 U_x - 2\alpha_3\alpha_1 U_y - 2\alpha_1\alpha_2 U_z\,.$$

Die letztere Formel gibt an, wie die Größe des Trägheitsmomentes T_s um die s-Achse von deren Richtung $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ abhängt.

Wir fragen nun, ob in gewissen Richtungen $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ T_s einen Extremwert (Maximum, Minimum, Sattelwert) annimmt, und welche Richtungen dies gegebenen Falles sind. Um dies zu entscheiden, bilden wir die Variation von T_s, die wir gleich Null setzen müssen; dabei ist aber zu beachten, daß die Größen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ der Gleichung gehorchen:

$$(27)\quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1\,,$$

woraus folgt:

$$(28)\quad \alpha_1\delta\alpha_1 + \alpha_2\delta\alpha_2 + \alpha_3\delta\alpha_3 = 0\,.$$

Diese multiplizieren wir — genau so wie bei den analogen Betrachtungen des d'Alembertschen Prinzips — mit einem unbekannten Faktor λ, addieren sie zu δT_s und setzen diese Summe gleich Null. So folgt:

$$\begin{aligned} \delta T_s = 0 = \delta\alpha_1[\alpha_1 T_x - \alpha_3 U_y - \alpha_2 U_z - \lambda\alpha_1] \\ + \delta\alpha_2[\alpha_2 T_y - \alpha_3 U_x - \alpha_1 U_z - \lambda\alpha_2] \\ + \delta\alpha_3[\alpha_3 T_z - \alpha_2 U_x - \alpha_1 U_y - \lambda\alpha_3]\,, \end{aligned}$$

oder anders geordnet:

$$(29)\quad \begin{cases} \delta T_s = \delta\alpha_1[\alpha_1(T_x - \lambda) - \alpha_2 U_z - \alpha_3 U_y] \\ \qquad + \delta\alpha_2[-\alpha_1 U_z + \alpha_2(T_y - \lambda) - \alpha_3 U_x] \\ \qquad + \delta\alpha_3[-\alpha_1 U_y - \alpha_2 U_x + \alpha_3(T_z - \lambda)] = 0\,. \end{cases}$$

Läßt sich diese Gleichung erfüllen, so liefern die sich daraus ergebenden Werte $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ die Richtung oder die Richtungen, in denen T_s einen Extremwert annimmt. Die Größen $\delta\alpha_1, \delta\alpha_2, \delta\alpha_3$ sind nun nicht unabhängig voneinander, sondern durch die Gleichung (28) miteinander verknüpft. Wir können also etwa $\delta\alpha_1$ als Funktion von $\delta\alpha_2$ und $\delta\alpha_3$ betrachten, welch letztere unabhängig voneinander sind. Wir bestimmen nun in (29) den unbestimmten Faktor λ so, daß der Koeffizient von $\delta\alpha_1$ verschwindet. Wegen der Unabhängigkeit von $\delta\alpha_2$, $\delta\alpha_3$ kann die Gleichung (29) dann nur so bestehen, daß die Faktoren von $\delta\alpha_2$ und $\delta\alpha_3$ sich für sich annullieren. Insgesamt erhalten wir also für einen Extremwert von T_s die drei Bedingungsgleichungen:

$$(30)\quad \begin{cases} a_1(T_x-\lambda)-a_2U_z-a_3U_y=0\,,\\ -a_1U_z+a_2(T_y-\lambda)-a_3U_x=0\,,\\ -a_1U_y-a_2U_x+a_3(T_z-\lambda)=0\,. \end{cases}$$

Da diese drei Gleichungen homogen sind, so liefern sie für die drei Unbekannten a_1, a_2, a_3 nur dann von Null verschiedene Werte, wenn die Determinante des Systems verschwindet; es muß also dazu sein:

$$(31)\quad \begin{vmatrix} T_x-\lambda & -U_z & -U_y\\ -U_z & T_y-\lambda & -U_x\\ -U_y & -U_x & T_z-\lambda \end{vmatrix}=0\,.$$

Diese Gleichung stellt die Bestimmungsgleichung für λ dar; sie ist vom dritten Grade und wird im allgemeinen drei verschiedene Wurzeln $\lambda', \lambda'', \lambda'''$ haben, deren jeder also nach (30) ein Wertetripel (a_1, a_2, a_3) entspricht, die wir resp. mit denselben Akzenten versehen wollen. Man kann nun zunächst zeigen, daß die drei Werte $\lambda', \lambda'', \lambda'''$ stets reell sein müssen, sowie daß die drei Richtungen (a_1', a_2', a_3'), (a_1'', a_2'', a_3''), (a_1''', a_2''', a_3''') aufeinander senkrecht stehen, wenigstens wenn die drei λ-Werte voneinander verschieden sind.

Wir beweisen zunächst die Reellität der λ-Werte. Zu dem Zwecke schreiben wir die Gleichungen (30) folgendermaßen:

$$(32)\quad \begin{cases} a_1T_x-a_2U_z-a_3U_y-\lambda a_1=0,\\ a_2T_y-a_3U_x-a_1U_z-\lambda a_2=0,\\ a_3T_z-a_1U_y-a_2U_x-\lambda a_3=0. \end{cases}$$

Wir wollen nun einmal annehmen, λ sei komplex, wir setzen also versuchsweise

$$(33)\quad \lambda=l+mi\,;$$

dann werden auch die aus (32) folgenden a-Werte im allgemeinen komplex sein. Wir setzen also ebenfalls:

$$(34)\quad a_\nu=a_\nu+b_\nu i\quad(\nu=1,2,3)\,.$$

(33) und (34) setzen wir in (32) ein; für die erste Gleichung folgt dann z. B.:

$$(a_1+ib_1)T_x-(a_2+ib_2)U_z-(a_3+ib_3)U_y-(l+mi)(a_1+b_1i)=0\,,$$

und daraus ebenso durch zyklische Vertauschung der Indizes x, y, z und 1, 2, 3 die beiden anderen Gleichungen (32). Jetzt trennen wir das Reelle von dem Imaginären. Die reellen Teile der Gleichungen (32) sind:

$$(35)\quad \begin{cases} a_1T_x-a_2U_z-a_3U_y-la_1+mb_1=0\,, & \big|\; b_1\\ a_2T_y-a_3U_x-a_1U_z-la_2+mb_2=0\,, & \big|\; b_2\\ a_3T_z-a_1U_y-a_2U_x-la_3+mb_3=0\,, & \big|\; b_3 \end{cases}$$

Die imaginären Bestandteile liefern:

$$(36)\quad \left\{\begin{array}{l} b_1 T_x - b_2 U_z - b_3 U_y - l b_1 - m a_1 = 0\,, \\ b_2 T_y - b_3 U_x - b_1 U_z - l b_2 - m a_2 = 0\,, \\ b_3 T_z - b_1 U_y - b_2 U_x - l b_3 - m a_3 = 0\,. \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} a_1 \\ a_2\,. \\ a_3 \end{array}\right.$$

Die Gleichungen (35) werden, wie angedeutet, der Reihe nach mit b_1, b_2, b_3, die Gleichungen (36) ebenso resp. mit a_1, a_2, a_3 erweitert und dann sowohl die drei Gleichungen (35) wie auch (36) zueinander addiert. Das liefert die beiden Gleichungen:

$$(37)\quad \left\{\begin{array}{l} (a_1 b_1 T_x + a_2 b_2 T_y + a_3 b_3 T_z) - (a_2 b_1 U_z + a_3 b_2 U_x + a_1 b_3 U_y) \\ \qquad - (a_3 b_1 U_y + a_1 b_2 U_z + a_2 b_3 U_x) - l(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) \\ \qquad + m(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) = 0\,. \end{array}\right.$$

$$(38)\quad \left\{\begin{array}{l} (a_1 b_1 T_x + a_2 b_2 T_y + a_3 b_3 T_z) - (a_1 b_2 U_z + a_2 b_3 U_x + a_3 b_1 U_y) \\ \qquad - (a_1 b_3 U_y + a_2 b_1 U_z + a_3 b_2 U_x) - l(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) \\ \qquad - m(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) = 0\,. \end{array}\right.$$

Die Subtraktion der beiden Gleichungen (37) und (38) liefert:

$$-m(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) = +m(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)\,,$$

oder, da m nach Voraussetzung von Null verschieden ist, da ja sonst λ reell wäre:

$$-(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)\,.$$

Diese Gleichung ist unmöglich, da die a_ν und b_ν reell sind, es sei denn, daß alle a und b gleich Null wären, was durch (27) ausgeschlossen ist. Also führt die Voraussetzung, daß λ komplex sei, zu einem Widerspruch; es ist also bewiesen, daß alle Wurzeln der Gleichung (31) reell sein müssen. Jedem der reellen Werte $\lambda', \lambda'', \lambda'''$ entspricht also ein reelles Wertetripel (a_1, a_2, a_3); es gibt also im allgemeinen, nämlich wenn $\lambda' \neq \lambda'' \neq \lambda'''$, drei Richtungen, auf die als Achsen bezogen das Trägheitsmoment T_s einen Extremwert hat. Nun läßt sich auch leicht zeigen, daß $\lambda', \lambda'', \lambda'''$ positiv sein müssen. Denn wir können die Gleichungen (30), in denen für λ der Wert λ', für a_1, a_2, a_3 die zugehörigen a_1', a_2', a_3' eingesetzt worden sind, so schreiben:

$$(39)\quad \left\{\begin{array}{r} a_1' T_x - a_2' U_z - a_3' U_y = \lambda' a_1' \\ -a_1' U_z + a_2' T_y - a_3' U_x = \lambda' a_2' \\ -a_1' U_y - a_2' U_x + a_3' T_z = \lambda' a_3' \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} a_1' \\ a_2' \\ a_3' \end{array}\right.$$

Werden diese beziehungsweise mit a_1', a_2', a_3' erweitert und addiert, so folgt rechts wegen (27) der Wert λ'; links bei geeigneter Zusammenfassung der Glieder:

$$(40)\quad T_x a_1'^2 + T_y a_2'^2 + T_z a_3'^2 - 2a_2' a_3' U_x - 2a_3' a_1' U_y - 2a_1' a_2' = \lambda'\,.$$

Ein Vergleich mit (26) lehrt, daß λ' das Trägheitsmoment um die Achse in der s'-Richtung $(\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3')$ ist, also in der Tat positiv. Dasselbe gilt entsprechend für λ'' und λ'''. Es ist also:

(41)
$$\begin{cases} \lambda' = T_{s'} \,, \\ \lambda'' = T_{s''} \,, \\ \lambda''' = T_{s'''} \,. \end{cases}$$

Wir wollen nun weiter zeigen, daß für $\lambda' \neq \lambda'' \neq \lambda'''$ die Richtungen s', s'', s''' aufeinander senkrecht stehen. Zu dem Zwecke erweitern wir die Gleichungen (39) statt mit α_1', α_2', α_3' mit α_1'', α_2'', α_3'' und addieren. Das liefert auf der rechten Seite den Ausdruck:

(42)
$$\lambda'(\alpha_1'\alpha_2'' + \alpha_2'\alpha_2'' + \alpha_3'\alpha_3'')\,;$$

den auf der linken Seite brauchen wir nicht auszurechnen. Statt (39) nehmen wir jetzt die aus (30) hervorgehenden Gleichungen, in denen wir jetzt aber die Werte λ'', α_1'', α_2'', α_3'' einsetzen. Erweitern wir diese nun mit α_1', α_2', α_3' und addieren, so folgt rechts:

(43)
$$\lambda''(\alpha_1'\alpha_1'' + \alpha_2'\alpha_2'' + \alpha_3'\alpha_3'')\,.$$

Die linken Seiten beider so erhaltenen Gleichungen sind aber identisch, wie man sich leicht überzeugt. Subtraktion der vollständigen Gleichungen (42) und (43) liefert also das Resultat:

(44)
$$(\lambda' - \lambda'')(\alpha_1'\alpha_1'' + \alpha_2'\alpha_2'' + \alpha_3'\alpha_3'') = 0\,.$$

Da nach Voraussetzung $\lambda' \neq \lambda''$, so muß

(45)
$$\alpha_1'\alpha_1'' + \alpha_2'\alpha_2'' + \alpha_3'\alpha_3'' = 0$$

sein. Das ist aber der Kosinus des Winkels zwischen s' und s'', die nach (45) also senkrecht aufeinander stehen. Genau ebenso zeigt man, daß s' und s''', sowie s'' und s''' aufeinander senkrecht stehen. Die drei ausgezeichneten Richtungen s', s'', s''', denen die Extremwerte der Trägheitsmomente zukommen, bilden also ein rechtwinkeliges Achsenkreuz. Man nennt diese drei Achsen die „Hauptträgheitsachsen“, die zugehörigen Trägheitsmomente die „Hauptträgheitsmomente“.

Das Resultat unserer Untersuchung ist also folgendes:

Durch jeden Punkt eines starren Körpers lassen sich im allgemeinen drei zueinander senkrechte Achsen, die Hauptträgheitsachsen, legen, in Bezug auf die das Trägheitsmoment einen Extremwert (Maximum, Minimum, Sattelwert) annimmt. Dies gilt natürlich auch für den Schwerpunkt, und für diesen zeichnet man die Hauptträgheitsachsen und die Hauptträgheitsmomente durch den Zusatz: „durch den Schwerpunkt“ aus.

Bei den obigen Betrachtungen mußte die Ungleichheit der drei Hauptträgheitsmomente vorausgesetzt werden. Wie liegt die Sache

aber, wenn für einen Körperpunkt zwei Hauptträgheitsmomente, etwa λ' und λ'', gleich werden, aber ungleich λ''' sind?

Dann läßt sich noch immer zeigen, daß die s'-Richtung auf der s'''-Richtung, und ebenso die s''-Richtung auf der s'''-Richtung senkrecht steht. Dagegen läßt sich nicht mehr dasselbe beweisen für s' und s''. Es folgt also nur, daß s' und s'' in einer zu s''' senkrechten Ebene liegen; in dieser Ebene ist jede durch den Körperpunkt gehende Gerade allen anderen gleichwertig.

Werden endlich für einen Körperpunkt alle drei Hauptträgheitsmomente einander gleich, so läßt sich über ihre Richtung gar nichts mehr aussagen: jede durch den betrachteten Punkt gehende Gerade ist allen anderen gleichwertig.

Der Fall zweier gleicher Hauptträgheitsmomente ist z. B. realisiert für den Mittelpunkt eines homogenen Rotationsellipsoides; aus Symmetriegründen folgt bereits, daß die dritte Hauptträgheitsachse die dritte Hauptachse des Ellipsoides ist, während alle durch das Zentrum des Ellipsoides senkrecht zu dieser Hauptachse gezogenen Geraden einander gleichwertig sind. Der Fall dreier gleicher Hauptträgheitsmomente ist realisiert für den Mittelpunkt einer homogenen Kugel; das Trägheitsmoment um jede durch den Mittelpunkt gehende Achse ist gleich groß.

Alle diese Verhältnisse werden besonders klar durch eine geometrische Konstruktion, die man Poinsot verdankt.

Zu diesem Zwecke denken wir uns in dem betrachteten Körperpunkte die Hauptträgheitsachsen konstruiert, die wir als Koordinatenachsen (x, y, z) nehmen wollen; etwa, um die Ideen zu fixieren, s' als x-Achse, s'' als y-Achse, s''' als z-Achse. Dann nehmen die Richtungskosinusse $a_1', a_2', a_3' \ldots a_3'''$ folgende speziellen Werte an:

$$(46) \qquad \begin{cases} a_1' = 1; \quad a_2' = a_3' = 0; \\ a_1'' = 0; \quad a_2'' = 1; \quad a_3'' = 0; \\ a_1''' = a_2''' = 0; \quad a_3''' = 1. \end{cases}$$

Setzt man diese Werte in die Gleichungen (39) ein, und zwar zunächst die eingestrichenen, so folgt aus ihnen:

$$\mathsf{T}_x = \lambda'; \quad U_x = 0 .$$

Macht man es genau so mit den zwei- und dreigestrichenen, so ergibt sich für die Hauptträgheitsachsen als Koordinatenachsen:

$$(47) \qquad \begin{cases} \mathsf{T}_x = \lambda'; \quad \mathsf{T}_y = \lambda''; \quad \mathsf{T}_z = \lambda'''; \\ U_x = U_y = U_z = 0 , \end{cases}$$

und infolgedessen wird aus Gleichung (26), die das Trägheitsmoment in Bezug auf eine beliebige Achse s durch den betrachteten Körperpunkt ausdrückt, wenn wir wieder statt a_1, a_2, a_3 resp. $\cos(s\,x)$, $\cos(s\,y)$, $\cos(s\,z)$ setzen:

$$(48) \qquad \mathsf{T}_s = \mathsf{T}_x \cos^2(s\,x) + \mathsf{T}_y \cos^2(s\,y) + \mathsf{T}_z \cos^2(s\,z);$$

die T_x, T_y, T_z sind jetzt nach (47) die Hauptträgheitsmomente, die Deviationsmomente sind verschwunden; (48) stellt also den einfachsten Ausdruck für T_s vor. Konstruieren wir nun eine Oberfläche, deren vom Koordinatenanfangspunkte (der mit dem gerade ins Auge gefaßten Körperpunkte identisch ist) in einer beliebigen s-Richtung gezogenen Radiusvektor wir R nennen und dessen Länge wir:

$$(49) \qquad R = \frac{C}{\sqrt{T_s}} \quad (C \text{ eine Konstante})$$

nehmen, d. h. umgekehrt proportional der Wurzel aus dem Trägheitsmoment in Bezug auf die s-Achse, dann ist offenbar:

$$\cos(s\,x) = \frac{x}{R}, \quad \cos(s\,y) = \frac{y}{R}, \quad \cos(s\,z) = \frac{z}{R},$$

also nach (49):

$$(50) \qquad \cos(s\,x) = \frac{x\sqrt{T_s}}{C}, \quad \cos(s\,y) = \frac{y\sqrt{T_s}}{C}, \quad \cos(s\,z) = \frac{z\sqrt{T_s}}{C}.$$

Setzt man diese Werte in (48) ein, so folgt:

$$(51) \qquad \frac{T_x}{C^2}x^2 + \frac{T_y}{C^2}y^2 + \frac{T_z}{C^2}z^2 = 1.$$

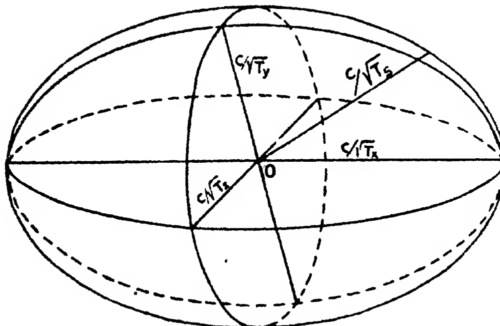


Fig. 103.

Das ist aber die Gleichung eines auf seine Hauptachsen bezogenen dreiachsigen Ellipsoides, da die Koeffizienten $\frac{T_x}{C^2}\ldots$ alle positiv sind; die Achsen haben also die resp. Längen: $\frac{C}{\sqrt{T_x}}$, $\frac{C}{\sqrt{T_y}}$, $\frac{C}{\sqrt{T_z}}$ (Fig. 103). Geometrisch erhält man dieses Ellipsoid folgendermaßen: Man zieht durch den betrachteten Körperpunkt die drei Hauptträgheitsachsen und trägt nach beiden Seiten von ihrem Schnittpunkte aus resp. $\frac{C}{\sqrt{T_x}}$, $\frac{C}{\sqrt{T_y}}$, $\frac{C}{\sqrt{T_z}}$, d. h. die Größen der Achsen des Ellipsoides auf. Ferner ziehe man eine beliebige Achse s durch den

Punkt und trage auf beiden Seiten den Betrag $\frac{c}{\sqrt{T_s}}$ ab, wo T_s aus Gleichung (48) zu entnehmen ist. Darin, daß wir die Werte $\frac{c}{\sqrt{T_s}}$ auf beiden Seiten der Achse abtragen, spricht sich die Tatsache aus, daß die Trägheitsmomente unabhängig vom Rotationssinne um die betreffende Achse sind. Diese „Zweiseitigkeit" der Trägheitsmomente werden wir in der folgenden Nummer noch ausführlicher würdigen.

Sind für einen beliebigen Punkt die Hauptträgheitsachsen und Hauptträgheitsmomente bekannt, so kann man in ihm folglich dieses Ellipsoid, das sog. „Poinsotsche Trägheitsellipsoid" konstruieren, das mit einem Schlage die sämtlichen Trägheitsmomente um durch den betreffenden Punkt gehende Achsen liefert, da der Radiusvektor

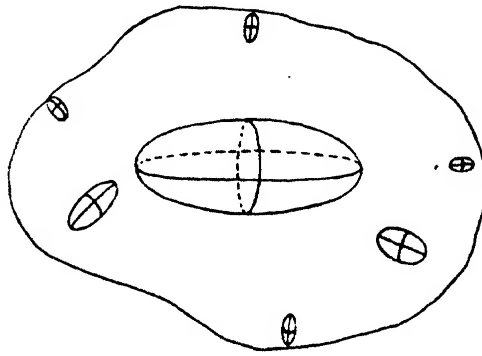


Fig. 104.

des Ellipsoides der Wurzel aus dem Trägheitsmoment um den Radiusvektor als Achse umgekehrt proportional ist.

Sind zwei Hauptträgheitsmomente einander gleich, so wird aus dem Trägheitsellipsoid ein Rotationsellipsoid; sind sie alle drei einander gleich, eine Kugel. Im ersteren Falle ist eine Richtung ausgezeichnet, aber in der dazu senkrechten Ebene sind die Trägheitsmomente um alle durch den Mittelpunkt gehenden Achsen gleich; im letzteren Falle sind alle durch das Zentrum gehenden Achsen gleichberechtigt. Im allgemeinen aber haben wir es mit einem dreiachsigen Ellipsoid mit ungleichen Achsen zu tun; der längsten Achse entspricht der Minimalwert, der kürzesten der Maximalwert des Trägheitsmomentes, und der mittleren endlich das sogenannte „mittlere" Hauptträgheitsmoment, wofür man auch manchmal den Ausdruck „sattelwertiges Trägheitsmoment" gebraucht.

Von besonderem Interesse ist die Konstruktion des Trägheitsellipsoides für den Körper-Schwerpunkt; da die Trägheitsmomente um durch diesen gehende Achsen, verglichen mit solchen um parallele Achsen,

die kleinsten sind, ist nach Konstruktion das im Schwerpunkt liegende Trägheitsellipsoid, das sogenannte Zentralellipsoid, das größte von allen (Fig. 104).

Eine Bemerkung über die Berechnung der Trägheitsmomente und Deviationsmomente soll hier noch Platz finden. In vielen Fällen kann man die starren Körper als kontinuierlich ansehen und hat dann statt m_ν das Massenelement dm zu setzen, wobei die Summation in eine Integration übergeht. Statt der Gleichungen (10) und (22) hat man dann:

$$\text{(10a)}\quad \mathsf{T}_x = \int dm\,(y^2 + z^2), \qquad \mathsf{T}_y = \int dm\,(z^2 + x^2), \qquad \mathsf{T}_z = \int dm\,(x^2 + y^2).$$

$$\text{(22a)}\quad U_x = \int dm\,y\,z, \qquad U_y = \int dm\,z\,x, \qquad U_z = \int dm\,x\,y.$$

In gewissen einfachen Fällen können die Trägheitsmomente und Deviationsmomente nach diesen Formeln berechnet werden. Wie sie experimentell bestimmt werden können, werden wir im nächsten Kapitel erörtern.

75. Tensoren; Tensortripel; lineare Vektorfunktion.

In den Trägheitsmomenten stoßen wir zum ersten Male auf eine neue Klasse von Größen, die neben den Skalaren und Vektoren in der Physik eine große Rolle spielen. Das Trägheitsmoment nämlich ist durch seinen Betrag nicht völlig charakterisiert, sondern erst durch Hinzufügung der Richtung der Rotationsachse, um die es genommen ist. Aber dennoch ist es kein Vektor, denn bei einem solchen ist die Richtung einseitig, während beim Trägheitsmoment beide Richtungen der Achse gleichberechtigt sind. Dies drückt sich schon, wie wir in der vorigen Nummer erwähnten, darin aus, daß wir bei der Konstruktion des Trägheitsellipsoides den Ausdruck $\frac{C}{\sqrt{\mathsf{T}}}$, nach beiden Seiten vom betrachteten Körperpunkte aus auf der Rotationsachse auftrugen.

Solche Größen, denen zwar außer dem Betrage eine Richtung zukommt, bei denen aber beide Seiten dieser Richtung gleichberechtigt sind, nennt man nach W. Voigt, dem man zuerst eine systematische Untersuchung dieser Größen verdankt, Tensoren. Der Name kommt daher, daß die Dehnung eines elastischen Körpers der typische Repräsentant eines Tensors ist. Denn wenn wir einen beliebigen Körper parallel einer bestimmten Richtung dehnen, so genügt zur Charakterisierung dieser Dehnung nicht deren Betrag, etwa die prozentische Verlängerung, sondern es muß auch die Richtung, parallel der die Dehnung erfolgt, angegeben werden, deren beide Seiten aber offenbar gleichwertig sind. In der Elastizitätstheorie werden wir solche Tensoren häufiger antreffen, und es ist deshalb zweckmäßig, schon hier etwas genauer auf ihre Eigen-

schaften einzugehen. Auf einen Unterschied gegenüber den Vektoren muß von Anfang an aufmerksam gemacht werden: Der Betrag eines Vektors ist stets positiv, der eines Tensors braucht es nicht zu sein, wie man am Beispiele der Dehnung erkennt. Eine negative Dehnung, d. h. eine Verkürzung, ist ein Tensor mit negativem Betrage.

Wir wollen einen Tensor beliebiger Richtung durch T_1 bezeichnen und fragen nach den Komponenten desselben, die wir $\mathsf{T}_{1x}, \mathsf{T}_{1y}, \mathsf{T}_{1z}$ nennen. Es läge nahe, nach Analogie der Vektoren $\mathsf{T}_{1x}=\mathsf{T}_1 \cos(\mathsf{T}_1, x)$, $\mathsf{T}_{1y}=\mathsf{T}_1 \cos(\mathsf{T}_1, y)$, $\mathsf{T}_{1z}=\mathsf{T}_1 \cos(\mathsf{T}_1, z)$ zu setzen; doch würden diese Formeln der Zweiseitigkeit des Tensors nicht Rechnung tragen, da, wenn man die Winkel (T_1, x), (T_1, y), (T_1, z) um π wachsen läßt, die Komponenten in den dem Vorzeichen nach entgegengesetzten Wert überschlagen würden, während sie nach unserer Auffassung ungeändert bleiben sollten. Man kann diesen Übelstand auf folgende zwei Weisen vermeiden, die beide ihre Vorteile und Nachteile haben. Man kann nämlich erstens die Größen:

$$(52) \qquad A_1=\mathsf{T}_1 \cos^2(\mathsf{T}_1, x), \quad B_1=\mathsf{T}_1 \cos^2(\mathsf{T}_1, y), \quad C_1=\mathsf{T}_1 \cos^2(\mathsf{T}_1, z)$$

als die Komponenten des Tensors bezeichnen, zweitens aber auch die Größen:

$$(53) \quad \begin{cases} A_1'=\mathsf{T}_1 \cos(\mathsf{T}_1, y)\cos(\mathsf{T}_1, z), \quad B_1'=\mathsf{T}_1 \cos(\mathsf{T}_1, z)\cos(\mathsf{T}_1, x), \\ C_1'=\mathsf{T}_1 \cos(\mathsf{T}_1, x)\cos(\mathsf{T}_1, y), \end{cases}$$

die man nach Voigt als Tensorkomponenten erster und zweiter Art unterscheidet. Sie sind natürlich, da drei Stücke zur Bestimmung eines Tensors ausreichen, nicht unabhängig voneinander, vielmehr sieht man leicht, daß Relationen zwischen ihnen bestehen; denn nach (52) ist ja:

$$\cos^2(\mathsf{T}_1, x)=\frac{A_1}{\mathsf{T}_1}, \quad \cos^2(\mathsf{T}_1, y)=\frac{B_1}{\mathsf{T}_1}, \quad \cos^2(\mathsf{T}_1, z)=\frac{C_1}{\mathsf{T}_1},$$

also ist nach (53):

$$(54) \qquad A_1'^2=B_1 C_1, \quad B_1'^2=C_1 A_1, \quad C_1'^2=A_1 B_1,$$

oder, nach A_1, B_1, C_1 aufgelöst:

$$(55) \qquad A_1=\frac{B_1' C_1'}{A_1'}, \quad B_1=\frac{C_1' A_1'}{B_1'}, \quad C_1=\frac{A_1' B_1'}{C_1'}.$$

Wie wird nun durch die Komponenten erster und zweiter Art der Tensor bestimmt? Seien etwa die Komponenten A_1, B_1, C_1 erster Art gegeben, so ist nach (52) zunächst

$$(56) \qquad \mathsf{T}_1=A_1+B_1+C_1,$$

d. h. der Betrag des Tensors ist durch die Komponenten erster Art völlig bestimmt; aber seine Richtungskosinusse nur dem absoluten Betrage nach, denn aus (52) folgt nur:

$$(57) \quad \cos(\mathsf{T}_1, x)=\pm\sqrt{\frac{A_1}{\mathsf{T}_1}}, \quad \cos(\mathsf{T}_1, y)=\pm\sqrt{\frac{B_1}{\mathsf{T}_1}}, \quad \cos(\mathsf{T}_1, z)=\pm\sqrt{\frac{C_1}{\mathsf{T}_1}}.$$

Dadurch bleibt der Oktant, in dem der Tensor liegt, völlig unbestimmt, indem die Gleichungen (57) acht möglichen Vorzeichenkombinationen entsprechen:

1)	+	+	+
2)	+	+	−
3)	+	−	+
4)	−	+	+
5)	+	−	−
6)	−	−	+
7)	−	+	−
8)	−	−	−,

während die in einem Tensor liegende Unbestimmtheit des Oktanten, die wegen seiner Zweiseitigkeit notwendig vorhanden sein muß, nur eine zweifache sein dürfte.

Anderseits ist, wenn die Komponenten A_1', B_1', C_1' zweiter Art gegeben sind, nach (56) und (55):

$$\mathsf{T}_1 = \frac{B_1' C_1'}{A_1'} + \frac{C_1' A_1'}{B_1'} + \frac{A_1' B_1'}{C_1'}, \tag{58}$$

d. h. der Tensor ist seiner Größe nach auch durch die Komponenten zweiter Art vollkommen bestimmt, aber gleichzeitig auch seiner Richtung nach. Denn aus (53) folgt offenbar:

$$A_1' \cos(\mathsf{T}_1, x) = B_1' \cos(\mathsf{T}_1, y) = C_1' \cos(\mathsf{T}_1, z)$$

oder:

$$\cos(\mathsf{T}_1, x) : \cos(\mathsf{T}_1, y) : \cos(\mathsf{T}_1, z) = \frac{1}{A_1'} : \frac{1}{B_1'} : \frac{1}{C_1'}, \tag{59}$$

während gleichzeitig nach (57) und (55) sich für die Richtungskosinusse selbst ergibt:

$$\left\{\begin{aligned} &\cos(\mathsf{T}_1, x) = \pm\sqrt{\frac{B_1' C_1'}{A_1' \mathsf{T}_1}}; \quad \cos(\mathsf{T}_1, y) = \pm\sqrt{\frac{C_1' A_1'}{B_1' \mathsf{T}_1}}; \\ &\cos(\mathsf{T}_1, z) = \pm\sqrt{\frac{A_1' B_1'}{C_1' \mathsf{T}_1}}. \end{aligned}\right. \tag{60}$$

Die Größen unter dem Wurzelzeichen sind stets positiv, wie unter Beachtung der Formeln (55) und (52) leicht folgt; die Richtungskosinusse fallen also stets reell aus, wie es sein muß.

Die Komponenten zweiter Art bestimmen also wegen (59) außer dem Betrage der Richtungskosinusse auch deren relative Vorzeichen; sie bestimmen somit die Richtung des Tensors vollständig und zeigen sich somit den Komponenten erster Art überlegen. Sind zum Beispiel alle Größen A', B', C' positiv, so muß man wegen (59) in Gleichung (60) die Vorzeichen entweder alle positiv oder alle negativ wählen:

1)	+	+	+
2)	−	−	−,

d. h. man hat hier gerade diejenige Unbestimmtheit, nämlich eine zweifache, die im Wesen des Tensors notwendig begründet ist.

Dagegen zeigen sich anderseits die Komponenten erster Art denen zweiter Art überlegen, wenn der Tensor T_1 mit einer der Koordinatenachsen zusammenfällt; z. B. wenn T_1 in die x-Achse fällt, so ist nach (52):

(60a) $$A_1 = T_1\,, \quad B_1 = C_1 = 0\,,$$

und nach (53):

(60b) $$A_1' = B_1' = C_1' = 0\,,$$

d. h. in diesem Falle versagt die Bestimmung des Tensors aus den Komponenten zweiter Art, während die aus den Komponenten erster Art möglich bleibt und sogar besonders einfach wird, da T_1 direkt gleich einer Komponente erster Art wird. Daraus geht sofort hervor, daß A_1, B_1, C_1 mit T_1 gleichartige Größen sind, während dies für A_1', B_1', C_1' offenbar nicht gilt.

Wegen des folgenden ist es notwendig, zu untersuchen, wie die Komponenten A_1, B_1, C_1, A_1', B_1', C_1' eines Tensors T_1 sich ändern, wenn man von dem Koordinatensystem (x, y, z) zu einem dagegen gedrehten (ξ, η, ζ) übergeht. Von den Vektoren wissen wir bereits, daß sie sich transformieren, wie die Koordinaten selbst; von den Tensoren, deren Komponenten ganz andersartig gebildet sind, ist dies schon von vornherein nicht zu erwarten.

Es mögen (x, y, z) und (ξ, η, ζ) in folgender Weise zusammenhängen:

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1\xi + \alpha_2\eta + \alpha_3\zeta\,, \\ y &= \beta_1\xi + \beta_2\eta + \beta_3\zeta\,, \\ z &= \gamma_1\xi + \gamma_2\eta + \gamma_3\zeta\,. \end{aligned}$$

Die Komponenten erster Art des Tensors T_1 in Bezug auf das (ξ, η, ζ)-System sind nach der Definitionsgleichung (52) offenbar:

(52a) $$\overline{A}_1 = T_1 \cos^2(T_1, \xi); \quad \overline{B}_1 = T_1 \cos^2(T_1, \eta); \quad \overline{C}_1 = T_1 \cos^2(T_1, \zeta),$$

diejenigen zweiter Art nach (53):

(53a) $$\left\{ \begin{aligned} \overline{A}_1' &= T_1 \cos(T_1, \eta)\cos(T_1, \zeta); \quad \overline{B}_1' = T_1 \cos(T_1, \zeta)\cos(T_1, \xi); \\ \overline{C}_1' &= T_1 \cos(T_1, \xi)\cos(T_1, \eta). \end{aligned} \right.$$

Es sei nun der Tensor T_1 durch eine vom Koordinatenanfangspunkte gezogene Strecke repräsentiert von der Größe T_1 und von der dem Tensor zukommenden Richtung, von der wir einen der beiden möglichen Sinne willkürlich auszeichnen, und die daher entweder durch die Winkel (T_1, x), (T_1, y), (T_1, z) oder durch (T_1, ξ), (T_1, η), (T_1, ζ) definiert ist. Der Endpunkt dieser Strecke habe die Koordinaten (x, y, z) resp. (ξ, η, ζ). Es ist dann offenbar:

Orthogonale Tensorkomponenten.

Die Transformationsformeln sind nicht orthogonal. Man kann aber ein System modifizierter Tensorkomponenten bilden, die sich bei der Transformation in der Tat orthogonal verhalten.

	X'	Y'	Z'
X	α_1	β_1	γ_1
Y	α_2	β_2	γ_2
Z	α_3	β_3	γ_3

	T_{11}'	T_{22}'	T_{33}'	$\sqrt{2}\, T_{23}'$	$\sqrt{2}\,.\, T_{31}'$	$\sqrt{2}\, T_{12}'$
T_{11}	α_1^2	β_1^2	γ_1^2	$\sqrt{2}\,.\beta_1\gamma_1$	$\sqrt{2}\,\gamma_1\alpha_1$	$\sqrt{2}\,\alpha_1\beta_1$
T_{22}	α_2^2	β_2^2	γ_2^2	$\sqrt{2}\,\beta_2\gamma_2$	$\sqrt{2}\,\gamma_2\alpha_2$	$\sqrt{2}\,\alpha_2\beta_2$
T_{33}	α_3^2	β_3^2	γ_3^2	$\sqrt{2}\,\beta_3\gamma_3$	$\sqrt{2}\,\gamma_3\alpha_3$	$\sqrt{2}\,\alpha_3\beta_3$
$\sqrt{2}\, T_{23}$	$\sqrt{2}\,\alpha_2\alpha_3$	$\sqrt{2}\,\beta_2\beta_3$	$\sqrt{2}\,\gamma_2\gamma_3$	$\beta_2\gamma_3+\gamma_2\beta_3$	$\gamma_2\alpha_3+\alpha_2\gamma_3$	$\alpha_2\beta_3+\alpha_3\beta_2$
$\sqrt{2}\, T_{31}$	$\sqrt{2}\,\alpha_3\alpha_1$	$\sqrt{2}\,\beta_3\beta_1$	$\sqrt{2}\,\gamma_3\gamma_1$	$\beta_3\gamma_1+\gamma_3\beta_1$	$\gamma_3\alpha_1+\alpha_3\gamma_1$	$\alpha_3\beta_1+\alpha_1\beta_3$
$\sqrt{2}\, T_{12}$	$\sqrt{2}\,\alpha_1\alpha_2$	$\sqrt{2}\,\beta_1\beta_2$	$\sqrt{2}\,\gamma_1\gamma_2$	$\beta_1\gamma_2+\beta_2\gamma_1$	$\gamma_1\alpha_2+\gamma_2\alpha_1$	$\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1$

$$\cos(T_1, x) = \frac{x}{T_1}, \quad \cos(T_1, y) = \frac{y}{T_1}, \quad \cos(T_1, z) = \frac{z}{T_1}.$$

Also können die Tensorkomponenten in Bezug auf das (x, y, z)-System geschrieben werden:

$$\text{(61)} \quad A_1 = \frac{x^2}{T_1}, \ B_1 = \frac{y^2}{T_1}, \ C_1 = \frac{z^2}{T_1}; \ A_1' = \frac{yz}{T_1}, \ B_1' = \frac{zx}{T_1}, \ C_1' = \frac{xy}{T_1}.$$

Ebenso ist für die Komponenten im (ξ, η, ζ)-System:

$$\text{(61a)} \quad \bar{A}_1 = \frac{\xi^2}{T_1}, \ \bar{B}_1 = \frac{\eta^2}{T_1}, \ \bar{C}_1 = \frac{\zeta^2}{T_1}; \ \bar{A}_1' = \frac{\eta\zeta}{T_1}, \ \bar{B}_1' = \frac{\zeta\xi}{T_1}, \ \bar{C}_1' = \frac{\xi\eta}{T_1}.$$

Drückt man nun in den Gleichungen (61) die Koordinaten x, y, z durch ihre Werte in ξ, η, ζ aus, so erhält man z. B. für A_1, für das wir allein die Rechnung durchführen wollen:

$$\text{(52a)} \quad T_1 A_1 = a_1^2\xi^2 + a_2^2\eta^2 + a_3^2\zeta^2 + 2a_1a_2\xi\eta + 2a_2a_3\eta\zeta + 2a_3a_1\zeta\xi,$$

d. h. unter Berücksichtigung von (61a) erhält man das folgende Transformationsschema:

$$\text{(62)} \quad \left\{\begin{aligned}
A_1 &= \bar{A}_1 a_1^2 + \bar{B}_1 a_2^2 + \bar{C}_1 a_3^2 + 2\bar{A}_1' a_2 a_3 + 2\bar{B}_1' a_3 a_1 + 2\bar{C}_1' a_1 a_2, \\
B_1 &= \bar{A}_1 \beta_1^2 + \bar{B}_1 \beta_2^2 + \bar{C}_1 \beta_3^2 + 2\bar{A}_1' \beta_2\beta_3 + 2\bar{B}_1' \beta_3\beta_1 + 2\bar{C}_1' \beta_1\beta_2, \\
C_1 &= \bar{A}_1 \gamma_1^2 + \bar{B}_1 \gamma_2^2 + \bar{C}_1 \gamma_3^2 + 2\bar{A}_1' \gamma_2\gamma_3 + 2\bar{B}_1' \gamma_3\gamma_1 + 2\bar{C}_1' \gamma_1\gamma_2, \\
A_1' &= \bar{A}_1 \beta_1\gamma_1 + \bar{B}_1 \beta_2\gamma_2 + \bar{C}_1 \beta_3\gamma_2 + \bar{A}_1'(\beta_2\gamma_3 + \beta_3\gamma_2) \\
&\qquad + \bar{B}_1'(\beta_3\gamma_1 + \beta_1\gamma_3) + \bar{C}_1'(\beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1), \\
B_1' &= \bar{A}_1 \gamma_1 a_1 + \bar{B}_1 \gamma_2 a_2 + \bar{C}_1 \gamma_3 a_3 + \bar{A}_1'(\gamma_2 a_3 + \gamma_3 a_2) \\
&\qquad + \bar{B}_1'(\gamma_3 a_1 + \gamma_1 a_3) + \bar{C}_1'(\gamma_1 a_2 + \gamma_2 a_1), \\
C_1' &= \bar{A}_1 a_1\beta_1 + \bar{B}_1 a_2\beta_2 + \bar{C}_1 a_3\beta_3 + \bar{A}_1'(a_2\beta_3 + a_3\beta_2) \\
&\qquad + \bar{B}_1'(a_3\beta_1 + a_1\beta_3) + \bar{C}_1'(a_1\beta_2 + a_2\beta_1).
\end{aligned}\right.$$

Die Komponenten erster Art transformieren sich also wie die Quadrate, die zweiter Art wie die Produkte der Koordinaten.

Nunmehr können wir zur Untersuchung von mehreren Tensoren übergehen; denn in der Natur kommt häufig, ja sogar meistens, der Fall vor, daß Tensoren zu je dreien auftreten, die drei zueinander senkrechte Richtungen haben. Dann haben wir in der Voigtschen Ausdrucksweise ein sogenanntes „Tensortripel" vor uns. Das Tensortripel ist durch sechs Größen vollkommen bestimmt, nämlich offenbar durch die Beträge der drei Tensoren T_1, T_2, T_3, und durch die drei Winkel, die die Richtung des Tensorachsenkreuzes gegen das Koordinatensystem festlegen. Wir wollen nun die Komponenten erster und zweiter Art jedes Tensors dieses Tripels bilden; d. h. die Größen A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3 und die entsprechenden gestrichenen Größen. Bilden wir dann die Summen der zusammengehörigen Komponenten:

$$(63)\quad \begin{cases} A = A_1 + A_2 + A_3, \\ B = B_1 + B_2 + B_3, \\ C = C_1 + C_2 + C_3, \\ A' = A_1' + A_2' + A_3', \\ B' = B_1' + B_2' + B_3', \\ C' = C_1' + C_2' + C_3', \end{cases}$$

so haben wir sechs Größen, die wir A, B, C, A', B', C' nennen wollen, durch die, wie sich zeigen läßt, das Tensortripel im allgemeinen gleichfalls vollkommen bestimmt ist. Man macht sich leicht klar, daß die obigen sechs Größen voneinander völlig unabhängig sind, was eine selbstverständliche Voraussetzung der eben ausgesprochenen Behauptung ist, daß sie das Tensortripel bestimmen.

Betrachten wir zum Beweise eine beliebige Richtung s durch den Koordinatenanfangspunkt, so können wir derselben folgende Funktion S mit Hilfe der sechs Größen A, B, C, A', B', C' und der Richtungskosinusse $\cos(sx)$, $\cos(sy)$, $\cos(sz)$ zuordnen:

$$(64)\quad \begin{cases} S = A\cos^2(sx) + B\cos^2(sy) + C\cos^2(sz) + 2A'\cos(sy)\cos(sz) \\ \qquad + 2B'\cos(sz)\cos(sx) + 2C'\cos(sx)\cos(sy). \end{cases}$$

Die hier definierte Größe S ist ein Tensor, da ihr zwar eine bestimmte Richtung s zukommt, aber eine Änderung der Winkel (sx), (sy), (sz) um π nichts an S ändert.

Konstruieren wir nun eine[1]) Oberfläche zweiter Ordnung, indem wir den vom Anfangspunkte gezogenen Radiusvektor $R = \frac{1}{\sqrt{\pm S}}$ nehmen, wobei das untere Vorzeichen zu wählen ist, wenn S negativ ist. Dann sind natürlich:

$$\cos(sx) = \frac{x}{R} = x\sqrt{\pm S} \text{ usw.},$$

und aus (64) wird:

$$(65)\quad \pm 1 = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2A'yz + 2B'zx + 2C'xy;$$

(x, y, z) sind dabei die Koordinaten eines der Fläche angehörenden Punktes. Diese Fläche ist offenbar völlig bestimmt, wenn A, B, C, A', B', C' gegeben sind. Man kann auch von den auf das (ξ, η, ζ)-System bezogenen Größen $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{A}', \bar{B}', \bar{C}'$ ausgehen, und eine (65) analoge Fläche bilden:

$$(65\text{a})\quad \pm 1 = \bar{A}\xi^2 + \bar{B}\eta^2 + \bar{C}\zeta^2 + 2\bar{A}'\eta\zeta + 2\bar{B}'\zeta\xi + 2\bar{C}'\xi\eta,$$

wobei (ξ, η, ζ) die Koordinaten eines Punktes der Oberfläche sind. Wir behaupten nun, daß die durch (65) und (65a) definierten Flächen iden-

[1]) Das Wort „eine" ist cum grano salis zu verstehen. Es wird sich bei der weiteren Erörterung zeigen, daß die Gleichung (65) unter Umständen zwei zueinander konjugierte Hyperboloide, also zwei Flächen zweiter Ordnung, darstellt. Ein Mißverständnis ist durch die obige kurze Ausdrucksweise aber wohl kaum möglich.

tisch sind, d. h. daß die nach der Vorschrift (65) gebildete Fläche gegen eine Koordinatentransformation invariant ist. Denn benutzen wir die Gleichungen, welche ξ, η, ζ durch x, y, z ausdrücken, so folgt aus (65a):

$$\begin{aligned}\pm 1 = \bar{A}[\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z]^2 + \bar{B}[\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z]^2 + \bar{C}[\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z]^2 \\ + 2\bar{A}'[\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z][\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z] \\ + 2\bar{B}'[\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z][\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z] \\ + 2\bar{C}'[\alpha_1 x + \beta_2 y + \gamma_1 z][\alpha_2 x + \beta_2 y + \beta_2 z].\end{aligned}$$

Ordnet man diese Gleichung nach den Größen x^2, y^2, z^2, yz, zx, xy, so hat man z. B. für den Koeffizienten von x^2:

$$\bar{A}\alpha_1^2 + \bar{B}\alpha_2^2 + \bar{C}\alpha_3^2 + 2\bar{A}'\alpha_2\alpha_3 + 2\bar{B}'\alpha_3\alpha_1 + 2\bar{C}'\alpha_1\alpha_2,$$

und das ist nach der ersten Gleichung (62) nichts anderes wie A; ebenso folgte als Koeffizient für y^2, z^2, yz, zx, xy resp. B, C, A', B', C'; mithin geht Gleichung (65a) durch die Transformation wirklich in (65) über, womit die Invarianz der Fläche (65) gegen Koordinatentransformationen bewiesen ist. Daß wir auch wirklich die Gleichungen (62) hier benutzen dürfen, beruht darauf, daß die hier benutzten Größen A, B, C A', B', C' nach Gleichung (63) Summen von Tensorkomponenten sind (z. B. A ist die Summe $A_1 + A_2 + A_3$); die Summen transformieren sich aber natürlich wie die Summanden.

Wählen wir nun speziell unser Koordinatensystem (x, y, z) so, daß die Achsen respektive mit den Hauptachsen der Fläche (65) zusammenfallen, so müssen die doppelten Produkte verschwinden, d. h. $A' = B' = C' = 0$ werden. Was bedeutet dies hinsichtlich der Lage der Tensoren T_1, T_2, T_3 des Tensortripels?

Wir wollen, um diese Frage zu beantworten, zunächst voraussetzen, daß die drei Tensoren T_1, T_2, T_3 des Tripels voneinander verschieden sind. Ferner legen wir denselben für einen Moment, um die Zweideutigkeit der Richtung zu beseitigen, einen bestimmten Richtungssinn bei, so daß die Winkel $(\mathsf{T}_1, x) \ldots$ bis (T_3, z) vollkommen eindeutig festgelegt sind; wir wählen diese Richtungen so, daß das Achsenkreuz des Tensortripels, ebenso wie das (x, y, z)-System, ein rechtshändiges System wird. Ferner bezeichnen wir der Kürze halber die Richtungskosinusse der T gegen die Achsen folgendermaßen:

$$\begin{aligned}\cos(\mathsf{T}_1, x) &= \alpha_1; \quad \cos(\mathsf{T}_1, y) = \beta_1; \quad \cos(\mathsf{T}_1, z) = \gamma_1; \\ \cos(\mathsf{T}_2, x) &= \alpha_2; \quad \cos(\mathsf{T}_2, y) = \beta_2; \quad \cos(\mathsf{T}_2, z) = \gamma_2; \\ \cos(\mathsf{T}_3, x) &= \alpha_3; \quad \cos(\mathsf{T}_3, y) = \beta_3; \quad \cos(\mathsf{T}_3, z) = \gamma_3.\end{aligned}$$

Diese Bezeichnungen sind so gewählt, damit wir für die zwischen diesen 9 Größen bestehenden 6 Relationen die Gleichungen (33), (34), (35), (37) des VI. Kapitels auf pag. 324 ff. unverändert benutzen können.

Nach den Definitionsgleichungen (63) und (53) lassen sich nun die Bedingungen $A' = B' = C' = 0$ so schreiben:

$$(66)\quad \begin{cases} A' \equiv \mathsf{T}_1\beta_1\gamma_1 + \mathsf{T}_2\beta_2\gamma_2 + \mathsf{T}_3\beta_3\gamma_3 = 0\,, \\ B' \equiv \mathsf{T}_1\gamma_1\alpha_1 + \mathsf{T}_2\gamma_2\alpha_2 + \mathsf{T}_3\gamma_3\alpha_3 = 0\,, \\ C' \equiv \mathsf{T}_1\alpha_1\beta_1 + \mathsf{T}_2\alpha_2\beta_2 + \mathsf{T}_3\alpha_3\beta_3 = 0\,. \end{cases}$$

Wir behaupten, daß, wenn diese Gleichungen befriedigt sind unter der Voraussetzung $\mathsf{T}_1 \neq \mathsf{T}_2 \neq \mathsf{T}_3$, die Tensoren mit den Koordinatenachsen, also auch mit den Hauptachsen der Fläche (65) zusammenfallen.

Zunächst ist leicht zu sehen, daß das eine hinreichende Bedingung für das Verschwinden der Gleichungen (66) ist. Denn ist z. B. T_1 parallel der x-Achse, T_2 parallel der y-Achse, T_3 parallel der z-Achse, so ist $\alpha_1 = \beta_2 = \gamma_3 = \pm 1$, dagegen $\beta_1 = \gamma_1 = \alpha_2 = \gamma_2 = \alpha_3 = \beta_3 = 0$. Man sieht in der Tat, daß unter dieser Voraussetzung die rechten Seiten von (66) sogar einzeln verschwinden; also ist Gleichung (66) erfüllt. Das ist natürlich auch der Fall, wenn T_1 usw. einer der anderen Achsen parallel ist. Wir wollen nun zeigen, daß das Zusammenfallen der Tensoren mit je einer Koordinatenachse auch notwendig zur Erfüllung von (66) ist. Benutzt man die Relationen (35) des VI. Kapitels auf pag. 324, so kann man die erste Gleichung (66) schreiben:

$$A' \equiv -\mathsf{T}_1(\beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3) + \mathsf{T}_2\beta_2\gamma_2 + \mathsf{T}_3\beta_3\gamma_3 = 0\,.$$

oder

$$A' \equiv (\mathsf{T}_2 - \mathsf{T}_1)\beta_2\gamma_2 + (\mathsf{T}_3 - \mathsf{T}_1)\beta_3\gamma_3 = 0;$$

analog die übrigen, so daß wir erhalten:

$$(66\text{a})\quad \begin{cases} A' \equiv (\mathsf{T}_2 - \mathsf{T}_1)\beta_2\gamma_2 + (\mathsf{T}_3 - \mathsf{T}_1)\beta_3\gamma_3 = 0\,, \\ B' \equiv (\mathsf{T}_2 - \mathsf{T}_1)\gamma_2\alpha_2 + (\mathsf{T}_3 - \mathsf{T}_1)\gamma_3\alpha_3 = 0\,, \\ C' \equiv (\mathsf{T}_2 - \mathsf{T}_1)\alpha_2\beta_2 + (\mathsf{T}_3 - \mathsf{T}_1)\alpha_3\beta_3 = 0\,. \end{cases}$$

In dieser Gleichung sind $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ eliminiert; diese drei Größen können, wegen der Relation $\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1$ nicht alle verschwinden; nehmen wir etwa an, $\alpha_1 \neq 0$. Jetzt erweitern wir die zweite Gleichung (66a) mit β_2, die dritte mit γ_2 und subtrahieren; es folgt:

$$\alpha_3(\mathsf{T}_3 - \mathsf{T}_1)(\gamma_3\beta_2 - \gamma_2\beta_3) = 0\,.$$

Durch Erweitern derselben Gleichungen mit resp. β_3 und γ_3 und Subtraktion folgt weiter:

$$\alpha_2(\mathsf{T}_2 - \mathsf{T}_1)(\gamma_3\beta_2 - \gamma_2\beta_3) = 0\,.$$

Beide Gleichungen können vermittels der Relationen (37) des VI. Kapitels auf pag. 325 einfacher geschrieben werden, da der dritte Faktor gleich α_1 ist; also:

$$(66\text{b})\quad \begin{cases} (\mathsf{T}_3 - \mathsf{T}_1)\alpha_1\alpha_3 = 0\,, \\ (\mathsf{T}_2 - \mathsf{T}_1)\alpha_1\alpha_2 = 0\,. \end{cases}$$

Diese Gleichungen können nur erfüllt sein, da $\mathsf{T}_3 - \mathsf{T}_1 \neq 0$, $\mathsf{T}_2 - \mathsf{T}_1 \neq 0$, $\alpha_1 \neq 0$ sein sollen, wenn gleichzeitig

$$\alpha_3 = \alpha_2 = 0\,.$$

Wegen $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$ folgt daraus weiter, daß $\alpha_1 = \pm 1$, und damit aus $\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 0$, daß auch $\beta_1 = \gamma_1 = 0$ sein müssen. Das System

$$\alpha_1 = \pm 1 ; \quad \beta_1 = \gamma_1 = 0$$

bedeutet aber, daß T_1 (unbeschadet der Zweideutigkeit, die sich im doppelten Zeichen von α_1 ausdrückt) mit der x-Achse zusammenfällt. Genau ebenso läßt sich zeigen, daß auch T_2 und T_3 mit je einer der anderen Achsen koinzidieren; man kann es also durch geeignete Numerierung der Tensoren erreichen, daß T_2 mit der y-Achse, T_3 mit der z-Achse koinzidiert.

Also: Aus der Bedingung $A' = B' = C' = 0$ folgt, wenn alle Tensoren T_1, T_2, T_3 voneinander verschieden sind, daß die drei Tensoren je einer Koordinatenachse parallel sind, d. h. mit den Hauptachsen der Fläche (65) zusammenfallen.

Das folgt jedoch nicht mehr, wenn zwei der Tensoren T_1, T_2, T_3 einander gleich werden. Wir wollen nunmehr diesen Fall untersuchen, also etwa annehmen $T_1 = T_2$, aber $T_3 \neq T_1$ und $T_3 \neq T_2$. Dann vereinfacht sich (66a) folgendermaßen:

$$\text{(66c)} \qquad \begin{cases} (T_3 - T_1)\,\beta_3\gamma_3 = 0\,, \\ (T_3 - T_1)\,\gamma_3\alpha_3 = 0\,, \\ (T_3 - T_1)\,\alpha_3\beta_3 = 0\,. \end{cases}$$

Diese Gleichungen sind nur dann und stets dann erfüllt, wenn zwei der Größen α_3, β_3, γ_3 den Wert 0 haben; die dritte hat dann den Wert ± 1 wegen der Relation $\alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 = 1$. Sind z. B. $\alpha_3 = \beta_3 = 0$, $\gamma_3 = \pm 1$, so heißt das, daß T_3 mit der z-Achse koinzidiert. Würden wir eine andere Wahl treffen, so würde T_3 mit einer der beiden anderen Achsen koinzidieren; doch kann man dann die Numerierung der T so abändern, daß stets T_3 mit der z-Richtung zusammenfällt. T_1 und T_2 liegen dann in der xy-Ebene, aber über ihre Richtung läßt sich nichts aussagen.

Sind endlich alle drei Tensoren einander gleich, $T_1 = T_2 = T_3$, so sind die Gleichungen (66a) stets erfüllt, bei beliebiger Lage der Tensoren.

Nehmen wir nun den ersten Fall $T_1 \neq T_2 \neq T_3$ an. Dann folgt aus $A' = B' = C' = 0$, daß die Richtungen dieser Tensoren resp. den Koordinatenrichtungen parallel sind, und durch geeignete Numerierung kann erreicht werden, daß T_1 parallel der x-Achse, T_2 parallel der y-Achse, T_3 parallel der z-Achse wird. Dann werden die Winkel folgende Werte annehmen:

$$(T_1, x) = 0, \qquad (T_1, y) = (T_1, z) = \pm \frac{\pi}{2};$$
$$(T_2, x) = \pm \frac{\pi}{2}, \qquad (T_2, y) = 0, \qquad (T_2, z) = \pm \frac{\pi}{2};$$
$$(T_3, x) = \pm \frac{\pi}{2}, \qquad (T_3, y) = \pm \frac{\pi}{2}, \qquad (T_3, z) = 0,$$

Also wird nach den Definitionsgleichungen (63) und (52):

$$A = A_1 = \mathsf{T}_1 ,$$
$$B = B_2 = \mathsf{T}_2 ,$$
$$C = C_3 = \mathsf{T}_3 ,$$

also die auf (x, y, z) als die Hauptachsen bezogene Fläche (65):

$$\pm 1 = \mathsf{T}_1 x^2 + \mathsf{T}_2 y^2 + \mathsf{T}_3 z^2 ,$$

und, wenn die Größen der Halbachsen derselben durch a, b, c bezeichnet werden, so muß sein:

$$A = \mathsf{T}_1 = \frac{1}{a^2}, \qquad B = \mathsf{T}_2 = \frac{1}{b^2}, \qquad C = \mathsf{T}_3 = \frac{1}{c^2}.$$

Es ist nun die Fläche (65) stets durch die Werte A, B, C, A', B', C' völlig bestimmt, da die Größen und Richtungen der Halbachsen bestimmt sind, und damit auch die Größen und Richtungen der Tensoren T_1, T_2, T_3 des Tensortripels. Dieses ist also, wenn $\mathsf{T}_1 \neq \mathsf{T}_2 \neq \mathsf{T}_3$, durch die sechs Größen A, B, C, A', B', C' vollkommen bestimmt, was zu beweisen war.

Sind dagegen $\mathsf{T}_1 = \mathsf{T}_2 \neq \mathsf{T}_3$, so folgt, wenn wir die Bezeichnungen unverändert lassen:

$$C = C_3 = \mathsf{T}_3 \quad \text{und} \quad A = B = \mathsf{T}_1 = \mathsf{T}_2 ;$$

und die Fläche (65) wird dann eine Rotationsfläche:

$$\mathsf{T}_1(x^2 + y^2) + \mathsf{T}_3 z^2 = \pm 1 .$$

Es sind dann zwei Halbachsen einander gleich ($a = b$), und man hat also:

$$\mathsf{T}_1 = \mathsf{T}_2 = \frac{1}{a^2} = \frac{1}{b^2}, \qquad \mathsf{T}_3 = \frac{1}{c^2}.$$

Die durch A, B, C, A', B', C' bestimmte Rotationsfläche bestimmt durch die Größe der Halbachsen zwar die Tensoren des Tripels der Größe nach noch vollständig, aber die Richtung nur eines Tensors, T_3, während die Richtung der beiden anderen in der zu T_3 senkrechten Ebene unbestimmt bleibt. Diese Unbestimmtheit liegt in der Natur der Sache, da in dieser letzteren Ebene alle Richtungen gleichberechtigt sind, wie sich sofort aus der Bedeutung der Fläche als Rotationsfläche ergibt.

Sind endlich alle drei Tensoren einander gleich, so ist zwar die Größe derselben bestimmt, nicht aber die Richtung derselben. Die Fläche wird dann um ihr Zentrum symmetrisch, also eine Kugelfläche, und alle durch das Zentrum gehenden Geraden sind gleichberechtigt.

Die sechs Größen A, B, C, A', B', C' nennt man, weil durch sie im allgemeinen das Tensortripel völlig bestimmt ist, der Kürze halber einfach die Komponenten erster und zweiter Art des Tensortripels.

Sind die Tensoren T_1, T_2, T_3 alle positiv oder alle negativ, so ist die Fläche (65) ein Ellipsoid; ist dies nicht der Fall, so bestimmt

Gleichung (65) zwei zueinander konjugierte Hyperboloide. Man spricht jedoch der Einfachheit halber gewöhnlich von Fläche (65) als dem „Tensorellipsoid", während man besser „Tensorfläche" sagen sollte.

Die Beziehungen dieser Untersuchung zu den Trägheitsmomenten liegen auf der Hand. Das Trägheitsmoment um eine beliebige durch einen gegebenen Punkt gehende Achse in der Richtung s ist nach (26) ebenso durch sechs Größen T_x, T_y, T_z, U_x, U_y, U_z bestimmt, wie nach (64) der Tensor S in der Richtung s durch die sechs Größen A, B, C, A', B', C'. Das Trägheitsmoment um eine beliebig gerichtete Achse s ist daher ein — stets positiver — Tensor. Das Trägheitsellipsoid ist ein spezieller Fall der Tensorfläche, die Trägheitsmomente um die Koordinatenachsen sind die Komponenten erster Art, die Deviationsmomente die Komponenten zweiter Art eines Tensortripels, dessen drei Tensoren T_1, T_2, T_3 mit den Hauptträgheitsmomenten identisch sind.

Man kann noch in einer anderen Weise, als dies hier geschehen ist, die Tensoren einführen; diese zweite Art wollen wir hier erwähnen, weil sie in der Elastizitätstheorie die von selbst gegebene ist. Wir können nämlich die Gleichung der Tensorfläche (65) in folgender Weise schreiben:

$$\begin{aligned} \pm 1 = &(Ax + C'y + B'z)\, x \\ &+ (C'x + By + A'z)\, y \\ &+ (B'x + A'y + Cz)\, z\,. \end{aligned}$$

Darin können wir x, y, z, die Koordinaten eines Punktes der Tensorfläche, als die Komponenten $\mathfrak{r}_x$, $\mathfrak{r}_y$, $\mathfrak{r}_z$ des Radiusvektors $\mathfrak{r}$ nach diesem Punkte bezeichnen; diese sind mit linearen Ausdrücken multipliziert, die gleichfalls als Komponenten eines Vektors $\mathfrak{R}$ betrachtet werden können, so daß

$$(67)\qquad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{R}_x &= A\,\mathfrak{r}_x + C'\mathfrak{r}_y + B'\mathfrak{r}_z\,, \\ \mathfrak{R}_y &= C'\mathfrak{r}_x + B\,\mathfrak{r}_y + A'\mathfrak{r}_z\,, \\ \mathfrak{R}_z &= B'\mathfrak{r}_x + A'\mathfrak{r}_y + C\,\mathfrak{r}_z\,. \end{aligned} \right.$$

Denn da die linke Seite der Flächengleichung ein Skalar ist, so stellt in dieser Auffassung die rechte Seite den Ausdruck

$$\mathfrak{R}_x \cdot \mathfrak{r}_x + \mathfrak{R}_y \cdot \mathfrak{r}_y + \mathfrak{R}_z \cdot \mathfrak{r}_z$$

vor, und das ist das skalare Produkt der Vektoren $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{r}$, also ebenfalls ein Skalar, wie es sein muß; die Auffassung, die durch Gleichung (67) ausgedrückt wird, ist also zulässig. In diesen Gleichungen sind Vektorkomponenten als lineare Funktionen der Komponenten eines anderen Vektors ausgedrückt; man nennt deshalb $\mathfrak{R}$ eine „lineare Vektorfunktion von $\mathfrak{r}$". Speziell in unserem Falle ist die lineare Vektorfunktion homogen und symmetrisch, da ein absolutes Glied fehlt, und die symmetrisch zur Diagonale liegenden Glieder gleiche Koeffizienten haben. Die lineare

homogene symmetrische Vektorfunktion hat sechs unabhängige Koeffizienten, während eine beliebige lineare homogene Vektorfunktion deren offenbar neun hat. Die sechs Koeffizienten der Vektorfunktion (67) sind nun die Komponenten unseres Tensortripels. Umgekehrt lassen sich stets die sechs unabhängigen Koeffizienten einer linearen homogenen symmetrischen Vektorfunktion als Komponenten eines Tensortripels auffassen; denn von der linearen Vektorfunktion (67) gelangt man rückwärts zur Fläche (65), und diese bestimmt ja, wie wir gesehen haben, ein Tensortripel der Größe und Richtung nach im allgemeinen vollständig.

Dieser Gesichtspunkt wird in der Elastizitätstheorie im dritten Buche der vorherrschende sein.

76. Die Eulerschen Gleichungen für einen in einem Punkte festgehaltenen Körper.

Bevor wir daran gehen, die Bewegung eines ganz freien starren Körpers zu untersuchen, wollen wir zunächst die Bewegungsgleichungen für einen in einem Punkte festgehaltenen in geeigneter Form aufstellen. In diesen Punkt S legen wir den Anfangspunkt sowohl des (x, y, z)-Systems als auch des (ξ, η, ζ)-Systems (Fig. 105). Mit Bezug auf das ruhende (x, y, z)-System haben wir nun die Momentengleichungen (7). Die Lage des beweglichen Systems (ξ, η, ζ) wird entweder durch die neun Richtungskosinusse $\alpha_1 \ldots \gamma_3$ gegen (x, y, z) unter Beachtung der zwischen ihnen bestehenden sechs Relationen, oder durch die Eulerschen Winkel ϑ, φ, ψ bestimmt. Wir werden später das (ξ, η, ζ)-System mit den Hauptträgheitsachsen durch den festen Punkt zusammenfallen lassen; vorläufig aber wollen wir uns darin volle Freiheit bewahren.

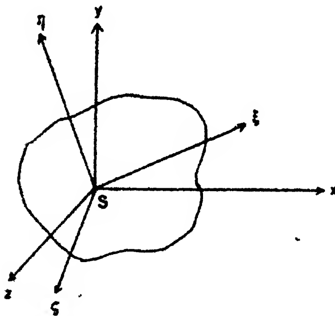


Fig. 105.

Nun wollen wir die Gleichungen (7) auf das bewegte System (ξ, η, ζ) beziehen, indem wir alle Größen x_ν, y_ν, z_ν, X_ν, Y_ν, Z_ν darauf transformieren. Zwischen den Kraftkomponenten X_ν, Y_ν, Z_ν und Ξ_ν, H_ν, Z_ν bestehen die nämlichen Transformationsgleichungen, wie zwischen (x, y, z) und (ξ, η, ζ), nämlich die Gleichungen (29) des VI. Kapitels auf pag. 328, in denen, da die Nullpunkte zusammenfallen, $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ gesetzt werden müssen. Dies folgt sofort aus dem Umstande, daß die Kräfte vom Koordinatensystem unabhängige Vektoren sind. Wir erhalten also zunächst aus der Gleichung (29) des VI. Kapitels für beliebige Kräfte (x, y, z):

$$X = \Xi\alpha_1 + \mathsf{H}\alpha_2 + \mathsf{Z}\alpha_3,$$
$$Y = \Xi\beta_1 + \mathsf{H}\beta_2 + \mathsf{Z}\beta_3,$$
$$Z = \Xi\gamma_1 + \mathsf{H}\gamma_2 + \mathsf{Z}\gamma_3;$$

also folgt z. B. für das Moment der Kraft $\mathfrak{K}$ um die x-Achse:

$$Zy - Yz = (\Xi\gamma_1 + \mathsf{H}\gamma_2 + \mathsf{Z}\gamma_3)(\xi\beta_1 + \eta\beta_2 + \zeta\beta_3) - (\Xi\beta_1 + \mathsf{H}\beta_2 + \mathsf{Z}\beta_3)(\xi\gamma_1 + \eta\gamma_2 + \zeta\gamma_3).$$

Bevor wir an die Ausrechnung gehen, wollen wir eine kürzere Bezeichnung einführen. Wir nennen das resultierende Drehmoment der Kräfte $\mathfrak{M}$ und seine Komponenten nach den (x, y, z)-Achsen resp. $\mathfrak{M}_x$, $\mathfrak{M}_y$, $\mathfrak{M}_z$, seine Komponenten nach den beweglichen Achsen entsprechend $\mathfrak{M}_\xi$, $\mathfrak{M}_\eta$, $\mathfrak{M}_\zeta$. Also ist z. B. für das Moment einer Kraft:

$$\mathfrak{M}_x = Zy - Yz; \quad \mathfrak{M}_\xi = \mathsf{Z}\eta - \mathsf{H}\zeta \quad \text{usw.}$$

Man erhält leicht:

$$\mathfrak{M}_x = (\Xi\eta - \mathsf{H}\xi)(\gamma_1\beta_2 - \gamma_2\beta_1) + (\mathsf{H}\zeta - \mathsf{Z}\eta)(\gamma_2\beta_3 - \gamma_3\beta_2) + (\mathsf{Z}\xi - \Xi\zeta)(\gamma_3\beta_1 - \gamma_1\beta_3),$$

oder, unter Benutzung unserer neuen Bezeichnung und unter Rücksicht auf die Gleichungen (37) des vorigen Kapitels (pag. 325):

$$\mathfrak{M}_x = \mathfrak{M}_\xi \cdot \alpha_1 + \mathfrak{M}_\eta \cdot \alpha_2 + \mathfrak{M}_\zeta \cdot \alpha_3,$$

und so fort für die übrigen Momentkomponenten. Insgesamt erhalten wir also das Resultat:

$$(68)\qquad \begin{cases} \mathfrak{M}_x = \mathfrak{M}_\xi \cdot \alpha_1 + \mathfrak{M}_\eta \cdot \alpha_2 + \mathfrak{M}_\zeta \cdot \alpha_3, \\ \mathfrak{M}_y = \mathfrak{M}_\xi \cdot \beta_1 + \mathfrak{M}_\eta \cdot \beta_2 + \mathfrak{M}_\zeta \cdot \beta_3, \\ \mathfrak{M}_z = \mathfrak{M}_\xi \cdot \gamma_1 + \mathfrak{M}_\eta \cdot \gamma_2 + \mathfrak{M}_\zeta \cdot \gamma_3, \end{cases}$$

oder nach $\mathfrak{M}_\xi$, $\mathfrak{M}_\eta$, $\mathfrak{M}_\zeta$ aufgelöst:

$$(68\text{a})\qquad \begin{cases} \mathfrak{M}_\xi = \mathfrak{M}_x \cdot \alpha_1 + \mathfrak{M}_y \cdot \beta_1 + \mathfrak{M}_z \cdot \gamma_1, \\ \mathfrak{M}_\eta = \mathfrak{M}_x \cdot \alpha_2 + \mathfrak{M}_y \cdot \beta_2 + \mathfrak{M}_z \cdot \gamma_2, \\ \mathfrak{M}_\zeta = \mathfrak{M}_x \cdot \alpha_3 + \mathfrak{M}_y \cdot \beta_3 + \mathfrak{M}_z \cdot \gamma_3, \end{cases}$$

d. h. auch die Kraftmomente transformieren sich wie die Kräfte und Koordinaten. Nicht dasselbe gilt von den auf der rechten Seite auftretenden Geschwindigkeiten, die bekanntlich von der Bewegung des Koordinatensystems sehr wesentlich abhängig sind. Hier müssen wir unter Zuziehung der Formel (29) des VI. Kapitels (pag. 323) einfach ausrechnen. Wir erhalten so für den auf der rechten Seite von (7) stehenden Ausdruck — wir behandeln wieder nur die erste Gleichung —:

$$\frac{dz}{dt}y - \frac{dy}{dt}z = \left(\xi\frac{d\gamma_1}{dt} + \eta\frac{d\gamma_2}{dt} + \zeta\frac{d\gamma_3}{dt}\right)\left(\xi\beta_1 + \eta\beta_2 + \zeta\beta_3\right) - \left(\xi\frac{d\beta_1}{dt} + \eta\frac{d\beta_2}{dt} + \zeta\frac{d\beta_3}{dt}\right)\left(\xi\gamma_1 + \eta\gamma_2 + \zeta\gamma_3\right).$$

Das liefert ausgerechnet:

$$(69)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dz}{dt}y - \frac{dy}{dt}z = {} & \xi^2\left(\beta_1\frac{d\gamma_1}{dt} - \gamma_1\frac{d\beta_1}{dt}\right) + \eta^2\left(\beta_2\frac{d\gamma_2}{dt} - \gamma_2\frac{d\beta_2}{dt}\right) \\ & + \zeta^2\left(\beta_3\frac{d\gamma_3}{dt} - \gamma_3\frac{d\beta_3}{dt}\right) \\ & + \xi\eta\left(\beta_2\frac{d\gamma_1}{dt} - \gamma_2\frac{d\beta_1}{dt} + \beta_1\frac{d\gamma_2}{dt} - \gamma_1\frac{d\beta_2}{dt}\right) \\ & + \eta\zeta\left(\beta_3\frac{d\gamma_2}{dt} - \gamma_3\frac{d\beta_2}{dt} + \beta_2\frac{d\gamma_3}{dt} - \gamma_2\frac{d\beta_3}{dt}\right) \\ & + \zeta\xi\left(\beta_1\frac{d\gamma_3}{dt} - \gamma_1\frac{d\beta_3}{dt} + \beta_3\frac{d\gamma_1}{dt} - \gamma_3\frac{d\beta_1}{dt}\right), \end{aligned}\right.$$

und zwei analoge Gleichungen folgen für die Ausdrücke $\frac{dx}{dt}z - \frac{dz}{dt}x$, $\frac{dy}{dt}x - \frac{dx}{dt}y$, die sich aus den obigen durch geeignete zyklische Vertauschung ergeben.

Nunmehr ziehen wir, um die Koeffizienten von ξ^2, η^2, ζ^2 bequemer ausdrücken zu können, die Gleichungen (52) des VI. Kapitels auf pag. 331 heran, welche die Rotationskomponenten in Bezug auf die ξ-, η-, ζ-Achsen, $\frac{d\pi}{dt}$, $\frac{d\chi}{dt}$, $\frac{d\varrho}{dt}$, durch die Kosinusse $\alpha_1 \ldots \gamma_3$ ausdrücken. Es ist nach diesen Gleichungen z. B.

$$\begin{aligned} \frac{d\chi}{dt} &= -\alpha_3\frac{d\alpha_1}{dt} - \beta_3\frac{d\beta_1}{dt} - \gamma_3\frac{d\gamma_1}{dt} \quad \Big|\ \alpha_2 \\ \frac{d\varrho}{dt} &= \alpha_2\frac{d\alpha_1}{dt} + \beta_2\frac{d\beta_1}{dt} + \gamma_2\frac{d\gamma_1}{dt} \quad \Big|\ \alpha_3 \end{aligned}$$

Erweitern wir diese, wie angedeutet, mit resp. α_2 und α_3 und addieren, so folgt:

$$\alpha_3\frac{d\varrho}{dt} + \alpha_2\frac{d\chi}{dt} = (\gamma_2\alpha_3 - \gamma_3\alpha_2)\frac{d\gamma_1}{dt} - (\beta_3\alpha_2 - \beta_2\alpha_3)\frac{d\beta_1}{dt},$$

und das wird nach den Gleichungen (37) des VI. Kapitels (pag. 325):

$$(70)\qquad \alpha_3\frac{d\varrho}{dt} + \alpha_2\frac{d\chi}{dt} = \beta_1\frac{d\gamma_1}{dt} - \gamma_1\frac{d\beta_1}{dt}.$$

Analog folgen die beiden anderen Gleichungen durch geeignete zyklische Vertauschung:

$$(71)\qquad \left\{\begin{aligned} \alpha_1\frac{d\pi}{dt} + \alpha_3\frac{d\varrho}{dt} &= \beta_2\frac{d\gamma_2}{dt} - \gamma_2\frac{d\beta_2}{dt}, \\ \alpha_2\frac{d\chi}{dt} + \alpha_1\frac{d\pi}{dt} &= \beta_3\frac{d\gamma_3}{dt} - \gamma_3\frac{d\beta_3}{dt}. \end{aligned}\right.$$

Bezeichnen wir die Faktoren von $\eta\zeta$, $\zeta\xi$, $\xi\eta$ in (69) vorläufig der Kürze halber durch die resp. Abkürzungen Δ_ξ', Δ_η', Δ_ζ', so können wir (69) schreiben:

$$\frac{dz}{dt}y - \frac{dy}{dt}z = \xi^2\left(\alpha_3\frac{d\varrho}{dt} + \alpha_2\frac{d\chi}{dt}\right) + \eta^2\left(\alpha_1\frac{d\pi}{dt} + \alpha_3\frac{d\varrho}{dt}\right)$$
$$+ \zeta^2\left(\alpha_2\frac{d\chi}{dt} + \alpha_1\frac{d\pi}{dt}\right) + \varDelta_\xi'\cdot\eta\zeta + \varDelta_\eta'\cdot\zeta\xi + \varDelta_\zeta'\cdot\xi\eta,$$

oder auch in anderer Zusammenfassung:

(72)
$$\frac{dz}{dt}y - \frac{dy}{dt}z = \alpha_1\frac{d\pi}{dt}(\eta^2+\zeta^2) + \alpha_2\frac{d\chi}{dt}(\zeta^2+\xi^2) + \alpha_3\frac{d\varrho}{dt}(\xi^2+\eta^2)$$
$$+ \varDelta_\xi'\cdot\eta\zeta + \varDelta_\eta'\cdot\zeta\xi + \varDelta_\zeta'\cdot\xi\eta.$$

Entsprechende Formeln ergeben sich für $\left(\frac{dx}{dt}z - \frac{dz}{dt}x\right)$ und $\left(\frac{dy}{dt}x - \frac{dx}{dt}y\right)$:

(73)
$$\left\{\begin{aligned}\frac{dx}{dt}z - \frac{dz}{dt}x &= \beta_1\frac{d\pi}{dt}(\eta^2+\zeta^2) + \beta_2\frac{d\chi}{dt}(\zeta^2+\xi^2) + \beta_3\frac{d\varrho}{dt}(\xi^2+\eta^2)\\ &\quad + \varDelta_\xi''\cdot\eta\zeta + \varDelta_\eta''\cdot\zeta\xi + \varDelta_\zeta''\cdot\xi\eta,\\ \frac{dy}{dt}x - \frac{dx}{dt}y &= \gamma_1\frac{d\pi}{dt}(\eta^2+\zeta^2) + \gamma_2\frac{d\chi}{dt}(\zeta^2+\xi^2) + \gamma_3\frac{d\varrho}{dt}(\xi^2+\eta^2)\\ &\quad + \varDelta_\xi'''\cdot\eta\zeta + \varDelta_\eta''\cdot\zeta\xi + \varDelta_\zeta''\cdot\xi\eta.\end{aligned}\right.$$

Versehen wir in (72) und (73) die Größen $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$ usw. mit dem Index ν, multiplizieren mit m_ν und summieren über die ganze Masse des starren Körpers, so stellen die zeitlichen Ableitungen der so erhaltenen Größen die Kraftmomente um die x, y, z-Achsen dar, die wir also durch $\mathfrak{M}_x$, $\mathfrak{M}_y$, $\mathfrak{M}_z$ zu bezeichnen haben; rechts treten die Ausdrücke

$$\sum m_\nu(\eta_\nu^2+\zeta_\nu^2),\quad \sum m_\nu(\zeta_\nu^2+\xi_\nu^2),\quad \sum m_\nu(\xi_\nu^2+\eta_\nu^2),\quad \sum m_\nu\eta_\nu\zeta_\nu,$$
$$\sum m_\nu\zeta_\nu\xi_\nu,\quad \sum m_\nu\xi_\nu\eta_\nu$$

auf, die nach den Erörterungen der Nummer (74) nichts anderes sind als resp.

$$\mathsf{T}_\xi,\quad \mathsf{T}_\eta,\quad \mathsf{T}_\zeta,\quad U_\xi,\quad U_\eta,\quad U_\zeta,$$

d. h. die Trägheitsmomente und die Deviationsmomente um die ξ-, η-, ζ-Achsen. Also folgt zunächst:

(74)
$$\left\{\begin{aligned}\mathfrak{M}_x &= \frac{d}{dt}\left[\alpha_1\frac{d\pi}{dt}\mathsf{T}_\xi + \alpha_2\frac{d\chi}{dt}\mathsf{T}_\eta + \alpha_3\frac{d\varrho}{dt}\mathsf{T}_\zeta + \varDelta_\xi'\cdot U_\xi + \varDelta_\eta'\cdot U_\eta + \varDelta_\zeta'\cdot U_\zeta\right],\\ \mathfrak{M}_y &= \frac{d}{dt}\left[\beta_1\frac{d\pi}{dt}\mathsf{T}_\xi + \beta_2\frac{d\chi}{dt}\mathsf{T}_\eta + \beta_3\frac{d\varrho}{dt}\mathsf{T}_\zeta + \varDelta_\xi''\cdot U_\xi + \varDelta_\eta''\cdot U_\eta + \varDelta_\zeta''\cdot U_\zeta\right],\\ \mathfrak{M}_z &= \frac{d}{dt}\left[\gamma_1\frac{d\pi}{dt}\mathsf{T}_\xi + \gamma_2\frac{d\chi}{dt}\mathsf{T}_\eta + \gamma_3\frac{d\varrho}{dt}\mathsf{T}_\zeta + \varDelta_\xi'''\cdot U_\xi + \varDelta_\eta'''\cdot U_\eta + \varDelta_\zeta'''\cdot U_\zeta\right].\end{aligned}\right.$$

Für späteren Gebrauch wollen wir hier noch die Größen $\varDelta_\xi', \ldots \varDelta_\zeta'''$ angeben. Man erkennt leicht, daß zunächst $\varDelta_\xi'$, $\varDelta_\eta'$, $\varDelta_\zeta'$ folgende einfache Bedeutung haben:

(75)
$$\left\{\begin{aligned}\varDelta_\xi' &= \beta_3\frac{d\gamma_2}{dt} - \gamma_3\frac{d\beta_2}{dt} + \beta_2\frac{d\gamma_3}{dt} - \gamma_2\frac{d\beta_3}{dt},\\ \varDelta_\eta' &= \beta_1\frac{d\gamma_3}{dt} - \gamma_1\frac{d\beta_3}{dt} + \beta_3\frac{d\gamma_1}{dt} - \gamma_3\frac{d\beta_1}{dt},\\ \varDelta_\zeta' &= \beta_2\frac{d\gamma_1}{dt} - \gamma_2\frac{d\beta_1}{dt} + \beta_1\frac{d\gamma_2}{dt} - \gamma_1\frac{d\beta_2}{dt}.\end{aligned}\right.$$

Daraus ergeben sich die entsprechenden zwei- und dreigestrichenen Größen, indem man bei konstantem Index die Buchstaben α, β, γ zyklisch vertauscht.

Die Gleichungen (74) sind recht unangenehm zu behandeln; sie gestatten aber eine weitgehende Vereinfachung, wenn man jetzt das (ξ, η, ζ)-System geeignet festlegt. Bisher war es ja nur insofern bestimmt, als der Koordinatenanfangspunkt desselben sich in dem festgehaltenen Punkt S des Körpers befinden sollte; jetzt aber wollen wir das $(\xi, \eta, \zeta$-)System mit den durch diesen Punkt gehenden Hauptträgheitsachsen zusammenfallen lassen. Dann verschwinden nämlich nach Gleichung (47) die Deviationsmomente, d. h. $U_\xi = U_\eta = U_\zeta = 0$, und T_ξ, T_η, T_ζ werden identisch mit den Hauptträgheitsmomenten, die wir, wie es üblich ist, durch A, B, C bezeichnen wollen. Dann wird aus (74), wenn wir gleichzeitig noch (68) $\mathfrak{M}_x$, $\mathfrak{M}_y$, $\mathfrak{M}_z$ durch $\mathfrak{M}_\xi$, $\mathfrak{M}_\eta$, $\mathfrak{M}_\zeta$ ausdrücken:

$$(76)\quad \begin{cases} \mathfrak{M}_\xi \cdot \alpha_1 + \mathfrak{M}_\eta \cdot \alpha_2 + \mathfrak{M}_\zeta \cdot \alpha_3 = \frac{d}{dt}\left[A\alpha_1 \frac{d\pi}{dt} + B\alpha_2 \frac{d\chi}{dt} + C\alpha_3 \frac{d\varrho}{dt}\right], \\ \mathfrak{M}_\xi \cdot \beta_1 + \mathfrak{M}_\eta \cdot \beta_2 + \mathfrak{M}_\zeta \cdot \beta_3 = \frac{d}{dt}\left[A\beta_1 \frac{d\pi}{dt} + B\beta_2 \frac{d\chi}{dt} + C\beta_3 \frac{d\varrho}{dt}\right], \\ \mathfrak{M}_\xi \cdot \gamma_1 + \mathfrak{M}_\eta \cdot \gamma_2 + \mathfrak{M}_\zeta \cdot \gamma_3 = \frac{d}{dt}\left[A\gamma_1 \frac{d\pi}{dt} + B\gamma_2 \frac{d\chi}{dt} + C\gamma_3 \frac{d\varrho}{dt}\right]. \end{cases}$$

Führt man rechts die Differentiationen aus, und erweitert diese Gleichungen der Reihe nach z. B. mit α_1, β_1, γ_1 und addiert sie, so folgt links $\mathfrak{M}_\xi$; daher ergibt sich, da rechts

$$\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = \alpha_1\alpha_3 + \beta_1\beta_3 + \gamma_1\gamma_3 = \alpha_1 \frac{d\alpha_1}{dt} + \beta_1 \frac{d\beta_1}{dt} + \gamma_1 \frac{d\gamma_1}{dt} = 0$$

sind:

$$\mathfrak{M}_\xi = A \frac{d^2\pi}{dt^2} + B \frac{d\chi}{dt}\left(\alpha_1 \frac{d\alpha_2}{dt} + \beta_1 \frac{d\beta_2}{dt} + \gamma_1 \frac{d\gamma_2}{dt}\right)$$
$$+ C \frac{d\varrho}{dt}\left(\alpha_1 \frac{d\alpha_3}{dt} + \beta_1 \frac{d\beta_3}{dt} + \gamma_1 \frac{d\gamma_3}{dt}\right),$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (52) des VI. Kapitels auf pag. 331:

$$\mathfrak{M}_\xi = A \frac{d^2\pi}{dt^2} - B \frac{d\chi}{dt} \frac{d\varrho}{dt} + C \frac{d\varrho}{dt} \frac{d\chi}{dt},$$

usw. für die zweite und dritte der Gleichungen (76). Man erhält also schließlich folgende Gleichungen, die man Leonhard Euler verdankt, die sogenannten „Eulerschen Gleichungen":

$$(77)\quad \begin{cases} A \frac{d^2\pi}{dt^2} + (C - B) \frac{d\chi}{dt} \frac{d\varrho}{dt} = \mathfrak{M}_\xi, \\ B \frac{d^2\chi}{dt^2} + (A - C) \frac{d\varrho}{dt} \frac{d\pi}{dt} = \mathfrak{M}_\eta, \\ C \frac{d^2\varrho}{dt^2} + (B - A) \frac{d\pi}{dt} \frac{d\chi}{dt} = \mathfrak{M}_\zeta. \end{cases}$$

Aus ihnen läßt sich in gewissen einfachen Fällen $\frac{d\pi}{dt}$, $\frac{d\chi}{dt}$, $\frac{d\varrho}{dt}$ bestimmen, und dann hat man aus den Formeln (61) des vorigen Kapitels, die wir hier nochmals anschreiben:

$$\begin{aligned}
\frac{d\pi}{dt} &= \sin\psi \sin\vartheta \frac{d\varphi}{dt} + \cos\psi \frac{d\vartheta}{dt},\\
\frac{d\chi}{dt} &= \cos\psi \sin\vartheta \frac{d\varphi}{dt} - \sin\psi \frac{d\vartheta}{dt},\\
\frac{d\varrho}{dt} &= \cos\vartheta \frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\psi}{dt}.
\end{aligned}$$

die drei Eulerschen Winkel φ, ψ, ϑ als Funktionen der Zeit zu berechnen. Dann ist die Lage des (ξ, η, ζ)-Systems gegen das im Punkte S befindliche, an der Rotation nicht teilnehmende (x, y, z)-System zu jeder Zeit bestimmt, und damit ist alles erledigt.

Die Eulerschen Gleichungen (77) gestatten Glied für Glied eine anschauliche Deutung; es genügt, die erste von ihnen zu betrachten. $A\frac{d^2\pi}{dt^2}$, das Produkt aus einem Trägheitsmoment und einer Winkelbeschleunigung, ist das Analogon zur d'Alembertschen Trägheitskraft, und $\mathfrak{M}_\xi$ ist ein Rotationsmoment äußerer Kräfte. Nach den Bemerkungen am Schlusse der Nr. 73 würden diese beiden Glieder die einzigen sein, die auftreten könnten, wenn die Rotationsachse gleichzeitig im Raume und im Körper festläge. Die Eulerschen Gleichungen beziehen sich nun aber auf ein nur im Körper festes Koordinatensystem (ξ, η, ζ), und die erste der Eulerschen Gleichungen stellt eine Rotation um die im Raume variable ξ-Achse dar. Man sieht also von vornherein, daß das Glied $(C-B)\frac{d\chi}{dt}\frac{d\varrho}{dt}$ sein Auftreten der Rotation des benutzten (ξ, η, ζ)-Systems verdankt. Nun haben wir bereits früher gesehen, daß bei Zugrundelegung eines rotierenden Bezugssystems scheinbare Kräfte auftreten: die mit der Zentrifugalkraft identische Führungskraft und die Coriolissche Kraft. Die letztere entsteht nur, wenn der betrachtete Massenpunkt eine Bewegung relativ zum rotierenden System hat, was hier nicht der Fall ist, da (ξ, η, ζ) mit dem starren Körper verankert sind. Es können also — so vermuten wir — die Glieder $(C-B)\frac{d\chi}{dt}\frac{d\varrho}{dt}$ und die entsprechenden in den übrigen Eulerschen Gleichungen nur Rotationsmomente der Zentrifugalkraft sein. Diese Behauptung wollen wir im folgenden verifizieren. Es sei in Fig. 106 OC die Richtung der augenblicklichen Rotationsachse, die also, wenn wir den Betrag der resultierenden Rotation

$$\sqrt{\left(\frac{d\pi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\chi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\varrho}{dt}\right)^2}$$

durch ω abkürzen, die Richtungskosinusse

$$\frac{\frac{d\pi}{dt}}{\omega}, \quad \frac{\frac{d\chi}{dt}}{\omega}, \quad \frac{\frac{d\varrho}{dt}}{\omega}$$

besitzt. $(\xi_\nu, \eta_\nu, \zeta_\nu)$ seien die Koordinaten eines beliebigen Massenpunktes m_ν; den Raumpunkt $(\xi_\nu, \eta_\nu, \zeta_\nu)$ bezeichnen wir durch P_ν. Das

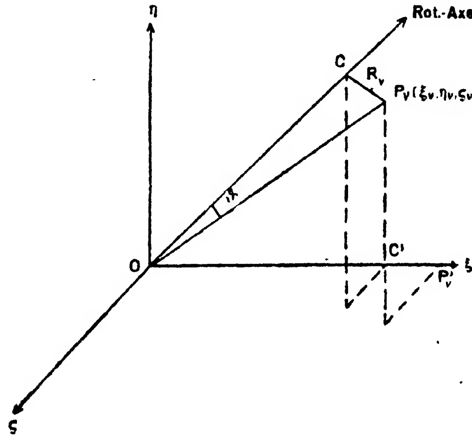


Fig. 106.

von ihm auf die Rotationsachse gefällte Lot treffe diese in C und habe die Länge R_ν. Die auf den Massenpunkt m_ν wirkende Zentrifugalkraft $\mathfrak{C}_\nu$ hat dann den Betrag (nach Kapitel II, Nr. 26, Gl. (23) auf pag. 86):

$$|\mathfrak{C}_\nu| = m_\nu R_\nu \omega^2,$$

und, wenn α, β, γ die Winkel sind, die die von C nach P_ν gerechnete Richtung von R_ν mit den (ξ, η, ζ)-Achsen bildet, so sind die Komponenten der Zentrifugalkraft auf das Teilchen m_ν:

$$\mathfrak{C}_{\nu\xi} = \omega^2 \cdot m_\nu R_\nu \cos\alpha,$$
$$\mathfrak{C}_{\nu\eta} = \omega^2 \cdot m_\nu R_\nu \cos\beta,$$
$$\mathfrak{C}_{\nu\zeta} = \omega^2 \cdot m_\nu R_\nu \cos\gamma.$$

Also, wenn wir über den ganzen Körper summieren, folgt für die Komponenten der gesamten Zentrifugalkraft:

$$\mathfrak{C}_\xi = \omega^2 \cdot \sum_\nu m_\nu R_\nu \cos\alpha,$$
$$\mathfrak{C}_\eta = \omega^2 \cdot \sum_\nu m_\nu R_\nu \cos\beta,$$
$$\mathfrak{C}_\zeta = \omega^2 \cdot \sum_\nu m_\nu R_\nu \cos\gamma,$$

und für die Komponenten des Drehmomentes $|\mathfrak{M}|$ derselben:

$$\{\mathfrak{M}_\xi\} = \sum_\nu (\mathfrak{C}_{\nu\zeta} \cdot \eta_\nu - \mathfrak{C}_{\nu\eta} \cdot \zeta_\nu)$$

$$= \omega^2 \sum_\nu \{m_\nu \eta_\nu R_\nu \cos\gamma - m_\nu \zeta_\nu R_\nu \cos\beta\},$$

$$\{\mathfrak{M}_\eta\} = \omega^2 \sum_\nu \{m_\nu \zeta_\nu R_\nu \cos\alpha - m_\nu \xi_\nu R_\nu \cos\gamma\},$$

$$\{\mathfrak{M}_\zeta\} = \omega^2 \sum_\nu \{m_\nu \xi_\nu R_\nu \cos\beta - m_\nu \eta_\nu R_\nu \cos\alpha\}.$$

Wir müssen nun $R_\nu \cos\alpha$, $R_\nu \cos\beta$, $R_\nu \cos\gamma$, d. h. die Projektionen von R_ν auf die drei Achsen ausdrücken. Da R_ν gemäß der Fig. 106 die geometrische Differenz von $\overrightarrow{OP_\nu}$ und $\overrightarrow{OC}$ darstellt, so sind die Projektionen von R_ν einfach gleich der gewöhnlichen Differenz der entsprechenden Projektionen von $\overrightarrow{OP_\nu}$ und $\overrightarrow{OC}$; die Projektionen der ersteren Strecke sind offenbar ξ_ν, η_ν, ζ_ν. $\overline{OC}$ müssen wir ausrechnen, und zu diesem Zwecke bilden wir den Kosinus des Winkels ϑ zwischen der Rotationsachse $\overrightarrow{OC}$ und dem Lagevektor $\overrightarrow{OP_\nu}$; da die Richtungskosinusse der ersteren, wie schon oben angegeben, resp.

$$\frac{\frac{d\pi}{dt}}{\omega}, \quad \frac{\frac{d\chi}{dt}}{\omega}, \quad \frac{\frac{d\varrho}{dt}}{\omega},$$

die des letzteren offenbar

$$\frac{\xi_\nu,\ \eta_\nu,\ \zeta_\nu}{\sqrt{\xi_\nu^2 + \eta_\nu^2 + \zeta_\nu^2}}$$

sind, so ist

$$\cos\vartheta = \frac{\frac{d\pi}{dt}\xi_\nu + \frac{d\chi}{dt}\eta_\nu + \frac{d\varrho}{dt}\zeta_\nu}{\omega \cdot \sqrt{\xi_\nu^2 + \eta_\nu^2 + \zeta_\nu^2}},$$

und für die Strecke $\overline{OC}$ erhalten wir aus dem Dreieck OCP_ν:

$$\overline{OC} = \frac{\frac{d\pi}{dt}\xi_\nu + \frac{d\chi}{dt}\eta_\nu + \frac{d\varrho}{dt}\zeta_\nu}{\omega}.$$

Die Projektion $\overline{OC'}$ von $\overline{OC}$ auf die ξ-Achse ist also

$$\overline{OC'} = \frac{d\pi}{dt} \cdot \frac{\frac{d\pi}{dt}\xi_\nu + \frac{d\chi}{dt}\eta_\nu + \frac{d\varrho}{dt}\zeta_\nu}{\omega^2};$$

also ist endlich der zu bildende Ausdruck $R_\nu \cos\alpha$:

$$R_\nu \cos\alpha = \xi_\nu - \frac{d\pi}{dt} \cdot \frac{\frac{d\pi}{dt}\xi_\nu + \frac{d\chi}{dt}\eta_\nu + \frac{d\varrho}{dt}\zeta_\nu}{\omega^2},$$

ebenso:

$$R_\nu \cos\beta = \eta_\nu - \frac{d\chi}{dt} \cdot \frac{\frac{d\pi}{dt}\xi_\nu + \frac{d\chi}{dt}\eta_\nu + \frac{d\varrho}{dt}\zeta_\nu}{\omega^2},$$

$$R_\nu \cos\gamma = \zeta_\nu - \frac{d\varrho}{dt} \cdot \frac{\frac{d\pi}{dt}\xi_\nu + \frac{d\chi}{dt}\eta_\nu + \frac{d\varrho}{dt}\zeta_\nu}{\omega^2}.$$

und mit diesen Werten werden die Momente der Zentrifugalkräfte:

$$\{\mathfrak{M}_\xi\} = \omega^2 \sum_\nu m_\nu \eta_\nu \left\{\zeta_\nu - \frac{d\varrho}{dt} \cdot \frac{\frac{d\pi}{dt}\xi_\nu + \frac{d\chi}{dt}\eta_\nu + \frac{d\varrho}{dt}\zeta_\nu}{\omega^2}\right\}$$

$$- \omega^2 \sum_\nu m_\nu \zeta_\nu \left\{\eta_\nu - \frac{d\chi}{dt} \cdot \frac{\frac{d\pi}{dt}\xi_\nu + \frac{d\chi}{dt}\eta_\nu + \frac{d\varrho}{dt}\zeta_\nu}{\omega^2}\right\},$$

und zwei analoge Gleichungen für $\{\mathfrak{M}_\eta\}$ und $\{\mathfrak{M}_\zeta\}$.

Den Ausdruck für $\{\mathfrak{M}_\xi\}$ wollen wir ausrechnen, und dabei gleich die Ausdrücke (22) für die Deviationsmomente einführen; dann folgt:

$$\{\mathfrak{M}_\xi\} = U_\eta \cdot \frac{d\pi}{dt}\,\frac{d\chi}{dt} + U_\xi \left(\frac{d\chi}{dt}\right)^2 + \sum_\nu m_\nu \zeta_\nu^2 \cdot \frac{d\chi}{dt}\,\frac{d\varrho}{dt}$$

$$- U_\zeta \frac{d\pi}{dt}\,\frac{d\varrho}{dt} - \sum_\nu m_\nu \eta_\nu^2 \frac{d\chi}{dt}\,\frac{d\varrho}{dt} - U_\xi \left(\frac{d\varrho}{dt}\right)^2.$$

Da aber die ξ, η, ζ-Achsen mit den Hauptträgheitsachsen durch den festen Punkt zusammenfallen, sind alle Deviationsmomente gleich Null; also ist einfacher:

$$\{\mathfrak{M}_\xi\} = \left(\sum_\nu m_\nu \zeta_\nu^2 - \sum_\nu m_\nu \eta_\nu^2\right) \cdot \frac{d\chi}{dt}\,\frac{d\varrho}{dt}.$$

Die Ausdrücke $\sum_\nu m_\nu \zeta_\nu^2$ und $\sum_\nu m_\nu \eta_\nu^2$ sind die sogenannten Binetschen Trägheitsmomente, die wir in Nr. 74 (Gleichung 17) durch resp. Θ_ζ und Θ_η bezeichnet haben; sie hängen nach derselben Gleichung mit den Trägheitsmomenten T_η und T_ζ folgendermaßen zusammen:

$$T_\eta = K - \Theta_\eta,$$
$$T_\zeta = K - \Theta_\zeta,$$

also ist $\Theta_\zeta - \Theta_\eta = T_\eta - T_\zeta$, oder gleich $(B - C)$, da T_η und T_ζ hier mit den Hauptträgheitsmomenten identisch sind. Also wird $\{\mathfrak{M}_\xi\}$ (und Analoges gilt für $\{\mathfrak{M}_\eta\}$ und $\{\mathfrak{M}_\zeta\}$):

$$\{\mathfrak{M}_\xi\} = (B - C)\frac{d\chi}{dt} \cdot \frac{d\varrho}{dt}.$$

Es können also die Eulerschen Gleichungen (77) geschrieben werden:

$$\text{(77a)} \quad \begin{cases} A\,\dfrac{d^2\pi}{dt^2} = \mathfrak{M}_\xi + \{\mathfrak{M}_\xi\}, \\ B\,\dfrac{d^2\chi}{dt^2} = \mathfrak{M}_\eta + \{\mathfrak{M}_\eta\}, \\ C\,\dfrac{d^2\varrho}{dt^2} = \mathfrak{M}_\zeta + \{\mathfrak{M}_\zeta\}, \end{cases}$$

womit die fraglichen Glieder tatsächlich ihre Deutung als Rotationsmomente der Führungs-(Zentrifugal-)Kräfte gefunden haben. Das System

(77a) hat genau dieselbe Form, wie wenn das (ξ, η, ζ)-System im Raume ruhte; nur sind die Führungskräfte mit unter die äußeren Kräfte aufgenommen, was der allgemeinen Theorie der Nr. 26 auch vollkommen entspricht.

Man kann endlich die Eulerschen Gleichungen in sehr einfacher Form mit Hilfe der Vektorsymbolik schreiben. Denn berücksichtigt man, daß der Drehimpuls $\mathfrak{U}$ die Komponenten $A\frac{d\pi}{dt}$, $B\frac{d\chi}{dt}$, $C\frac{d\varrho}{dt}$, die Rotationsgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ die Komponenten $\frac{d\pi}{dt}$, $\frac{d\chi}{dt}$, $\frac{d\varrho}{dt}$ hat (alles auf das bewegte (ξ, η, ζ)-System bezogen), so sieht man leicht, daß die Rotationsmomente der Zentrifugalkräfte als die Komponenten des Vektorproduktes $[\mathfrak{u}\,\mathfrak{U}]$ aufgefaßt werden können, so daß man die Eulerschen Gleichungen in der folgenden Vektorgleichung zusammenfassen kann:

(77b) $$\frac{d'\mathfrak{U}}{dt} + [\mathfrak{u}\,\mathfrak{U}] = \mathfrak{M}.$$

Dabei ist $\frac{d'\mathfrak{U}}{dt}$ geschrieben, um die vom bewegten System aus beurteilte Änderungsgeschwindigkeit $\frac{d'\mathfrak{U}}{dt}$ des Drehimpulses $\mathfrak{U}$ von der Änderung $\frac{d\mathfrak{U}}{dt}$, die vom ruhenden System aus beurteilt ist, zu unterscheiden. Wir haben damit gleichzeitig einen allgemeinen Zusammenhang zwischen der von einem ruhenden und von einem bewegten System aus gemessenen Änderungsgeschwindigkeit eines beliebigen Vektors $\mathfrak{A}$ gewonnen:

(78) $$\frac{d\mathfrak{A}}{dt} = \frac{d'\mathfrak{A}}{dt} + [\mathfrak{u}\,\mathfrak{A}].$$

Denn bei der Transformation des II. Impulssatzes (etwas anderes sind ja die Eulerschen Gleichungen nicht) auf das bewegte System haben wir von $\mathfrak{U}$ nur allgemeine Vektoreigenschaften benutzt.

77. Reduktion der allgemeinsten Bewegung des starren Körpers auf zwei einfachere Bewegungen.

Wir haben jetzt die allgemeinste Bewegung eines starren Körpers zu untersuchen; diese läßt sich jedoch auf zwei uns bereits bekannte Bewegungstypen zurückführen, nämlich auf die Bewegung eines materiellen Punktes und auf die in der vorigen Nummer behandelte Bewegung eines starren Körpers um einen festgehaltenen Punkt.

Aus den Bewegungsgleichungen (6) und (7) des starren Körpers läßt sich nämlich folgender Schluß ziehen: Zunächst lehren die Gleichungen (6), daß der Schwerpunkt sich so bewegt, wie ein einzelner Massenpunkt, auf den die Gesamtkraft $\sum \mathfrak{K}$ wirkt, und der die Ge-

samtmasse $\sum_\nu m_\nu = M$ des starren Körpers besitzt. Der Schwerpunkt bewegt sich also wie ein isolierter Massenpunkt.

Die Momentengleichungen (7) beziehen sich auf ein im Raume festes Koordinatensystem (x, y, z). Wir wollen nun aber zeigen, daß sie auch für ein Koordinatensystem (x', y', z') gelten, dessen Anfangspunkt im Schwerpunkt S des Körpers verankert ist, und dessen Achsen den x, y, z-Achsen dauernd parallel sind. (x', y', z') führt also im allgemeinen eine beschleunigte Translationsbewegung gegen das Fundamentalsystem (oder das (x, y, z)-System) aus (Fig. 107). Machen wir uns zunächst klar, was es bedeutet, wenn die

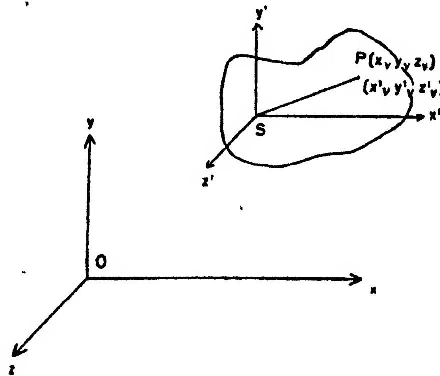


Fig. 107.

Gleichungen (7) auch für ein im Schwerpunkt befestigtes, (x, y, z) dauernd paralleles System (x', y', z') gelten. Das heißt doch offenbar nichts anderes, als daß die Translationsbewegung des Schwerpunktes sich in den Gleichungen (7) nicht bemerkbar macht, daß also der Schwerpunkt hinsichtlich der Momentengleichungen (7) als ruhend betrachtet werden kann. Die allgemeinste Bewegung des starren Körpers ist damit reduziert auf zwei wesentlich einfachere: eine Translationsbewegung des sich wie ein Massenpunkt verhaltenden Schwerpunktes, und eine Rotation des starren Körpers um den festgehaltenen Schwerpunkt.

Wir gehen jetzt zum Beweise dieses fundamentalen Satzes über. Es seien die Koordinaten des Schwerpunktes S im (x, y, z)-System, wie stets, durch $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ bezeichnet; dann sind die Koordinaten (x'_ν, y'_ν, z'_ν) eines beliebigen Punktes P im neuen System mit seinen Koordinaten (x_ν, y_ν, z_ν) im alten System durch die Gleichungen verbunden:

$$(79)\qquad \left\{\begin{aligned} x_\nu &= \mathfrak{x} + x'_\nu, \\ y_\nu &= \mathfrak{y} + y'_\nu, \\ z_\nu &= \mathfrak{z} + z'_\nu. \end{aligned}\right.$$

Damit wird die erste Gleichung (7), für die wir die Rechnung allein durchführen:

$$\sum\left\{Z_\nu(\mathfrak{y} + y_\nu') - Y_\nu(\mathfrak{z} + z_\nu')\right\} = \frac{d}{dt}\sum m_\nu\left\{\left(\frac{d\mathfrak{z}}{dt} + \frac{dz_\nu'}{dt}\right)(\mathfrak{y} + y_\nu') - \left(\frac{d\mathfrak{y}}{dt} + \frac{dy_\nu'}{dt}\right)(\mathfrak{z} + z_\nu')\right\},$$

oder anders geordnet:

$$\sum\left\{Z_\nu y_\nu' - Y_\nu z_\nu'\right\} + \mathfrak{y}\sum Z_\nu - \mathfrak{z}\sum Y_\nu = \frac{d}{dt}\sum m_\nu\left(\frac{dz_\nu'}{dt}y_\nu' - \frac{dy_\nu'}{dt}z_\nu'\right)$$
$$+ \sum m_\nu \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathfrak{z}}{dt}\mathfrak{y} - \mathfrak{z}\frac{d\mathfrak{y}}{dt}\right) + \frac{d}{dt}\left(\mathfrak{y}\sum m_\nu\frac{dz_\nu'}{dt} - \mathfrak{z}\sum m_\nu\frac{dy_\nu'}{dt}\right)$$
$$+ \frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathfrak{z}}{dt}\sum m_\nu y_\nu' - \frac{d\mathfrak{y}}{dt}\sum m_\nu z_\nu'\right).$$

Nun sind aber, da die Koordinaten $(\mathfrak{x}', \mathfrak{y}', \mathfrak{z}')$ des Schwerpunktes im neuen System stets gleich Null sind:

$$M\mathfrak{x}' = \sum m_\nu x_\nu' = M\mathfrak{y}' = \sum m_\nu y_\nu' = M\mathfrak{z}' = \sum m_\nu z_\nu' = 0$$

und ebenso:

$$\sum m_\nu\frac{dx_\nu'}{dt} = \sum m_\nu\frac{dy_\nu'}{dt} = \sum m_\nu\frac{dz_\nu'}{dt} = 0,$$

so daß schließlich folgt, wenn rechts die Differentiation im zweiten Gliede ausgeführt wird:

$$\sum\left(Z_\nu y_\nu' - Y_\nu z_\nu'\right) + \left(\mathfrak{y}\sum Z_\nu - \mathfrak{z}\sum Y_\nu\right) = \frac{d}{dt}\sum m_\nu\left(\frac{dz_\nu'}{dt}y_\nu' - \frac{dy_\nu'}{dt}z_\nu'\right)$$
$$+ \sum m_\nu\left(\frac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2}\mathfrak{y} - \frac{d^2\mathfrak{y}}{dt^2}\mathfrak{z}\right).$$

Zieht man jetzt die Gleichungen (6) heran, so heben sich die auf beiden Seiten stehenden zweiten Glieder infolge des Schwerpunktsatzes heraus, und es folgt:

$$\sum\left(Z_\nu y_\nu' - Y_\nu z_\nu'\right) = \frac{d}{dt}\sum m_\nu\left(\frac{dz_\nu'}{dt}y_\nu' - \frac{dy_\nu'}{dt}z_\nu'\right),$$

die in der Tat mit der ersten Gleichung (7) völlig übereinstimmt.

Damit ist der behauptete Satz bewiesen, und wir haben nur noch die Rotation eines starren Körpers um seinen als festliegend gedachten Schwerpunkt zu untersuchen. Das ist aber bereits in der vorhergehenden Nummer geschehen, und wir haben also — wenn wir das System (x', y', z') der Einfachheit halber durch (x, y, z) bezeichnen, da wir den Schwerpunkt S als festliegend betrachten können — durch den vorhergehenden Satz die Gültigkeit der Gleichungen (74) und (76), sowie der Eulerschen Gleichungen (77) für ein im Schwerpunkt S liegendes Koordinatensystem (ξ, η, ζ) bewiesen, und zwar der beiden ersteren für eine beliebige Richtung der ξ-, η-, ζ-Achsen, der Eulerschen Gleichungen für den Fall, daß die ξ-, η-, ζ-Achsen mit den Hauptträgheitsachsen durch den Schwerpunkt zusammenfallen.

Auf spezielle Probleme gehen wir hier nicht ein, die vielmehr dem nächsten Kapitel vorbehalten bleiben sollen.

78. Die kinetische Energie eines starren Körpers.

Für manchen Zweck ist es nützlich, den Ausdruck für die kinetische Energie eines starren Körpers zu besitzen. Wir haben natürlich zuerst:

$$2L = \sum m_\nu \mathfrak{c}_\nu^2 = \sum m_\nu \left\{\left(\frac{dx_\nu}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_\nu}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_\nu}{dt}\right)^2\right\};$$

dabei ist die Geschwindigkeit $\mathfrak{c}_\nu$ jedes Punktes nach dem festen Koordinatensystem (x, y, z) zerlegt; aber es muß natürlich dasselbe herauskommen, wenn nach den Achsen des (ξ, η, ζ)-Systems zerlegt wird. Dann haben wir an Stelle der obigen Gleichung die folgende:

$$(80) \qquad 2L = \sum_\nu m_\nu \left\{\left(\frac{d\xi_\nu}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta_\nu}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta_\nu}{dt}\right)^2\right\},$$

und darin setzen wir für $\frac{d\xi_\nu}{dt}, \frac{d\eta_\nu}{dt}, \frac{d\zeta_\nu}{dt}$ die Werte ein, die aus den Gleichungen (51) des VI. Kapitels auf pag. 331 sich ergeben, wenn man diese durch δt dividiert und zur Grenze $\delta t = 0$ übergeht. Diese Gleichungen werden dann mit etwas veränderter Bezeichnung:

$$(81) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\xi_\nu}{dt} = \dfrac{d\xi_0}{dt} + \zeta_\nu \dfrac{d\chi}{dt} - \eta_\nu \dfrac{d\varrho}{dt}, \\ \dfrac{d\eta_\nu}{dt} = \dfrac{d\eta_0}{dt} + \xi_\nu \dfrac{d\varrho}{dt} - \zeta_\nu \dfrac{d\pi}{dt}, \\ \dfrac{d\zeta_\nu}{dt} = \dfrac{d\zeta_0}{dt} + \eta_\nu \dfrac{d\pi}{dt} - \xi_\nu \dfrac{d\chi}{dt}. \end{cases}$$

Durch Kombination von (81) mit (80) ergibt sich für die doppelte kinetische Energie der Ausdruck:

$$\begin{aligned} 2L = \sum m_\nu \left\{\left(\frac{d\xi_0}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta_0}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta_0}{\partial t}\right)^2\right\} &+ \left(\frac{d\pi}{dt}\right)^2 \cdot \sum m_\nu (\eta_\nu^2 + \zeta_\nu^2) \\ &+ \left(\frac{d\chi}{dt}\right)^2 \sum m_\nu (\zeta_\nu^2 + \xi_\nu^2) + \left(\frac{d\varrho}{dt}\right)^2 \sum m_\nu (\xi_\nu^2 + \eta_\nu^2) \\ &- 2 \frac{d\chi}{dt} \frac{d\varrho}{dt} \sum m_\nu \eta_\nu \zeta_\nu \\ &- 2 \frac{d\varrho}{dt} \frac{d\pi}{dt} \sum m_\nu \zeta_\nu \xi_\nu \\ &- 2 \frac{d\pi}{dt} \frac{d\chi}{dt} \sum m_\nu \xi_\nu \eta_\nu \\ &+ 2 \left(\frac{d\eta_0}{dt} \frac{d\varrho}{dt} - \frac{d\zeta_0}{dt} \frac{d\chi}{dt}\right) \sum m_\nu \xi_\nu \\ &+ 2 \left(\frac{d\zeta_0}{dt} \frac{d\pi}{dt} - \frac{d\xi_0}{dt} \frac{d\varrho}{dt}\right) \sum m_\nu \eta_\nu \\ &+ 2 \left(\frac{d\xi_0}{dt} \frac{d\chi}{dt} - \frac{d\eta_0}{dt} \frac{d\pi}{dt}\right) \sum m_\nu \zeta_\nu . \end{aligned}$$

Benutzen wir die Werte (10) und (22) für die Trägheitsmomente und

Deviationsmomente bezüglich der ξ-, η-, ζ-Achsen, so werden diese Ausdrücke, wenn wir noch die Gesamtmasse M einführen:

$$(82)\quad \begin{cases} 2L = M\left\{\left(\frac{d\xi_0}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta_0}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta_0}{dt}\right)^2\right\} \\ \qquad + T_\xi\left(\frac{d\pi}{dt}\right)^2 + T_\eta\left(\frac{d\chi}{dt}\right)^2 + T_\zeta\left(\frac{d\varrho}{dt}\right)^2 - 2U_\xi\cdot\frac{d\chi}{dt}\frac{d\varrho}{dt} \\ \qquad - 2U_\eta\frac{d\varrho}{dt}\frac{d\pi}{dt} - 2U_\zeta\frac{d\pi}{dt}\frac{d\chi}{dt} \\ \qquad + 2\left(\frac{d\eta_0}{dt}\frac{d\varrho}{dt} - \frac{d\zeta_0}{dt}\frac{d\chi}{dt}\right)\sum m_\nu\xi_\nu \\ \qquad + 2\left(\frac{d\zeta_0}{dt}\frac{d\pi}{dt} - \frac{d\xi_0}{dt}\frac{d\varrho}{dt}\right)\sum m_\nu\eta_\nu \\ \qquad + 2\left(\frac{d\xi_0}{dt}\frac{d\chi}{dt} - \frac{d\eta_0}{dt}\frac{d\pi}{dt}\right)\sum m_\nu\xi_\nu . \end{cases}$$

Wählen wir als Anfangspunkt des (ξ, η, ζ)-Systems den Schwerpunkt, so wird

$$\left(\frac{d\xi_0}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta_0}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta_0}{dt}\right)^2 = \bar{c}^2,$$

wenn $\bar{c}$ der Betrag der Geschwindigkeit des Schwerpunktes ist; ferner sind dann

$$\sum m_\nu\xi_\nu = \sum m_\nu\eta_\nu = \sum m_\nu\zeta_\nu = 0,$$

und so folgt für $2L$:

$$(83)\quad \begin{cases} 2L = M\bar{c}^2 + T_\xi\left(\frac{d\pi}{dt}\right)^2 + T_\eta\left(\frac{d\chi}{dt}\right)^2 + T_\zeta\left(\frac{d\varrho}{dt}\right)^2 \\ \qquad - 2U_\xi\frac{d\chi}{dt}\frac{d\varrho}{dt} - 2U_\eta\frac{d\varrho}{dt}\frac{d\pi}{dt} - 2U_\zeta\frac{d\pi}{dt}\frac{d\chi}{dt}. \end{cases}$$

Man kann daher L als aus zwei Teilen bestehend auffassen:

$$(84)\qquad L = \frac{M}{2}\bar{c}^2 + L',$$

wo L' eine leicht ersichtliche Abkürzung ist. Das erste Glied ist diejenige kinetische Energie, die der Schwerpunkt haben würde, wenn in ihm die Gesamtmasse konzentriert wäre; L' ist die kinetische Energie des starren Körpers bei festgehaltenem Schwerpunkt, also die kinetische Energie der relativen Geschwindigkeit in Bezug auf den Schwerpunkt; man nennt L' daher auch kurz „die kinetische Energie relativ zum Schwerpunkte“, oder auch, da die Bewegung um den festgehaltenen Schwerpunkt eine Rotation ist, die kinetische Energie der Rotationsbewegung. $\frac{M}{2}\bar{c}^2$ dagegen wird die kinetische Energie der fortschreitenden Bewegung des Schwerpunktes genannt.

Eine weitere Vereinfachung für $2L$ folgt, wenn wir die (ξ, η, ζ) Achsen durch den Schwerpunkt so legen, daß sie mit den Hauptträgheitsachsen zusammenfallen; denn dann werden:

$$U_\xi = U_\eta = U_\zeta = 0,$$
$$\mathsf{T}_\xi = A, \quad \mathsf{T}_\eta = B, \quad \mathsf{T}_\zeta = C,$$

und so folgt:

(85) $$2L = M\bar{c}^2 + A\left(\frac{d\pi}{dt}\right)^2 + B\left(\frac{d\chi}{dt}\right)^2 + C\left(\frac{d\varrho}{dt}\right)^2,$$

und wenn endlich der Schwerpunkt festliegt ($\bar{c}=0$):

(86) $$2L = A\left(\frac{d\pi}{dt}\right)^2 + B\left(\frac{d\chi}{dt}\right)^2 + C\left(\frac{d\varrho}{dt}\right)^2.$$

Derselbe Ausdruck ergibt sich offenbar auch, wenn nicht der Schwerpunkt, sondern ein beliebiger anderer Punkt des Körpers festgehalten wird.

Mit Hilfe dieses letzten Ausdruckes für L lassen sich z. B. aus dem Hamiltonschen Prinzip (oder aus den Lagrangeschen Bewegungsgleichungen zweiter Art) die Eulerschen gewinnen, worauf jedoch hier nicht näher eingegangen werden soll; der Leser sei hierfür etwa auf Kirchhoffs „Mechanik“, Vorlesung 6, verwiesen.

79. Das Kräftesystem des starren Körpers; Statik.

An einem starren Körper werden im allgemeinen Kräfte der mannigfaltigsten Größen und Richtungen angreifen. Es entsteht so für die Dynamik die Aufgabe, diese Kräftesysteme auf möglichst einfache Typen zurückzuführen. Diese Aufgabe ist ganz analog der im vorigen Kapitel gelösten kinematischen, wo für die allgemeinste Bewegung eines starren Körpers nachgewiesen wurde, daß sie auf eine Translation und eine Rotation zurückgeführt werden kann, die insbesondere so gewählt werden können, daß eine „Bewegungsschraube“ sich ergibt. Bei der kinematischen Untersuchung haben wir von der Vektorrechnung keinen Gebrauch gemacht; dafür wollen wir sie hier in den Vordergrund stellen.

Um das jetzt vorliegende Problem zu lösen, führen wir zunächst den Begriff der „äquivalenten Kräftesysteme“ ein. Die an einem starren Körper angreifenden Kräfte kommen in den Bewegungsgleichungen (6) und (7) nur in den Kombinationen:

$$\sum_\nu X_\nu, \quad \sum_\nu Y_\nu, \quad \sum_\nu Z_\nu,$$
$$\sum_\nu (Z_\nu y_\nu - Y_\nu z_\nu), \quad \sum_\nu (X_\nu z_\nu - Z_\nu x_\nu), \quad \sum_\nu (Y_\nu x_\nu - X_\nu y_\nu)$$

vor. Fassen wir diese sechs Größen vektoriell zu je dreien zusammen, so kann man auch sagen: **Wir haben es in den Bewegungsgleichungen nur zu tun mit den beiden aus den Kräften gebildeten Vektoren:**

(87) $$\sum_\nu \mathfrak{K}_\nu$$

und

(88) $$\sum_\nu [\mathfrak{r}_\nu \mathfrak{K}_\nu].$$

Jedes Kräftesystem also, das unter gleichen Umständen auf den starren Körper wirkt, und das mit dem wirklich vorhandenen in den Ausdrücken (87) und (88) übereinstimmt, würde dieselbe Bewegung hervorbringen, wie das tatsächlich angreifende System, und wird daher dem gegebenen Kraftsystem als „äquivalent" bezeichnet. Die Aufgabe ist die, das tatsächliche Kraftsystem durch ein möglichst einfaches äquivalentes zu ersetzen.

Zunächst möge ein ganz einfacher Fall von Äquivalenz betrachtet werden, der auf den Charakter der an einem starren Körper angreifenden Kräfte ein Licht wirft. Es wirke an dem starren Körper nur eine Kraft $\mathfrak{K}_1$, die durch eine äquivalente $\mathfrak{K}$ ersetzt werden soll. Dazu muß nach (87) und (88) $\mathfrak{K}$ die beiden Bedingungen erfüllen:

$$(89) \qquad \begin{cases} \mathfrak{K} = \mathfrak{K}_1, \\ [\mathfrak{r}\mathfrak{K}] = [\mathfrak{r}_1 \mathfrak{K}_1]. \end{cases}$$

Darin sind die Lagevektoren der Angriffspunkte P und P_1 von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1$ durch $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}_1$ bezeichnet, konstruiert vom festen Koordinatenanfangspunkte 0 aus. Die erste Bedingung (89) fordert, daß die äquivalente

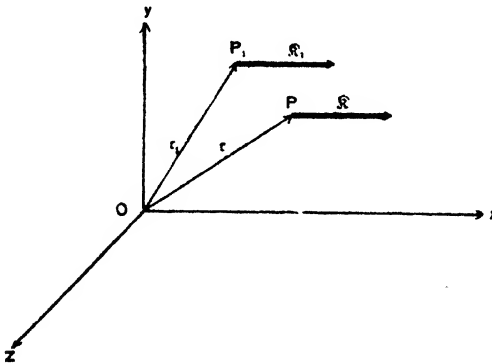


Fig. 108.

Kraft $\mathfrak{K}$ der wirklich gegebenen $\mathfrak{K}_1$ an Größe und Richtung gleich sein soll. Sehen wir für einen Moment von der zweiten Bedingung (89) ab, so haben wir etwa das Bild der Figur (108). Darin ist schon $\mathfrak{K}=\mathfrak{K}_1$ gewählt; nach der zweiten Gleichung muß aber sein, wenn wir die erste mit hinzuziehen:

$$[\mathfrak{r}\,\mathfrak{K}] = [\mathfrak{r}_1\mathfrak{K}_1] = [\mathfrak{r}_1\mathfrak{K}],$$

oder

$$(90) \qquad [\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_1, \mathfrak{K}] = 0 .$$

Diese Gleichung hat die drei Lösungen:

$$(91) \qquad \mathfrak{r} - \mathfrak{r}_1 = 0; \quad \mathfrak{K} = 0; \quad \sin(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_1, \mathfrak{K}) = 0 .$$

Die beiden ersten sind trivial; denn für $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_1 = 0$ ist überhaupt keine

Kraft an dem Körper vorhanden, und für $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_1$ würden die Angriffspunkte von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1$ zusammenfallen, d. h. das selbstverständliche Resultat folgen, daß eine Kraft mit einer ihr gleichen am gleichen Anfangspunkte äquivalent ist. Somit bleibt nur die letzte Lösung übrig, daß der Winkel zwischen $(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_1)$ und $\mathfrak{K}$ gleich Null wird. $|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_1|$ ist aber die Strecke PP_1, d. h. die Verbindungslinie beider Angriffspunkte, die demnach mit $\mathfrak{K}_1$ (und $\mathfrak{K}$) die gleiche Richtung haben muß. Es folgt also der Satz, daß eine Kraft $\mathfrak{K}_1$ einer gleich großen $\mathfrak{K}$ äquivalent ist, wenn der Angriffspunkt der letzteren nur so bestimmt wird, daß die Richtung von $\mathfrak{K}_1$ durch denselben geht; im übrigen kann der Angriffspunkt der Ersatzkraft auf der so bestimmten Geraden beliebig verschoben werden. Fig. 108 erfüllt diese Bedingung nicht und muß daher durch Fig. 109 korrigiert werden. Man kann das anschaulicher ausdrücken: Eine Kraft kann in ihrer eigenen Richtung im starren Körper beliebig verschoben werden; sie ist also — wie der Drehungsvektor — ein „linienflüchtiger Vektor“.

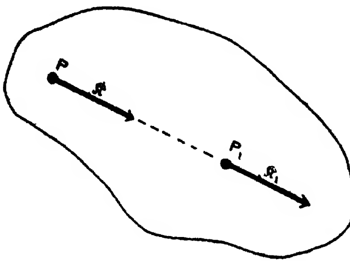


Fig. 109.

Man erkennt ferner leicht die Richtigkeit des folgenden Satzes: Gegeben sei ein beliebiges Kraftsystem und ein ihm äquivalentes, das also nach Definition mit dem ersteren die Stücke (87) und (88) gemeinsam hat; drehen wir nun das äquivalente System um, d. h. die Richtung jeder Kraft desselben, und fügen dieses inverse äquivalente System dem gegebenen Kräftesystem hinzu, so werden für das kombinierte System offenbar:

$$(92) \qquad \begin{cases} \sum\limits_\nu \mathfrak{K}_\nu = 0, \\ \sum\limits_\nu [\mathfrak{r}_\nu \mathfrak{K}_\nu] = 0. \end{cases}$$

Was bedeuten diese Gleichungen? Das erkennen wir, wenn wir die Gleichung des Prinzips der virtuellen Verrückungen bilden:

$$(93) \qquad \sum_\nu (X_\nu \delta x_\nu + Y_\nu \delta y_\nu + Z_\nu \delta z_\nu) = 0.$$

Setzen wir darin für δx_ν, δy_ν, δz_ν die Werte von Gleichung (8) dieses Kapitels ein und argumentieren im übrigen genau so, wie bei Aufstellung der Bewegungsgleichungen in Nr. 78, so erhalten wir als Gleichgewichtsbedingungen für den starren Körper:

$$\sum X_\nu = \sum Y_\nu = \sum Z_\nu = 0,$$
$$\sum (Z_\nu y_\nu - Y_\nu z_\nu) = \sum (X_\nu z_\nu - Z_\nu x_\nu) = \sum (Y_\nu x_\nu - X_\nu y_\nu) = 0,$$

oder vektoriell geschrieben:

$$\sum \mathfrak{K}_\nu = \sum [\mathfrak{r}_\nu \mathfrak{K}_\nu] = 0,$$

d. h. eben die Gleichungen (92); diese stellen also die Gleichungen der Statik eines starren Körpers dar. Ist der Körper zur Zeit $t=0$ in Ruhe, so bleibt er unter Einwirkung eines den Gleichungen (92) gehorchenden Kraftsystems in Ruhe; war er zu Anfang in irgendeiner Bewegung (z. B. Rotation) begriffen, so bewegt er sich so weiter, als ob gar keine Kräfte an ihm wirkten. Wie diese kräftefreie Bewegung ausfällt, werden wir in speziellen Fällen im nächsten Kapitel zu untersuchen haben.

Wir haben damit den Satz: Das gegebene Kraftsystem und ein inverses ihm äquivalentes halten sich am starren Körper das Gleichgewicht.

Nun gehen wir zur allgemeinen Untersuchung über. Da eine Kraft $\mathfrak{K}_1$ sich nach dem obigen durch eine andere Kraft $\mathfrak{K}$ ersetzen läßt, wenn nur der Angriffspunkt geeignet gewählt wird, so liegt die Frage nahe, ob stets einem beliebigen Kräftesystem $\mathfrak{K}_\nu$ $(\nu=1, 2\ldots)$ eine Einzelkraft äquivalent sei? Nennen wir diese Einzelkraft $\mathfrak{K}$ und den Lagevektor ihres Angriffspunktes $\mathfrak{r}$, so muß nach Definition der Äquivalenz für diese Kraft sein:

$$(94) \qquad \begin{cases} \mathfrak{K} = \sum\limits_\nu \mathfrak{K}_\nu, \\ [\mathfrak{r}\,\mathfrak{K}] = \sum\limits_\nu [\mathfrak{r}_\nu \mathfrak{K}_\nu] = \sum\limits_\nu \mathfrak{M}_\nu, \end{cases}$$

d. h. die äquivalente Einzelkraft $\mathfrak{K}$ muß einerseits gleich sein der Resultante der Systemkräfte, und zweitens ihr Moment gleich der Summe der Momente $\sum \mathfrak{M}_\nu$ der gegebenen Kräfte. Wann ist dies der Fall? Wenn wir die zweite Gleichung (94) skalar mit $\mathfrak{K}$ multiplizieren, so folgt:

$$\mathfrak{K}[\mathfrak{r}\,\mathfrak{K}] = \mathfrak{K}\sum_\nu \mathfrak{M}_\nu.$$

Nach der Definition des skalaren und vektoriellen Produktes aber kann man sich leicht — eventuell durch Ausrechnung — überzeugen, daß $\mathfrak{K}[\mathfrak{r}\,\mathfrak{K}] = \mathfrak{r}[\mathfrak{K}\,\mathfrak{K}]$ ist; der letztere Wert ist aber gleich Null, da $[\mathfrak{K}\,\mathfrak{K}]=0$; also lautet die letzte Gleichung:

$$\mathfrak{K}\cdot\sum_\nu \mathfrak{M}_\nu = 0,$$

oder wenn man nach (94) die Werte einsetzt:

$$(95) \qquad \sum_\nu \mathfrak{K}_\nu \cdot \sum_\nu [\mathfrak{r}_\nu \mathfrak{K}_\nu] = 0.$$

Gleichung (95) stellt die Bedingung dar, der die gegebenen Kräfte gehorchen müssen, wenn sie durch eine Einzelkraft ersetzbar sein sollen. Da das gegebene Kraftsystem aber ganz willkürlich ist, so wird im allgemeinen Gleichung (95) nicht erfüllt sein, und wir haben daher zunächst das wichtige Resultat: Im allgemeinen ist

das an einem starren Körper angreifende Kräftesystem nicht durch eine Einzelkraft ersetzbar.

Immerhin ist der Fall, wo dies dennoch zutrifft, in der Physik von großem Interesse, und wir wollen daher untersuchen, wann Gleichung (95) erfüllt ist. Sie hat drei Lösungen:

$$(96) \qquad \sum_\nu \mathfrak{K}_\nu = 0; \quad \sum_\nu [\mathfrak{r}_\nu \mathfrak{K}_\nu] = 0; \quad \sphericalangle\left(\sum_\nu \mathfrak{K}_\nu, \sum_\nu [\mathfrak{r}_\nu \mathfrak{K}_\nu]\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Nehmen wir zunächst $\sum_\nu \mathfrak{K}_\nu = 0$. Dann ist nach der ersten Gleichung (94) auch $\mathfrak{K} = 0$; nach der zweiten Gleichung (94) muß daher $\sum_\nu [\mathfrak{r}_\nu \mathfrak{K}_\nu] = 0$ sein. $\sum_\nu \mathfrak{K}_\nu = \sum_\nu [\mathfrak{r}_\nu \mathfrak{K}_\nu] = 0$ heißt aber, daß das gegebene System sich das Gleichgewicht am Körper hält; in diesem Falle ist es durch eine Einzelkraft ersetzbar: aber der Fall ist deshalb uninteressant, weil die äquivalente Einzelkraft Null ist.

Die zweite Lösung wäre $\sum_\nu [\mathfrak{r}_\nu \mathfrak{K}_\nu] = 0$, d. h. die gegebenen Kräfte müssen so beschaffen sein, daß das resultierende Drehmoment derselben gleich Null ist. Das ist möglich, wenn entweder alle Kräfte $\mathfrak{K}_\nu$ gleich Null sind — ein offenbar trivialer Fall —, oder wenn alle $\mathfrak{r}_\nu$ verschwinden, d. h. sämtliche Kräfte im Koordinatenanfangspunkt angreifen, oder endlich, wenn die Richtung jeder Kraft $\mathfrak{K}_\nu$ parallel $\mathfrak{r}_\nu$ ist, d. h. wenn die Kräfte radial auf den Anfangspunkt hin oder von ihm fort weisen. Dieser letztere Unterfall ist mit dem vorhergehenden identisch; denn da die Kräfte linienflüchtige Vektoren sind, so können sie, wenn die letzte Bedingung erfüllt ist, auch stets an den Koordinatenanfangspunkt verschoben werden.

Der dritte Hauptfall endlich tritt dann ein, wenn die resultierende Kraft $\sum_\nu \mathfrak{K}_\nu$ und das resultierende Drehmoment $\sum_\nu [\mathfrak{r}_\nu \mathfrak{K}_\nu]$ derselben senkrecht aufeinander stehen.

Diese letzte Bedingung ist z. B. stets erfüllt, wenn die Kräfte parallel und gleichgerichtet sind, wie z. B. die Schwere. Nehmen wir eine der wirkenden Kräfte heraus, z. B. $\mathfrak{K}_1$, so sind alle anderen mit ihr gleichgerichtet, unterscheiden sich also nur im Betrage, d. h. nur um einen skalaren Faktor a_ν von derselben, so daß man schreiben kann:

$$\mathfrak{K}_\nu = a_\nu \cdot \mathfrak{K}_1.$$

Also ist

$$\sum_\nu \mathfrak{K}_\nu = \mathfrak{K}_1 \sum_\nu a_\nu = a \mathfrak{K}_1,$$

wenn wir das skalare Aggregat $\sum_\nu a_\nu$ durch a abkürzen; ferner ist dann

$$\sum_\nu [\mathfrak{r}_\nu \mathfrak{K}_\nu] = \sum_\nu [\mathfrak{r}_\nu, a_\nu \mathfrak{K}_1] = \sum_\nu [a_\nu \mathfrak{r}_\nu, \mathfrak{K}_1] = \left[\sum_\nu a_\nu \mathfrak{r}_\nu, \mathfrak{K}_1\right].$$

$\sum_\nu a_\nu \mathfrak{r}_\nu$ wollen wir durch $\bar{\mathfrak{r}}$ bezeichnen; $\bar{\mathfrak{r}}$ ist offenbar eine Art von Mittelwert, der mit Hilfe der a_ν aus den $\mathfrak{r}_\nu$ gebildet ist. Dann wird:

$$\sum_\nu [\mathfrak{r}_\nu \mathfrak{K}_\nu] = [\bar{\mathfrak{r}} \mathfrak{K}_1].$$

Nach Definition des Vektorproduktes steht nun $[\bar{\mathfrak{r}} \mathfrak{K}_1]$ senkrecht auf der Ebene des Vektors $\bar{\mathfrak{r}}$ und des Vektors $\mathfrak{K}_1$, also ist hier in der Tat das resultierende Drehmoment $[\bar{\mathfrak{r}} \mathfrak{K}_1]$ senkrecht zur resultierenden Kraft $\sum \mathfrak{K}_\nu = \mathfrak{K} \cdot \sum a_\nu = a\, \mathfrak{K}_1$ gerichtet.

Im Falle paralleler gleichgerichteter Kräfte ist daher die Bedingung (95) stets erfüllt: Parallele gleichgerichtete Kräfte — insbesondere also die Schwere — sind daher stets durch eine Einzelkraft ersetzbar. Diese ist nach (94) nach Betrag und Richtung gleich der Resultanten der wirklich angreifenden Kräfte. Die Resultante ist in diesem Falle offenbar gleich der algebraischen Summe der Einzelkräfte.

Nachdem im obigen die drei möglichen Fälle charakterisiert sind, in denen ein Kräftesystem durch eine Einzelkraft ersetzt werden kann, müssen allgemein wir den Angriffspunkt dieser äquivalenten Einzelkraft feststellen. Dabei schalten wir den uninteressanten ersten Fall $\sum_\nu \mathfrak{K}_\nu = 0$ aus. Dann läßt sich stets aus (94) ein Punkt finden, in dem diese Einzelkraft als angreifend gedacht werden kann. Denn schreiben wir die zweite Gleichung (94) in Koordinatendarstelluug, wobei wir aus der ersten für $\mathfrak{K}$ seinen Wert $\sum \mathfrak{K}_\nu$ substituieren, so folgt:

$$(97)\qquad \begin{cases} y\sum Z_\nu - z\sum Y_\nu = \sum (Z_\nu y_\nu - Y_\nu z_\nu), \\ z\sum X_\nu - x\sum Z_\nu = \sum (X_\nu z_\nu - Z_\nu x_\nu), \\ x\sum Y_\nu - y\sum X_\nu = \sum (Y_\nu x_\nu - X_\nu y_\nu). \end{cases}$$

Darin sind die sechs Größen $\sum X_\nu, \ldots, \sum (Z_\nu y_\nu - Y_\nu z_\nu), \ldots$ gegeben und bekannt; es folgt aus (97) z. B. für y und z die Darstellung:

$$(98)\qquad \begin{cases} y = \dfrac{x\sum Y_\nu - \sum (Y_\nu x_\nu - X_\nu y_\nu)}{\sum X_\nu}, \\ z = \dfrac{x\sum Z_\nu + \sum (X_\nu z_\nu - Z_\nu x_\nu)}{\sum X_\nu}. \end{cases}$$

Beide Gleichungen stellen Ebenen dar, deren Schnittlinie der geometrische Ort für den Angriffspunkt der äquivalenten Einzelkraft ist. Daß es nicht ein Punkt, sondern eine Gerade ist, ist selbstverständlich, da die Kräfte linienflüchtige Vektoren sind. Eine besonders einfache Form nehmen die Gleichungen (98) in dem nicht seltenen Falle an, daß alle Kräfte parallel und gleichgerichtet sind, z. B. im Falle der Schwere, für die die Erfüllung der Bedingung (95) schon vorhin nachgewiesen wurde. Nennen wir die Richtungskosinusse der parallelen Kraftvektoren α, β, γ, so können wir schreiben:

$$(99)\qquad \begin{cases} X_\nu = \alpha \cdot \mathfrak{K}_\nu, \\ Y_\nu = \beta \cdot \mathfrak{K}_\nu, \\ Z_\nu = \gamma \cdot \mathfrak{K}_\nu, \end{cases}$$

und dann ergibt sich für den Angriffspunkt aus (98) und (99):

$$(100)\qquad \begin{cases} y = \dfrac{x\beta\sum\mathfrak{K}_\nu + \alpha\sum y_\nu\mathfrak{K}_\nu - \beta\sum x_\nu\mathfrak{K}_\nu}{\alpha\sum\mathfrak{K}_\nu}, \\ z = \dfrac{x\gamma\sum\mathfrak{K}_\nu + \alpha\sum z_\nu\mathfrak{K}_\nu - \gamma\sum x_\nu\mathfrak{K}_\nu}{\alpha\sum\mathfrak{K}_\nu}, \end{cases}$$

oder in eleganterer Anordnung:

$$(101)\qquad \left[x - \frac{\sum x_\nu\mathfrak{K}_\nu}{\sum\mathfrak{K}_\nu}\right] : \left[y - \frac{\sum y_\nu\mathfrak{K}_\nu}{\sum\mathfrak{K}_\nu}\right] : \left[z - \frac{\sum z_\nu\mathfrak{K}_\nu}{\sum\mathfrak{K}_\nu}\right] = \alpha : \beta : \gamma .$$

Das ist eine Gerade von der Richtung (α, β, γ), d. h. parallel der Richtung der Kräfte, die durch den Punkt

$$(102)\qquad x = \frac{\sum x_\nu\mathfrak{K}_\nu}{\sum\mathfrak{K}_\nu}, \quad y = \frac{\sum y_\nu\mathfrak{K}_\nu}{\sum\mathfrak{K}_\nu}, \quad z = \frac{\sum z_\nu\mathfrak{K}_\nu}{\sum\mathfrak{K}_\nu}$$

hindurchgeht. Dieser Punkt ist genau so aus den Koordinaten und den Kräften gebildet, wie der Schwerpunkt aus den Koordinaten und den

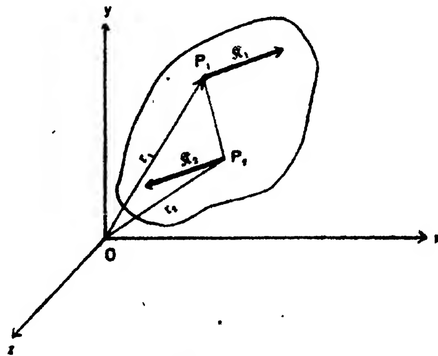


Fig. 110.

Massen; er heißt „Mittelpunkt der parallelen Kräfte". In ihm kann man die Einzelkraft anbringen, aber natürlich auch, da die Kraft linienflüchtig ist, an jedem Punkte der durch ihn hindurchgehenden Geraden (101). In speziellen Fällen wird der Mittelpunkt der parallelen Kräfte mit dem Schwerpunkte identisch, wenn nämlich die sämtlichen $\mathfrak{K}_\nu$ proportional den Massen m_ν sind, wie dies z. B. bei der Schwere der Fall ist.

Nachdem wir jetzt die speziellen Fälle diskutiert haben, in denen eine Einzelkraft einem gegebenen System äquivalent ist, wollen wir

zur Vorbereitung auf das Folgende ein einfaches Beispiel behandeln, in dem dies nicht mehr der Fall ist.

Es mögen an einem starren Körper zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2 = -\mathfrak{K}_1$ angreifen und die Verbindungslinie ihrer Angriffspunkte P_1 und P_2 falle **nicht** in die Richtung der Kräfte (Fig. 110). Die vom Koordinatenanfangspunkte aus konstruierten Lagevektoren der Angriffspunkte P_1 und P_2 seien $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{r}_2$. Damit eine Einzelkraft $\mathfrak{K}$ diesem Kräftesystem äquivalent sei, müßte nach der ersten Gleichung (94) sein:

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2 = 0,$$

und folglich müßte nach der zweiten Gleichung (94) auch $\sum_\nu [\mathfrak{r}_\nu \mathfrak{K}_\nu]$ verschwinden. Dies ist hier jedoch keineswegs der Fall; denn nach Fig. 110 ergibt sich:

$$\sum_\nu [\mathfrak{r}_\nu \mathfrak{K}_\nu] = [\mathfrak{r}_1 \mathfrak{K}_1] + [\mathfrak{r}_2 \mathfrak{K}_2] = [\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2, \mathfrak{K}_1];$$

und das ist von Null verschieden, da der absolute Betrag des Vektors $(\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2)$ gleich dem Abstande $\overline{P_1 P_2}$ der Angriffspunkte ist, und dieser nach Voraussetzung nicht in die Richtung von $\mathfrak{K}_1$ fällt. Also ist in der Tat keine Einzelkraft dem betrachteten System äquivalent. Dasselbe stellt vielmehr einen selbständigen Typus eines einfachen Kraftsystems vor; man

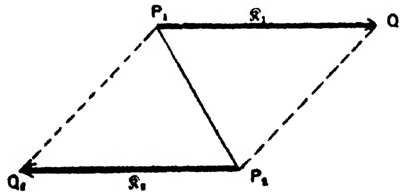


Fig. 111.

nennt es ein „Kräftepaar" oder einen „Drehzwilling". Wir bezeichnen es durch $\mathfrak{P}$. Als Betrag des Kräftepaares $\mathfrak{P}$ bezeichnet man (Fig. 111) den Inhalt des Parallelogramms, das gebildet wird, wenn man den Angriffspunkt jeder Kraft mit dem Endpunkte der anderen verbindet (also z. B. in Fig. 111 das Parallelogramm $P_1 Q_1 P_2 Q_2$). Das ist gleich dem Produkte aus dem Betrage einer der beiden Kräfte und ihrem senkrechten Abstande, oder auch gleich dem absoluten Betrage des Vektorproduktes $[\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2, \mathfrak{K}_1]$, d. h. gleich dem Betrage des durch das Paar erzeugten resultierenden Drehmomentes. Tragen wir senkrecht zur Ebene der beiden Kräfte, etwa längs der Normalen, die $\overline{P_1 P_2}$ halbiert, die Strecke $|[\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2, \mathfrak{K}_1]|$ ab, und zwar in einer solchen Richtung, daß für ein dieser Richtung entgegenblickendes Auge das Kräfte

paar umgekehrt dem Uhrzeigersinne zu drehen strebt, so stellt diese Strecke der Größe und Richtung nach das Kräftepaar dar; das Kräftepaar ist daher ein Vektor, als dessen Angriffspunkt wir vorläufig den Mittelpunkt der Verbindungslinie $\overline{P_1 P_2}$ betrachten. Aber ein Kräftepaar ist ein freier Vektor, d. h. der Angriffspunkt kann an jeder Stelle des starren Körpers angebracht werden. Denn verlegen wir das Kräftepaar — ohne natürlich seine Richtung zu ändern — an irgend einen anderen Punkt des starren Körpers, so ändern sich $\sum_\nu \mathfrak{K}_\nu$ und $\sum_\nu [\mathfrak{r}_\nu \mathfrak{K}_\nu]$ nicht; denn der erstere Ausdruck ist nach Definition des Kräftepaares gleich Null, und der letztere ist dem Betrage nach stets gleich dem Produkte der einen Kraft des Paares in den senkrechten Abstand ihres Angriffspunktes von der anderen Kraft; die Richtung ist nach Voraussetzung unverändert geblieben. Also ist in der

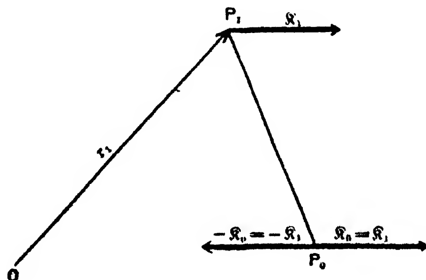


Fig. 112.

Tat gezeigt, daß ein Kräftepaar ein freier Vektor ist. Es ist natürlich auch keineswegs notwendig, daß bei der Verschiebung des Angriffspunktes des Paares im starren Körper der Betrag der Kräfte $\mathfrak{K}_1$ (und $\mathfrak{K}_2$) sowie der Abstand $\overline{P_1 P_2}$ unverändert bleiben; verlangt wird nur, daß das Produkt aus der einen Kraft und dem senkrechten Abstande ihres Angriffspunktes von der anderen sich nicht ändert. Also können z. B. die Kräfte des Paares verdoppelt werden, wenn ihr senkrechter Abstand auf die Hälfte reduziert wird. Denn in beiden Fällen bleibt ja die Länge der nach der obigen Vorschrift auf der Ebene des Paares konstruierten Normale, nämlich $|[\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2, \mathfrak{K}_1]|$ ungeändert.

Wir wollen zunächst den Satz beweisen, daß eine Kraft in ihrer Wirkung ersetzt werden kann, d. h. äquivalent ist einer an einem vorgeschriebenen Punkte angreifenden gleich großen Kraft und einem Kräftepaar, dessen Richtung senkrecht zu der der Kraft ist. Denn sei z. B. in Fig. 112 $\mathfrak{K}_1$ eine am Punkte P_1 (mit dem Lagenvektor $\mathfrak{r}_1$) wirkende Kraft, die durch eine gleich große $\mathfrak{K}_0$ im Punkte P_0 und ein Paar ersetzt werden soll. Dann ist klar, daß die Wirkung der Kraft $\mathfrak{K}_1$ im Punkte P_1 nicht geändert wird, wenn ich im Punkte P_0 zwei Kräfte $\mathfrak{K}_0 = \mathfrak{K}_1$ und $-\mathfrak{K}_0 = -\mathfrak{K}_1$ anbringe; denn

diese beiden liefern ja weder zu $\sum_\nu \mathfrak{K}_\nu$ noch zu $\sum_\nu [\mathfrak{r}_\nu \mathfrak{K}_\nu]$ einen Beitrag. Verbinde ich jetzt P_1 mit P_0, so kann ich die beiden Kräfte $\mathfrak{K}_1$ im Punkte P_1 und $-\mathfrak{K}_1$ im Punkte P_0 als ein Paar $\mathfrak{P}$ auffassen, das senkrecht zur Zeichenebene gerichtet ist. Es bleibt noch übrig die in der Zeichenebene liegende Kraft $\mathfrak{K}_1$ in P_0. Es ist also in der Tat dieses Paar $\mathfrak{P}$ und die dazu senkrechte Kraft $\mathfrak{K}_0 = \mathfrak{K}_1$ im vorgeschriebenen Punkte P_0 der gegebenen Kraft $\mathfrak{K}_1$ in P_1 äquivalent. Dieser Satz ist offenbar auch umgekehrt richtig: Ein Kräftepaar $\mathfrak{P}$ und eine dazu senkrechte Kraft $\mathfrak{K}$ können stets durch eine Einzelkraft ersetzt werden, wie schon aus dem Umstande folgt, daß hier die Bedingung (95) erfüllt ist. Die Einzelkraft ist der gegebenen Kraft $\mathfrak{K}$ der Größe und Richtung nach gleich, nur greift sie an einem anderen Punkte des starren Körpers an.

Nach diesen Vorbereitungen beweisen wir den Satz: Ein beliebiges an einem starren Körper angreifendes Kraftsystem kann stets zurückgeführt werden auf eine Einzelkraft $\mathfrak{K}$ und ein Kräftepaar $\mathfrak{P}$. Denn sei für das wirklich angreifende Kraftsystem die resultierende Kraft $\sum_\nu \mathfrak{K}_\nu$ und das resultierende Drehmoment $\sum_\nu [\mathfrak{r}_\nu \mathfrak{K}_\nu]$. Dann bringen wir im Koordinatenanfangspunkte eine Kraft $\mathfrak{K} = \sum_\nu \mathfrak{K}_\nu$ an; diese liefert das Drehmoment Null, da sie durch den Anfangspunkt geht. Ferner lassen wir im Koordinatenanfangspunkte (oder einem beliebigen anderen Punkte des starren Körpers) ein Paar $\mathfrak{P}$ angreifen, das nach Größe und Richtung mit $\sum_\nu [\mathfrak{r}_\nu \mathfrak{K}_\nu]$, dem resultierenden Drehmomente des gegebenen Kräftesystems, übereinstimmt. Dieses Paar liefert zur resultierenden Kraft $\sum_\nu \mathfrak{K}_\nu$ keinen Beitrag, nach Definition des Kräftepaares. Die Kraft $\mathfrak{K}$ und das Paar $\mathfrak{P}$ zusammen liefern also die resultierende Kraft $\sum_\nu \mathfrak{K}_\nu$ und das resultierende Drehmoment $\sum_\nu [\mathfrak{r}_\nu \mathfrak{K}_\nu]$, sind also wirklich dem gegebenen Kräftesystem äquivalent, was zu beweisen war. — Dieser Satz ist analog dem im vorhergehenden Kapitel bewiesenen, daß die allgemeinste Bewegung eines starren Körpers einer Translation und einer Rotation äquivalent ist. Aber genau wie dort weiter gezeigt werden konnte, daß bei geeigneter Wahl des Bezugspunktes die Richtung der Translation parallel derjenigen der Rotation wird, so kann auch hier bewiesen werden, daß die äquivalente Einzelkraft und das Paar so gewählt werden können, daß die Richtungen beider übereinstimmen. Ein solches Kraftsystem nennt man eine „Kraftschraube".

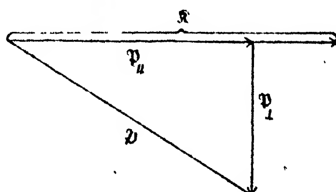


Fig. 118.

Es seien z. B. (in Fig. 118) $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{P}$ resp. die resultierende Kraft und

das Paar, beide im Koordinatenanfangspunkte angreifend, auf die wir oben das gegebene Kraftsystem reduziert haben. Dann können wir $\mathfrak{P}$ ersetzen durch seine Komponenten $\mathfrak{P}_{\parallel}$ und $\mathfrak{P}_{\perp}$, von denen die erste parallel, die zweite senkrecht zu $\mathfrak{K}$ gerichtet ist. Nach einem vorhin bewiesenen Satze können wir nun aber $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{P}_{\perp}$, d. h. eine Kraft und ein dazu senkrechtes Paar, durch eine der ursprünglichen Kraft gleiche Einzelkraft $\mathfrak{K}'$ ersetzen, die lediglich an einem anderen Punkte angreift. Also haben wir statt des Systems $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{P}$ das äquivalente $\mathfrak{K}'$ und $\mathfrak{P}_{\parallel}$, wobei nun $\mathfrak{P}_{\parallel}$ parallel $\mathfrak{K}'$ ist. Es ist also der Satz in der Tat bewiesen, daß das allgemeinste Kräftesystem eines starren Körpers äquivalent einer Kraftschraube ist. Der Einfachheit halber wollen wir in Zukunft bei $\mathfrak{K}'$ und $\mathfrak{P}_{\parallel}$ die Indizes fortlassen, wo kein Mißverständnis dadurch entstehen kann, und also die Konstituenten der äquivalenten Kraftschraube einfach durch $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{P}$ bezeichnen. Es fragt sich nun, wo die Kraft $\mathfrak{K}$ angreifen muß, und wie groß das Paar $\mathfrak{P}$ sein muß. Was zunächst die letztere Frage angeht, so haben wir folgende Gleichungen, denen die resultierende Kraft $\mathfrak{K}$ und das Paar $\mathfrak{P}$ genügen müssen, da sie dem gegebenen Kräftesystem ja äquivalent sind:

$$(103)\quad \begin{cases} \mathfrak{K} = \sum\limits_{\nu} \mathfrak{K}_{\nu}, \\ \mathfrak{P} + [\mathfrak{r}\,\mathfrak{K}] = \sum\limits_{\nu} [\mathfrak{r}_{\nu}\mathfrak{K}_{\nu}] = \sum\limits_{\nu} \mathfrak{M}_{\nu}. \end{cases}$$

Dabei ist $\mathfrak{r}$ der (zu bestimmende) Lagenvektor des Angriffspunktes von $\mathfrak{K}$. Diese beiden Gleichungen sagen nur aus, daß die durch $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{P}$ hervorgerufenen Werte der resultierenden Kraft und des resultierenden Drehmomentes gerade gleich $\sum\limits_{\nu}\mathfrak{K}_{\nu}$ und $\sum\limits_{\nu}[\mathfrak{r}_{\nu}\mathfrak{K}_{\nu}]$ sein müssen, wie sie von dem wirklichen Kräftesystem hervorgerufen werden. Es tritt noch hinzu die Bedingung, daß $\mathfrak{K}$ parallel $\mathfrak{P}$ ist; diese werden wir erst später verwerten. Werden nun die beiden Gleichungen (103) Seite für Seite miteinander skalar multipliziert, so haben wir:

$$(104)\quad \mathfrak{K}\cdot\mathfrak{P} + \mathfrak{K}[\mathfrak{r}\,\mathfrak{K}] = \sum_{\nu}\mathfrak{K}_{\nu}\cdot\sum_{\nu}[\mathfrak{r}_{\nu}\mathfrak{K}_{\nu}];$$

$\mathfrak{K}[\mathfrak{r}\mathfrak{K}]$ ist aber, wie sofort aus der Definition des skalaren und vektoriellen Produktes (oder auch durch Ausrechnen) folgt, gleich Null, da es gleich $\mathfrak{r}[\mathfrak{K}\,\mathfrak{K}]$ ist; also bleibt:

$$\mathfrak{K}\,\mathfrak{P} = \sum_{\nu}\mathfrak{K}_{\nu}\cdot\sum_{\nu}[\mathfrak{r}_{\nu}\mathfrak{K}_{\nu}],$$

oder indem wir jetzt die Voraussetzung der Parallelität von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{P}$ heranziehen:

$$(105)\quad |\mathfrak{P}| = \frac{\sum\limits_{\nu}\mathfrak{K}_{\nu}\cdot\sum\limits_{\nu}[\mathfrak{r}_{\nu}\mathfrak{K}_{\nu}]}{|\sum\limits_{\nu}\mathfrak{K}_{\nu}|} = \left|\sum_{\nu}[\mathfrak{r}_{\nu}\mathfrak{K}_{\nu}]\right|\cdot\cos\left(\sum_{\nu}\mathfrak{K}_{\nu};\ \sum_{\nu}[\mathfrak{r}_{\nu}\mathfrak{K}_{\nu}]\right).$$

Diese Gleichung bestimmt den Betrag des Kräftepaares $\mathfrak{P}$; in ihr ist offenbar als Spezialfall Gleichung (95) enthalten, die die Bedingung

dafür ausspricht, daß das Kräftepaar $\mathfrak{P}$ gleich Null ist; der Richtung nach stimmt $\mathfrak{P}$ mit der gegebenen resultierenden Kraft $\sum_\nu \mathfrak{K}_\nu$ überein.

Wir wollen nun den Lagenvektor $\mathfrak{r}$ des Angriffspunktes der resultierenden Kraft bestimmen, soweit es möglich ist. Durch skalare Multiplikation der zweiten Gleichung (103) mit $\mathfrak{r}$ erhalten wir:

$$\mathfrak{r}\,\mathfrak{P} + \mathfrak{r}\,[\mathfrak{r}\,\mathfrak{K}] = \mathfrak{r}\sum_\nu [\mathfrak{r}_\nu \mathfrak{K}_\nu].$$

Das zweite Glied der linken Seite ist aber gleich Null, und so kann diese Gleichung vereinfacht werden zu:

$$\mathfrak{r}\cdot\left(\mathfrak{P} - \sum_\nu [\mathfrak{r}_\nu \mathfrak{K}_\nu]\right) = 0, \tag{106}$$

oder wenn wir dieses skalare Produkt ausführlich schreiben:

$$\left\{ \begin{aligned} x\cdot\left\{\mathfrak{P}_x - \sum_\nu [\mathfrak{r}_\nu \mathfrak{K}_\nu]_x\right\} + y\cdot\left\{\mathfrak{P}_y - \sum_\nu [\mathfrak{r}_\nu \mathfrak{K}_\nu]_y\right\}& \\ + z\left\{\mathfrak{P}_z - \sum_\nu [\mathfrak{r}_\nu \mathfrak{K}_\nu]_z\right\} &= 0; \end{aligned}\right. \tag{107}$$

das ist aber offenbar die Gleichung einer Ebene und stellt eine erste Bedingung für den Angriffspunkt (x, y, z) der resultierenden Kraft dar.

Multiplizieren wir ebenso die zweite Gleichung (103) skalar mit $\sum_\nu [\mathfrak{r}_\nu \mathfrak{K}_\nu]$, so folgt:

$$\mathfrak{P}\cdot\sum_\nu [\mathfrak{r}_\nu \mathfrak{K}_\nu] + \sum_\nu [\mathfrak{r}_\nu \mathfrak{K}_\nu]\cdot[\mathfrak{r}\,\mathfrak{K}] = \left(\sum_\nu [\mathfrak{r}_\nu \mathfrak{K}_\nu]\right)^2.$$

Setzen wir das resultierende Drehmoment $\sum_\nu [\mathfrak{r}_\nu \mathfrak{K}_\nu]$ für einen Augenblick gleich $\mathfrak{M}$, so läßt sich diese Gleichung schreiben:

$$\mathfrak{P}\cdot\mathfrak{M} + \mathfrak{M}\cdot[\mathfrak{r}\,\mathfrak{K}] = \mathfrak{M}^2,$$

oder nach einigen leichten Umrechnungen:

$$\mathfrak{r}\,[\mathfrak{K}\,\mathfrak{M}] = \mathfrak{M}^2 - \mathfrak{P}\,\mathfrak{M}. \tag{108}$$

Jetzt ziehen wir die Bedingung heran, daß $\mathfrak{P}$ parallel $\mathfrak{K}$ ist, sich also von $\mathfrak{K}$ nur um einen skalaren Faktor a unterscheiden kann; folglich ist:

$$\mathfrak{P} = a\,\mathfrak{K}. \tag{109}$$

Multipliziert man die zweite Gleichung (103) Seite für Seite skalar mit (109), so folgt:

$$\mathfrak{P}^2 + \mathfrak{P}\,[\mathfrak{r}\,\mathfrak{K}] = a\,\mathfrak{K}\sum \mathfrak{M}_\nu = a\,\mathfrak{K}\,\mathfrak{M},$$

oder indem nochmals (109) angewendet wird:

$$\mathfrak{P}^2 + \frac{1}{a}\,\mathfrak{P}\,[\mathfrak{r}\,\mathfrak{P}] = \mathfrak{P}\,\mathfrak{M}.$$

Darin fällt das zweite Glied auf der linken Seite fort und es wird so schließlich:

$$\mathfrak{P}\,\mathfrak{M} = \mathfrak{P}^2,$$

und damit wird (108) endgültig:

$$\mathfrak{r}[\mathfrak{K}\mathfrak{M}] = \mathfrak{M}^2 - \mathfrak{P}^2. \tag{110}$$

Schreiben wir diese Gleichung wieder in Koordinatendarstellung:

$$x \cdot [\mathfrak{K}\mathfrak{M}]_x + y \cdot [\mathfrak{K}\mathfrak{M}]_y + z \cdot [\mathfrak{K}\mathfrak{M}]_z = \mathfrak{M}^2 - \mathfrak{P}^2, \tag{111}$$

so erkennt man, daß dies wieder die Gleichung einer Ebene ist, auf der (x, y, z) sich befinden muß. Die Gleichungen (107) und (111) stellen also zusammen eine Gerade dar (die Schnittlinie der beiden Ebenen), und auf dieser kann der Angriffspunkt der resultierenden Kraft beliebig gewählt werden. Damit ist alles bestimmt.

Auf die Analogie der hier abgeleiteten Äquivalenzsätze mit den kinematischen Sätzen des vorigen Kapitels ist bereits mehrfach hingewiesen worden. Erwähnt sei hier nur noch, daß speziell der Translationsvektor und das Kräftepaar, der Rotationsvektor und die Kraft sich entsprechen, da sie gleichartige — resp. freie und linienflüchtige — Vektoren darstellen.

Achtes Kapitel.

Spezielle Dynamik starrer Körper.

80. Das physische Pendel; experimentelle Bestimmung von Trägheitsmomenten.

Als erstes spezielles Problem der Bewegung starrer Körper behandeln wir den Fall, daß ein starrer Körper sich unter dem Einfluß der Erdschwere um eine im Raume und im Körper feste horizontale Achse dreht. Diese Bewegung ist einerseits besonders einfach, anderseits von fundamentaler Wichtigkeit, weil sie bei allen wirklichen Pendeln vorkommt. Einen so befestigten Körper nennt man zum Unterschiede von dem früher behandelten „mathematischen" ein „physisches Pendel". Als horizontale Drehungsachse wählen wir die y-Achse, die mit der η-Achse zusammenfalle. Die Bewegung geschieht dann in der xz-Ebene; die z-Achse ist positiv nach oben gerichtet (Fig. 114). Die ξ- und ζ-Achsen seien im Körper befestigt, und der Winkel zwischen der positiven ξ-Achse und der x-Achse werde durch α bezeichnet. Der Körperschwerpunkt sei S und habe den senkrechten Abstand s von der Rotationsachse. Die Beziehungen zwischen den beiden Koordinatensystemen sind, wenn durch $(x_\nu z_\nu)$ resp. $(\xi_\nu \zeta_\nu)$ die Koordinaten eines und desselben Punktes in beiden Systemen bezeichnet werden:

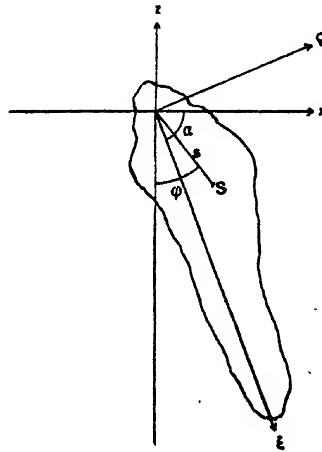


Fig. 114.

(1)
$$\begin{cases} x_\nu = \xi_\nu \cos\alpha - \zeta_\nu \sin\alpha, \\ z_\nu = \xi_\nu \sin\alpha + \zeta_\nu \cos\alpha; \end{cases}$$

die y-Koordinate ist stets gleich der η-Koordinate und nach Voraussetzung unveränderlich. Für eine beliebige Verrückung folgt aus (1):

(2)
$$\begin{cases} \delta x_\nu = (-\xi_\nu \sin\alpha - \zeta_\nu \cos\alpha)\delta\alpha = -z_\nu \cdot \delta\alpha, \\ \delta z_\nu = (\xi_\nu \cos\alpha - \zeta_\nu \sin\alpha)\delta\alpha = +x_\nu \cdot \delta\alpha; \end{cases}$$

fügen wir noch $\delta y_\nu = 0$ hinzu und setzen diese Werte in die Gleichung des d'Alembertschen Prinzips ein:

$$(3)\quad \sum_\nu \left\{\left(X_\nu - m_\nu \frac{d^2 x_\nu}{d t^2}\right)\delta x_\nu + \left(Y_\nu - m_\nu \frac{d^2 y_\nu}{d t^2}\right)\delta y_\nu + \left(Z_\nu - m_\nu \frac{d^2 z_\nu}{d t^2}\right)\delta z_\nu\right\} = 0,$$

so folgt, wenn wir noch $X_\nu = Y_\nu = 0$, $Z_\nu = -m_\nu g$ setzen, wie es dem Problem entspricht:

$$\sum_\nu \left(m_\nu \frac{d^2 x_\nu}{d t^2} z_\nu\right)\delta\alpha + \left(-m_\nu g - m_\nu \frac{d^2 z_\nu}{d t^2}\right) x_\nu \cdot \delta\alpha = 0,$$

oder, indem das konstante $\delta\alpha$ aus dem Summenzeichen herausgezogen wird:

$$\delta\alpha \cdot \sum_\nu \left\{m_\nu \left(\frac{d^2 x_\nu}{d t^2} z_\nu - \frac{d^2 z_\nu}{d t^2} x_\nu\right) - g m_\nu x_\nu\right\} = 0,$$

oder endlich:

$$(4)\quad \frac{d}{dt}\left\{\sum_\nu m_\nu \left(\frac{d x_\nu}{d t} z_\nu - \frac{d z_\nu}{d t} x_\nu\right)\right\} = g \sum_\nu m_\nu x_\nu .$$

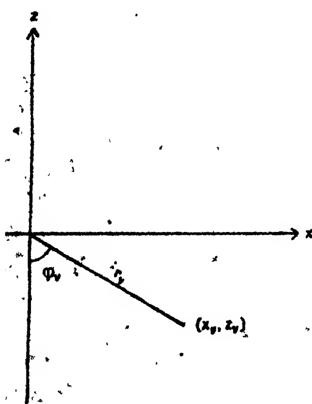


Fig. 115.

Dies ist die Bewegungsgleichung des physischen Pendels, mit der wir uns jetzt beschäftigen werden. Sie hätte natürlich auch durch geeignete Spezialisierung der allgemeinen Gleichungen (74) und (75) des vorigen Kapitels gewonnen werden können; doch ist der vorliegende Weg der einfachste. Führen wir in der xz-Ebene gemäß Fig. 115 Polarkoordinaten $(r_\nu\, \varphi_\nu)$ ein, so wird:

$$\frac{d x_\nu}{d t} z_\nu - \frac{d z_\nu}{d t} x_\nu = - r_\nu^2 \frac{d\varphi_\nu}{d t};$$

$\frac{d\varphi_\nu}{dt} = \omega$ ist die **Winkelgeschwindigkeit** um die y-Achse, die allen **Punkten gemeinsam** ist, also können wir Gleichung (4) schreiben:

$$-\frac{d}{dt}\sum_\nu m_\nu r_\nu^2 \cdot \frac{d\varphi_\nu}{dt} = -\frac{d}{dt}\left\{\omega \cdot \sum_\nu m_\nu r_\nu^2\right\} = g \sum_\nu m_\nu x_\nu,$$

oder, da für die Differentiation $\sum_\nu m_\nu r_\nu^2$, das Trägheitsmoment um die y-Achse, konstant ist:

$$\frac{d\omega}{dt} \cdot \sum_\nu m_\nu r_\nu^2 = -g \sum_\nu m_\nu x_\nu .$$

Die Form der rechten Seite legt die Einführung der x-Koordinate des Schwerpunktes nahe:

$$\mathfrak{x} \cdot \sum m_\nu = \mathfrak{x} \cdot M = \sum m_\nu x_\nu .$$

Bezeichnen wir den Winkel, den der Abstand s des Schwerpunktes von der Rotationsachse mit der negativen z-Richtung macht, durch φ, so ist offenbar:

$$\mathfrak{x} = s \cdot \sin\varphi; \quad \text{also} \quad \sum m_\nu x_\nu = M \cdot s \cdot \sin\varphi .$$

Da ferner der Schwerpunkt dieselbe Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung hat, wie jeder andere Punkt des starren Körpers, so ist

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d^2\varphi_\nu}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt},$$

und damit wird die Bewegungsgleichung, wenn wir noch das Trägheitsmoment um die y-Achse durch T_y bezeichnen:

(5) $$\mathsf{T}_y \frac{d^2\varphi}{dt^2} + g \cdot M \cdot s \cdot \sin\varphi = 0.$$

Um keine unnötigen Komplikationen hervorzurufen, beschränken wir auf so kleine Ablenkungswinkel φ, daß $\sin\varphi$ durch φ ersetzt werden darf; dann wird Gleichung (5):

$$\mathsf{T}_y \frac{d^2\varphi}{dt^2} + g \cdot M \cdot s \cdot \varphi = 0$$

oder:

(6) $$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{gM \cdot s}{\mathsf{T}_y} \cdot \varphi = 0.$$

Vergleicht man diese Formel mit derjenigen des mathematischen Pendels für kleine Amplituden (Gleichung (138) des dritten Kapitels auf pag. 150):

(7) $$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l} \cdot \varphi = 0,$$

so ergibt der Vergleich, daß das physische Pendel sich so verhält, wie ein mathematisches, dessen Länge

(8) $$l_r = \frac{\mathsf{T}_y}{Ms}$$

wäre. Diese Länge l_r nennt man die „reduzierte Länge"; durch ihre Bestimmung ist das Problem auf das bereits gelöste des mathematischen Pendels zurückgeführt. Diese sogenannte „Reduktion des physischen Pendels" verdankt man Chr. Huygens. Eine weitere Behandlung ist hier überflüssig. Man findet sofort für die Schwingungsdauer τ_0 des physischen Pendels:

(9) $$\tau_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\mathsf{T}_y}{gMs}} = 2\pi \sqrt{\frac{l_r}{g}}.$$

Der Ausdruck gMs hat einen besonderen Namen. Es stellt nach (5) $gMs \cdot \sin\varphi$ das Drehmoment der äußeren Kräfte, also der Schwere, dar; das maximale Drehmoment wird für $\varphi = \pi/_2$ erhalten und ist eben

gleich dem Ausdruck Mgs. Dieses maximale Drehmoment nennt man die „Direktionskraft" D. Also ist:

$$\tau_0 = 2\pi\sqrt{\frac{T_v}{D}}, \tag{9a}$$

in Worten: Die Schwingungsdauer eines physischen Pendels ist gleich der 2π-fachen Wurzel aus dem Quotienten: Trägheitsmoment um die Rotationsachse durch Direktionskraft.

In dieser allgemeinen Form ist Gleichung (9a) nicht auf das physische Pendel beschränkt, sondern gilt für alle Schwingungsvorgänge, die durch eine Gleichung nach Art der Gleichung (6) dargestellt werden, z. B. für die Schwingungen von Magnetstäben im magnetischen Erdfelde, oder eines gedrillten Drahtes, der an seinem freien Ende ein schweres Gewicht trägt, usw. Diese Gleichung kann auch zur experimentellen Bestimmung von Trägheitsmomenten benutzt werden. Zur Besprechung dieser Methode gehen wir jetzt über.

Es sei am unteren Ende eines vertikalen, sehr dünnen Drahtes ein irgendwie gestalteter Körper von der Masse M befestigt; derselbe kann dadurch zu Schwingungen um die vertikale Drahtachse veranlaßt werden, daß der Draht gedrillt und dann sich selbst überlassen wird. Die Schwingungen des befestigten schweren Körpers erfolgen dann, ebenso wie vorher, um eine im Raume und im Körper feste Achse, nur werden die äußeren Kräfte jetzt nicht durch die Schwere, sondern durch die elastischen Kräfte des Drahtes geliefert. Diese sind in weiten Grenzen unabhängig von der Belastung des Drahtes, d. h. von der Größe der angehängten Masse: also ändert sich die Größe der durch die elastischen Kräfte erzeugten Direktionskraft D nicht, wenn wir außer dem Körper M noch einen zweiten anhängen. Das ist der Vorzug dieser Anordnung vor dem gewöhnlichen Pendel, bei dem die Direktionskraft von der Masse abhängt. Nennen wir das zu bestimmende Trägheitsmoment des angehängten Körpers T (ein Index kann hier fortgelassen werden), so haben wir für die Schwingungsdauer τ_0 dieser Anordnung gemäß (9a):

$$\tau_0 = 2\pi\sqrt{\frac{T}{D}}. \tag{10}$$

Nunmehr fügen wir zu dem Körper M noch einen zweiten hinzu, dessen Trägheitsmoment T′ bekannt ist; wie das zu erreichen ist, wollen wir später besprechen. Da nach dem Vorhergehenden die Direktionskraft D dadurch nicht verändert wird, folgt für die neue Schwingungsdauer τ_1 des Systems:

$$\tau_1 = 2\pi\cdot\sqrt{\frac{T+T'}{D}}, \tag{11}$$

und durch Kombination von (10) und (11) ergibt sich sofort für das gesuchte Trägheitsmoment T:

(12) $$\mathsf{T} = \mathsf{T}' \cdot \frac{\tau_0^2}{\tau_1^2 - \tau_0^2}.$$

Da man Schwingungsdauern sehr genau bestimmen kann, ist die Methode großer Genauigkeit fähig. Es bleibt nur noch zu erörtern, wie man das Trägheitsmoment T', das bekannt sein muß, gewinnt. Dies kann durch Rechnung geschehen, wenn der hinzugefügte Körper eine regelmäßige geometrische Gestalt hat, und dies steht ja in unserer Gewalt. Nehmen wir z. B. an, der hinzugefügte Körper sei ein Kreiszylinder von der Höhe h und dem Radius R, der so — etwa mit Hilfe einer kleinen Schraube — an dem Körper M befestigt werde, daß er um seine Figurenachse als Rotationsachse schwingt. Bezeichnen wir (Fig. 116) den Abstand eines Massenelementes dm des Zylinders von der Rotationsachse mit r, so ist nach Definition des Trägheitsmomentes

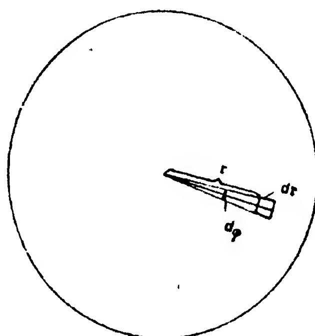


Fig. 116.

$$\mathsf{T}' = \int dm \cdot r^2,$$

wobei das Integral über den ganzen Zylinder zu erstrecken ist, oder, wenn wir in einer zur Rotationsachse senkrechten Ebene Polarkoordinaten (r, φ) einführen, so daß $dm = \varepsilon \cdot d\tau = \varepsilon \cdot h\, r\, d\, r\, d\varphi$ wird (ε soll das spezifische Gewicht bedeuten), so ist:

(13) $$\mathsf{T}' = \int_0^R \int_0^{2\pi} \varepsilon \cdot h\, r^3\, d\, r\, d\, \varphi,$$

wobei die Integration über φ von 0 bis 2π, über r von 0 bis R zu erstrecken ist. In dem meist vorliegenden Falle, daß die Dichte ε konstant ist, hat man nacheinander:

(14) $$\mathsf{T}' = \frac{\varepsilon h R^4}{4} 2\pi = \frac{\pi}{2} \varepsilon h \cdot R^2 \cdot R^2 = \frac{1}{2} M' R^2,$$

wenn mit M' die Masse des Zylinders bezeichnet wird. M' kann auf der Wage, R durch Längenmessung bestimmt werden, so daß T' in der Tat bekannt ist. Man ist natürlich nicht gezwungen, gerade einen Zylinder zu nehmen; sondern irgendein Körper, für den das Trägheitsmoment rechnerisch bequem feststellbar ist, tut denselben Dienst.

Der Einfachheit halber wollen wir gleich hier noch das Trägheitsmoment eines Hohlzylinders vom inneren Radius R_0 und dem äußeren Radius R angeben, wieder bezogen auf die Figurenachse. Man hat dann nur in Gleichung (13) die Integration über r statt von 0 bis R von R_0 bis R zu erstrecken:

$$\text{(14a)} \qquad T'_{\text{Hohlzylinder}} = \int_{R_0}^{R}\int_{0}^{2\pi} s \cdot h \cdot r^3 dr \cdot d\varphi = \frac{M''}{2}(R^2 + R_0^2).$$

Darin soll M'' die Masse des Hohlzylinders bedeuten; Gleichung (14a) werden wir in der nächsten Nummer benutzen können; in dieser werden wir erörtern, wie man mit Hilfe der Wage Trägheitsmomente bestimmen kann. Diese Methode hat zwar kaum praktische Bedeutung, liefert aber dafür einen guten Einblick in die physikalische Bedeutung von Trägheitsmomenten und erläutert überdies in einem einfachen Falle den Sinn des d'Alembertschen Prinzips.

81. Rollen eines Zylinders oder einer Kugel auf der schiefen Ebene; Bestimmung von Trägheitsmomenten mit der Wage.

Wir wollen einen Zylinder (Voll- oder Hohlzylinder) ohne Gleiten eine schiefe Ebene herabrollen lassen. Er dreht sich dabei um die durch den Schwerpunkt gehende Figurenachse als Rotationsachse; diese bleibt sonach im Körper fest, während sie sich im Raume — sich stets parallel

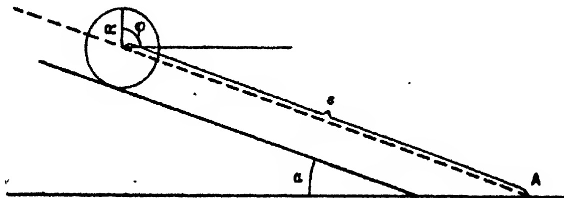


Fig. 117.

bleibend — verschiebt. In genau derselben Weise, nämlich um einen horizontalen Durchmesser als Rotationsachse, die sich stets parallel bleibt, kann man auch eine Kugel die schiefe Ebene herabrollen lassen. Mit einer derartigen Versuchsanordnung hat Galilei die Fallgesetze geprüft; die exakte Theorie dieser Methode ist also auch von historischem Interesse.

Wir werden zur Ableitung der Bewegungsgleichung die Lagrangeschen Gleichungen zweiter Art benutzen, haben also nur in den geeigneten Koordinaten die kinetische Energie L und die potentielle Energie Φ zu bilden.

Der Zylinder oder die Kugel habe den Radius R, das Trägheitsmoment um die oben charakterisierte Rotationsachse T, die Masse M; der Winkel der schiefen Ebene sei α. Die Fig. 117 stellt einen vertikalen Schnitt vor. Der Schwerpunkt und jeder andere Punkt der Achse beschreibt eine gerade Linie parallel der schiefen Ebene, wie die Fig. 117

zeigt, worin die Bahn eines Punktes gestrichelt ist. Man sieht nun sofort, daß alles bekannt ist, wenn erstens die Lage des Achsenpunktes auf dieser Geraden bekannt ist; wir können diese angeben durch das Stück s, um welches der Achsenpunkt noch von dem Schnittpunkte A seiner Bahnlinie mit der Horizontalen entfernt ist. Markieren wir ferner in der Ebene des Schnittes der Fig. 117 einen Radius in dem betrachteten Körper, und nennen etwa den Winkel, den derselbe mit der Horizontalen bildet, φ, so ist offenbar durch Angabe von s und φ alles bestimmt.

Nach den Ergebnissen der Nummer (75) besteht die kinetische Energie L aus zwei Teilen, der fortschreitenden Energie des Schwerpunktes, und der rotatorischen um den Schwerpunkt. Die erste hat offenbar den Wert $\frac{M}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$, da $\frac{ds}{dt}$ die Geschwindigkeit des Schwerpunktes ist; die rotatorische Energie hat, da $\frac{d\varphi}{dt}$ die Winkelgeschwindigkeit um die durch den Schwerpunkt der Rotationsachse ist, den Wert $\frac{1}{2}\mathsf{T}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$; also ist die kinetische Energie:

$$L = \frac{1}{2}M\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\mathsf{T}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2; \tag{15}$$

die potentielle Energie der Schwere ist offenbar einfach:

$$\Phi = Mgs \cdot \sin\alpha. \tag{16}$$

In (15) müssen wir noch eine Vereinfachung vornehmen, indem wir die Bedingung des Rollens einführen. Rollt der Schwerpunkt um das Stück ds längs der schiefen Ebene, so muß nach der Definition des Rollens ohne Gleiten (pag. 302) der auf der schiefen Ebene zurückgelegte Weg ds gleich dem Stücke des Zylinderumfanges sein, das zwischen den Berührungspunkten zu Anfang und zu Ende liegt; das ist aber gleich $Rd\varphi$, also ist hier die Bedingung des Rollens:

$$ds = R\,d\varphi,$$

oder:

$$\frac{ds}{dt} = R\frac{d\varphi}{dt}, \tag{17}$$

d. h. die „Umfangsgeschwindigkeit" $R\frac{d\varphi}{dt}$ ist gleich der Geschwindigkeit der fortschreitenden Bewegung des Schwerpunktes. Damit wird L aus (15):

$$L = \frac{M}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{\mathsf{T}}{R^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\left[M + \frac{\mathsf{T}}{R^2}\right]. \tag{18}$$

Wegen des Folgenden wollen wir noch den Wert der kinetischen Energie L' anmerken, der sich in dem Falle ergibt, daß die betreffenden Körper die schiefe Ebene nicht herabrollen, sondern herabgleiten. Dann ist offenbar der rotatorische Term gleich Null und es ist einfach:

(19) $$L' = \frac{1}{2} M \left(\frac{ds}{dt}\right)^2;$$

die potentielle Energie bleibt unverändert.

Die Lagrangeschen Gleichungen zweiter Art (Kapitel IV, Gleichung (93) auf pag. 224) werden in unserem Falle:

(20) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{ds}{dt}\right)}\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial s} = 0,$$

und das ergibt die Bewegungsgleichung:

(21) $$\left\{M + \frac{T}{R^2}\right\} \frac{d^2 s}{dt^2} + M g \sin\alpha = 0,$$

aus der wir sofort die Beschleunigung $\frac{d^2 s}{dt^2}$ des betrachteten Körpers längs der schiefen Ebene haben, die wir durch $\mathfrak{a}$ mit dem Index „roll" bezeichnen wollen:

(22) $$\mathfrak{a}_{roll} = -\frac{M}{M + \frac{T}{R^2}} g \sin\alpha .$$

Würde man anderseits statt L den Wert L' nach (19) zugrunde gelegt haben, so würde man für $\mathfrak{a}_{gleit}$ die Beschleunigung eines herabgleitenden Körpers erhalten haben:

(23) $$\mathfrak{a}_{gleit} = -g \sin\alpha .$$

Durch die Rollbewegung ist also die Beschleunigung im Verhältnis

(24) $$\frac{\mathfrak{a}_{roll}}{\mathfrak{a}_{gleit}} = \frac{M}{M + \frac{T}{R^2}}$$

verkleinert worden. Diesen Wert wollen wir für Vollzylinder, Hohlzylinder und Kugel berechnen.

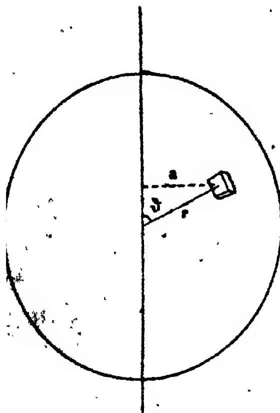


Fig. 118.

Das Trägheitsmoment eines Voll- und Hohlzylinders ist bereits in den Gleichungen (14) und (14a) angegeben worden. Es handelt sich also noch um die Berechnung des Trägheitsmomentes einer Kugel um einen Durchmesser als Achse. Nennen wir den senkrechten Abstand eines Massenelementes dm von der Rotationsachse a, die Entfernung vom Kugelzentrum r (Fig. 118), so ist das Trägheitsmoment

$$T = \int a^2 dm = \varepsilon \int a^2 d\tau,$$

wenn ε die Dichte, $d\tau$ ein Volumelement bedeutet. Drücken wir $d\tau$ durch

räumliche Polarkoordinaten (r, ϑ, φ) aus, wobei die Wahl der Winkel der Fig. 18 entspricht, so ist bekanntlich

$$d\tau = r^2 dr \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi;$$

da ferner $a = r \cdot \sin\vartheta$ ist, so folgt für das Trägheitsmoment der Kugel:

$$\mathsf{T}_{\text{Kugel}} = s \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^4 dr \sin^3\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi,$$

und das gibt ausgerechnet:

(25) $$\mathsf{T}_{\text{Kugel}} = \tfrac{2}{5} \cdot \tfrac{4}{3} \pi s R^5 = \tfrac{2}{5} M R^2,$$

wenn M die Masse der Kugel ist. Nach (14) ist für den Zylinder das Trägheitsmoment:

(26) $$\mathsf{T}_{\text{Zyl.}} \tfrac{1}{2} M R^2,$$

und wenn wir in Formel (14a) den Hohlzylinder sehr dünn, wir wollen sagen als einen „Ring", nehmen, so ist R sehr nahe gleich R_0, und das liefert dann:

(27) $$\mathsf{T}_{\text{Ring}} = M R^2.$$

Nach (25), (26) und (27) ist für die genannten drei Körper das Verhältnis $\frac{\mathfrak{a}_{\text{roll}}}{\mathfrak{a}_{\text{gleit}}}$:

(28) $$\begin{cases} \text{für den Zylinder: } {}^2/_3, \\ \text{für den Ring } {}^1/_2, \\ \text{für die Kugel: } {}^5/_7. \end{cases}$$

Diese Folgerungen lassen sich an der Fallrinne leicht prüfen, bequemer aber noch ist die folgende Anordnung. Läßt man in einer großen hohlen Halbkugel vom Radius l der Reihe nach Zylinder, Ring, Kugel rollen, so stellt diese Anordnung ein mathematisches Pendel dar, und man kann daher, wenn g bekannt ist, aus der Schwingungsdauer τ den Kugelradius l bestimmen. Nur darf man nicht die gewöhnliche Formel für die Schwingungsdauer eines mathematischen Pendels

$$\tau_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

zugrunde legen, sondern muß berücksichtigen, daß die Beschleunigung bei dieser Anordnung nicht g, sondern g multipliziert mit einem der Werte aus (28) ist. Wir haben also in der Formel des gewöhnlichen mathematischen Pendels an Stelle von g, das ja die Beschleunigung beim Gleiten angibt, die mit den entsprechenden Verhältnissen (28) multiplizierten Werte zu setzen. Man erhält so für den Zylinder eine Schwingungsdauer τ':

$$\tau' = 2\pi \sqrt{\frac{l}{(\frac{2}{3} g)}},$$

für den Ring entsprechend:

$$\tau'' = 2\pi\sqrt{\frac{l}{(\frac{2}{3}g)}},$$

und für die Kugel endlich:

$$\tau''' = 2\pi\sqrt{\frac{l}{(\frac{5}{7}g)}}.$$

Dann findet man aus allen drei Formeln den nämlichen Wert von l, womit die Richtigkeit derselben erwiesen ist.

Diese einfachen Versuche stellen die schon früher charakterisierte Natur des Trägheitsmomentes in das rechte Licht: was die Masse für die Translationsbewegung, ist das Trägheitsmoment für die Rotationsbewegung. Um dies noch besser hervortreten zu lassen, sind in der folgenden Tabelle sich entsprechende Größen bei beiden Bewegungsarten einander gegenübergestellt.

Translation	Rotation
Geschwindigkeit	Winkelgeschwindigkeit
Beschleunigung	Winkelbeschleunigung
Masse	Trägheitsmoment
Kraft = Masse × Beschleunigung	Drehmoment = Trägheitsmoment × Winkelbeschleunigung
Kinetische Energie der fortschreitenden Bewegung = $^1/_2$ Masse × Quadrat der Geschwindigkeit	Kinetische Energie der Rotationsbewegung = $^1/_2$ Trägheitsmoment × Quadrat der Winkelgeschwindigkeit
u. s. w.	u. s. w.

Die Versuche mit der schiefen Ebene bilden auch ein Mittel, Trägheitsmomente mit der Wage zu bestimmen. Man denke sich die schiefe Ebene auf die eine Seite einer großen Wage gebracht, und diese äquilibriert. Dann bringt man auch den Körper, der die schiefe Ebene herabrollen oder herabgleiten soll, auf die schiefe Ebene, indem man ihn durch einen dünnen Faden an dem oberen Ende der schiefen Ebene befestigt; die Wage wird wieder äquilibriert. Wir wollen den Körper zunächst herabgleiten lassen, also mit der Beschleunigung $-g \sin a$ parallel der schiefen Ebene. Dann kann während des Gleitens die Wage nicht im Gleichgewichte bleiben, da jetzt noch eine d'Alembertsche Trägheitskraft $+Mg \sin a$ entgegengesetzt der Beschleunigung wirksam ist, deren vertikal nach oben gerichtete Komponente $+Mg \sin^2 a$ ist. Gleitet also der Körper nach unten, so hebt sich diese Seite der Wage, da sie scheinbar um die Masse $M \sin^2 a$ erleichtert ist. Man kann sie also während des beschleunigten Gleitens wieder ins Gleichgewicht bringen durch Auflegen der Masse $M \sin^2 a$. Lassen wir nun denselben Körper rollen, so ist seine Beschleunigung parallel der schiefen Ebene nach (22) gleich $-g \frac{M}{M + \frac{T}{R^2}} \sin a$, also ist die d'Alembertsche Träg-

heitskraft gleich $+Mg\dfrac{M\sin\alpha}{M+\frac{T}{R^2}}$, und deren senkrechte Komponente $+Mg\dfrac{M}{M+\frac{T}{R^2}}\sin^2\alpha$. Während des Rollens muß jetzt, um die Wage im Gleichgewicht zu halten, eine Zusatzmasse $M\cdot\dfrac{M}{M+\frac{T}{R^2}}\sin^2\alpha$ aufgelegt werden. Das Verhältnis der in beiden Fällen aufzulegenden Zusatzmassen ist also $\dfrac{M}{M+\frac{T}{R^2}}$, woraus, wenn M und R bekannt sind, sich sofort das Trägheitsmoment ergibt.

Natürlich hat die Methode kaum praktische Bedeutung; sie erläutert aber den Sinn des d'Alembertschen Prinzips in einem einfachen Falle und zeigt wieder die Analogie zwischen Trägheitsmoment und Masse.

82. Mechanische Bedeutung der Deviationsmomente; ihr Nachweis mit der Wage.

Die mechanische Bedeutung der Deviationsmomente U_ξ, U_η, U_ζ zu erörtern sind wir ebenfalls jetzt in der Lage, nachdem wir die allgemeinen Bewegungsgleichungen in der Form (74) des vorigen Kapitels (pag. 369) besitzen.

Wir wollen zu diesem Zwecke nach den Bedingungen fragen, unter denen folgende möglichst einfache Bewegungsform des starren Körpers eintreten kann: die ξ-Achse falle dauernd mit der x-Achse zusammen, d. h. der Körper führe um die ξ-Achse eine Rotation, und zwar mit der Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\pi}{dt}=\omega$ aus, die wir der Einfachheit halber als konstant annehmen wollen. Welche Kräfte und Momente müssen wirken, damit diese Bewegung realisiert werden kann?

Die Anfangspunkte des (x, y, z)-Systems und des (ξ, η, ζ)-Systems fallen zusammen, und zwar in dem festgehaltenen Punkte des starren Körpers, oder, falls letzterer völlig frei ist, in seinem Schwerpunkte; im übrigen aber sei die Richtung der ξ-, η-, ζ-Achsen noch willkürlich.

Gemäß ihrer Bedeutung als Richtungskosinusse nehmen die $\alpha_1 \ldots \gamma_3$, die das (ξ, η, ζ)-System festlegen, folgende speziellen Werte bei der supponierten Bewegung an:

$$(29)\qquad \begin{cases} \alpha_1 = 1; & \alpha_2 = 0; & \alpha_3 = 0; \\ \beta_1 = 0; & \beta_2 = \cos\delta; & \beta_3 = -\sin\delta; \\ \gamma_1 = 0; & \gamma_2 = +\sin\delta; & \gamma_3 = +\cos\delta. \end{cases}$$

Dabei ist der variable Winkel zwischen der y-Achse und η-Achse durch δ bezeichnet. Dadurch werden die Rotationskomponenten nach den Gleichungen (52) des VI. Kapitels auf pag. 331:

$$(30)\qquad \frac{d\pi}{dt} = \frac{d\delta}{dt}, \quad \frac{d\chi}{dt} = 0, \quad \frac{d\varrho}{dt} = 0$$

Mit diesen Vereinfachungen wird (74) des vorigen Kapitels (pag. 369) unter Benutzung von (75) desselben Kapitels:

$$(31)\quad \begin{cases} \mathfrak{M}_\xi = \mathsf{T}_\xi \dfrac{d^2\delta}{dt} = \mathsf{T}_\xi \dfrac{d^2\pi}{dt} = \mathsf{T}_\xi \dfrac{d\omega}{dt}, \\ \mathfrak{M}_\eta \cos\delta - \mathfrak{M}_\zeta \sin\delta = \dfrac{d}{dt}\left[\sin\delta \dfrac{d\delta}{dt} U_\eta - \cos\delta \dfrac{d\delta}{dt} U_\zeta\right], \\ \mathfrak{M}_\eta \sin\delta + \mathfrak{M}_\zeta \cos\delta = \dfrac{d}{dt}\left[-\cos\delta \dfrac{d\delta}{dt} U_\eta - \sin\delta \dfrac{d\delta}{dt} U_\zeta\right]. \end{cases}$$

Da $\omega = \frac{d\pi}{dt} = \frac{d\delta}{dt}$ konstant sein soll, so folgt aus der ersten dieser Gleichungen:

$$\mathfrak{M}_\xi = 0,$$

und für δ der Wert:

$$\delta = \omega t.$$

Führen wir diesen ein und differentiieren rechts aus, so ergibt sich

$$(32)\quad \begin{cases} \mathfrak{M}_\eta \cos\omega t - \mathfrak{M}_\zeta \sin\omega t = \omega^2 \cos\omega t\, U_\eta + \omega^2 \sin\omega t\, U_\zeta, \\ \mathfrak{M}_\eta \sin\omega t + \mathfrak{M}_\zeta \cos\omega t = \omega^2 \sin\omega t\, U_\eta - \omega^2 \cos\omega t\, U_\zeta, \end{cases}$$

oder wenn man nach $\mathfrak{M}_\eta$, $\mathfrak{M}_\zeta$ auflöst:

$$(33)\quad \begin{cases} \mathfrak{M}_\eta = \omega^2 \cdot U_\eta, \\ \mathfrak{M}_\zeta = -\omega^2 \cdot U_\zeta. \end{cases}$$

Damit ist die gestellte Frage beantwortet: Zur Erzeugung der vorgeschriebenen Bewegung muß das Rotationsmoment $\mathfrak{M}_\xi$ um die Rotationsachse gleich Null sein, während die Rotationsmomente um die η- resp. ζ-Achse abgesehen vom Vorzeichen resp. gleich den mit dem Quadrate der Winkelgeschwindigkeit multiplizierten Deviationsmomenten um diese Achsen sind.

Die mechanische Bedeutung der Deviationsmomente ist also die, daß sie, mit dem Quadrate der Winkelgeschwindigkeit multipliziert, Drehmomente darstellen. Und zwar sind die Größen $\omega^2 U_\eta$ und $\omega^2 U_\zeta$ abgesehen vom Vorzeichen die Drehmomente der auf jeden Massenpunkt des starren Körpers „wirkenden" Zentrifugalkraft. Daß diese hier auftritt, ist ja selbstverständlich, da wir jetzt ein mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die ξ-Achse rotierendes Bezugssystem benutzt haben. Die Zentrifugalkraft hat für den ν^{ten} Massenpunkt den Wert:

$$(34)\quad \mathfrak{C}_\nu = m_\nu R_\nu \omega^2 = m_\nu \omega^2 \sqrt{\eta_\nu^2 + \zeta_\nu^2},$$

wenn $R_\nu = \sqrt{\eta_\nu^2 + \zeta_\nu^2}$ den Abstand des Massenpunktes m_ν von der Rotations-, also von der ξ-Achse bedeutet. Für die Komponenten der Zentrifugalkraft nach den η- und ζ-Achsen folgt, da dieselbe stets radial und parallel der $\eta\zeta$-Ebene wirkt.

$$(35)\quad \Xi_\nu = 0; \quad \mathsf{H}_\nu = \frac{\mathfrak{C}_\nu \eta_\nu}{R_\nu} = m_\nu \omega^2 \eta_\nu; \quad \mathsf{Z}_\nu = m_\nu \omega^2 \zeta_\nu.$$

Also erhalten wir für die Komponenten des Drehmomentes in Bezug auf die Achsen:

$$(36)\quad \begin{cases} \mathsf{Z}_\nu \eta_\nu - \mathsf{H}_\nu \zeta_\nu = m_\nu \omega^2 \zeta_\nu \eta_\nu - m_\nu \omega^2 \eta_\nu \zeta_\nu = 0\,, \\ \Xi_\nu \zeta_\nu - \mathsf{Z}_\nu \xi_\nu = - m_\nu \omega^2 \zeta_\nu \xi_\nu\,, \\ \mathsf{H}_\nu \xi_\nu - \Xi_\nu \eta_\nu = + m_\nu \omega^2 \eta_\nu \xi_\nu\,. \end{cases}$$

Also, wenn wir über sämtliche Massen summieren, erhalten wir für die Komponenten des gesamten Drehmomentes der Zentrifugalkräfte:

$$(37)\quad \begin{cases} \sum(\mathsf{Z}_\nu \eta_\nu - \mathsf{H}_\nu \zeta_\nu) = 0\,, \\ \sum(\Xi_\nu \zeta_\nu - \mathsf{Z}_\nu \xi_\nu) = - \omega^2 \sum m_\nu \zeta_\nu \xi_\nu = - \omega^2 U_\eta\,, \\ \sum(\mathsf{H}_\nu \xi_\nu - \Xi_\nu \eta_\nu) = + \omega \sum m_\nu \xi_\nu \eta_\nu = + \omega^2 U_\zeta\,, \end{cases}$$

womit tatsächlich unsere obige Behauptung bewiesen ist. Diesen Drehmomenten muß das Gleichgewicht gehalten werden durch geeignete, von den expliziten Kräften hervorgebrachte Momente $\mathfrak{M}_\eta$ und $\mathfrak{M}_\zeta$ gemäß Gl. (33). Was ist nun die Wirkung eines Drehmomentes $-\omega U_\eta$ um die η-Achse? Doch offenbar die, den Körper um die η-Achse zu drehen; also mit anderen Worten, die ξ-Achse aus ihrer Anfangslage zu verdrehen; ebenso ist es mit dem anderen Drehmoment $\omega^2 U_\zeta$. Würden also die Momente $-\omega^2 U_\eta$ und $+\omega^2 U_\zeta$ der sogenannten Zentrifugalkräfte nicht in jedem Momente durch die von passend angebrachten äußeren Kräften erzeugten Momente $\mathfrak{M}_\eta$ und $\mathfrak{M}_\zeta$ äquilibriert, so könnte die vorausgesetzte Bewegung um die ξ-Achse nicht dauernd stattfinden; die Momente $-\omega^2 U_\eta$ und $+\omega^2 U_\zeta$ haben ja das Bestreben, die ξ-Achse, d. h. die Rotationsachse, zu verdrehen. Daher erklärt sich der Name „Deviationsmomente".

Die Momente der äußeren Kräfte $\mathfrak{M}_\xi$ und $\mathfrak{M}_\eta$ werden am einfachsten hervorgebracht durch ein festes Lager, in dem die ξ-Achse gehalten wird; wird dasselbe entfernt, so ändert sich die Bewegung total. Nur in einem Falle nicht, nämlich dann, wenn die Deviationsmomente U_η und U_ζ verschwinden, d. h. wenn die Rotationsachse mit einer Hauptträgheitsachse des Körpers zusammenfällt. In diesem Falle bleibt die Rotationsachse erhalten: sie ist eine sogenannte „freie" oder „kräftefreie" Achse. Eine beliebige Achse muß in zwei Punkten gehalten werden, damit eine dauernde Rotation um dieselbe erfolgen kann; von einer kräftefreien Achse dagegen braucht höchstens ein Punkt festgehalten zu werden: sie geht ja durch den festgehaltenen Punkt des starren Körpers hindurch, und in dem Falle, daß die kräftefreie Achse durch den Schwerpunkt des starren Körpers geht, braucht kein Punkt gehalten zu werden Die freien Achsen durch den Schwerpunkt heißen daher die „natürlichen freien Achsen" des Körpers.

Man kann sich leicht klar machen, daß man Deviationsmomente mit der Wage nachweisen kann. Wir bringen dazu einen Körper, der um eine Achse gleichmäßig rotieren soll, zunächst im Ruhezustand

mit den beiden Enden der Achse auf je eine Wagschale, und zwar so, daß die Rotationsachse parallel dem Wagebalken liegt, und äquilibrieren die Wage. Wenn dann der Körper gleichmäßig rotiert, so müssen auf die Wage noch die bei der Rotation auftretenden Zentrifugalkräfte wirken, die nach dem Vorhergehenden den Deviationsmomenten proportionale Drehmomente ausüben; also wird die Wage unter dem Einfluß derselben in erzwungene Schwingungen geraten — außer eben in dem Falle, daß die Rotationsachse eine Hauptträgheitsachse ist —, und aus diesen erzwungenen Schwingungen lassen sich Schlüsse auf die Größe der Deviationsmomente ziehen. Wir begnügen uns mit dieser Andeutung, da die exakte Lösung der hier auftretenden Differentialgleichung ziemlich kompliziert ist.[1])

33. Kräftefreie Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt.

Wir wollen jetzt einen Körper, der in einem beliebigen Punkte S befestigt sei, irgendwie in Rotation versetzen und dann sich selbst überlassen; der weitere Verlauf der Bewegung, der ohne Einwirkung von Kräften vor sich geht, ist zu untersuchen. Einen Körper, der in einem Punkte fest ist, nennt man einen „Kreisel". Es ist bei unserem Problem statthaft, auf einen Kreisel die Schwere wirken zu lassen, die ja einer einzigen im Schwerpunkt angreifenden Kraft äquivalent ist; nur muß in diesem Falle der Schwerpunkt des Kreisels der festgehaltene Punkt sein. Auch dann ist er nämlich kräftefrei, da die Resultante der Schwere durch die zum Festhalten des Schwerpunktes nötige Kraft kompensiert wird.

Wir benutzen zu diesem Zwecke die Eulerschen Gleichungen, indem wir das (ξ, η, ζ)-System mit dem Anfangspunkte in den festen Punkt S des starren Körpers legen und die Richtungen resp. mit den Hauptträgheitsachsen durch diesen Punkt zusammenfallen lassen. Die Momente $\mathfrak{M}_\xi$, $\mathfrak{M}_\eta$, $\mathfrak{M}_\zeta$ verschwinden dann nach den Bedingungen des Problems, und die Gleichungen (76) und (77) des vorigen Kapitels auf pag. 370 werden:

$$(38)\qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left[A\alpha_1 \dfrac{d\pi}{dt} + B\alpha_2 \dfrac{d\chi}{dt} + C\alpha_3 \dfrac{d\varrho}{dt}\right] = 0, \\[2ex] \dfrac{d}{dt}\left[A\beta_1 \dfrac{d\pi}{dt} + B\beta_2 \dfrac{d\chi}{dt} + C\beta_3 \dfrac{d\varrho}{dt}\right] = 0, \\[2ex] \dfrac{d}{dt}\left[A\gamma_1 \dfrac{d\pi}{dt} + B\gamma_2 \dfrac{d\chi}{dt} + C\gamma_3 \dfrac{d\varrho}{dt}\right] = 0, \end{cases}$$

und:

$$(39)\qquad \begin{cases} A\dfrac{d^2\pi}{dt^2} + (C - B)\dfrac{d\chi}{dt}\,\dfrac{d\varrho}{dt} = 0, \\[2ex] B\dfrac{d^2\chi}{dt^2} + (A - C)\dfrac{d\varrho}{dt}\,\dfrac{d\pi}{dt} = 0, \\[2ex] C\dfrac{d^2\varrho}{dt^2} + (B - A)\dfrac{d\pi}{dt}\,\dfrac{d\chi}{dt} = 0. \end{cases}$$

[1]) Vgl. G. Hamel, Elementare Mechanik, pag. [illegible].

Beide Gleichungstripel sagen nach den Auseinandersetzungen des vorigen Kapitels die Erhaltung des Rotationsmomentes der Bewegung aus, oder anders ausgedrückt: die Konstanz des Drehimpulses. Ferner sieht man leicht ein (da ja keine Kräfte wirken), daß das System seine anfängliche Energie unverändert beibehalten muß.

Beschäftigen wir uns nun genauer mit den Gleichungen (39). Erweitert man dieselben resp. mit $\frac{d\pi}{dt}$, $\frac{d\chi}{dt}$, $\frac{d\varrho}{dt}$ und addiert, so folgt:

$$A\frac{d^2\pi}{dt^2}\frac{d\pi}{dt} + B\frac{d^2\chi}{dt^2}\frac{d\chi}{dt} + C\frac{d^2\varrho}{dt^2}\frac{d\varrho}{dt} = 0,$$

oder:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[A\left(\frac{d\pi}{dt}\right)^2 + B\left(\frac{d\chi}{dt}\right)^2 + C\left(\frac{d\varrho}{dt}\right)^2\right] = 0,$$

oder endlich:

$$A\left(\frac{d\pi}{dt}\right)^2 + B\left(\frac{d\chi}{dt}\right)^2 + C\left(\frac{d\varrho}{dt}\right)^2 = 2E_0; \tag{40}$$

dieser Satz ist die analytische Formulierung des Energieprinzips, wie ein Vergleich mit Formel (86) des vorigen Kapitels auf pag. 380 zeigt; die linke Seite ist gleich der doppelten Energie (die hier gleich der kinetischen ist). Multiplizieren wir anderseits (39) mit resp. $A\frac{d\pi}{dt}$, $B\frac{d\chi}{dt}$, $C\frac{d\varrho}{dt}$ und addieren, so folgt:

$$A^2\frac{d^2\pi}{dt^2}\frac{d\pi}{dt} + B^2\frac{d^2\chi}{dt^2}\frac{d\chi}{dt} + C^2\frac{d^2\varrho}{dt^2}\frac{d\varrho}{dt} = 0,$$

oder:

$$A^2\left(\frac{d\pi}{dt}\right)^2 + B^2\left(\frac{d\chi}{dt}\right)^2 + C^2\left(\frac{d\varrho}{dt}\right)^2 = U_0^2. \tag{41}$$

Ferner ergeben die Gleichungen (38) sofort:

$$\left\{\begin{aligned} A\alpha_1\frac{d\pi}{dt} + B\alpha_2\frac{d\chi}{dt} + C\alpha_3\frac{d\varrho}{dt} &= k_1,\\ A\beta_1\frac{d\pi}{dt} + B\beta_2\frac{d\chi}{dt} + C\beta_3\frac{d\varrho}{dt} &= k_2,\\ A\gamma_1\frac{d\pi}{dt} + B\gamma_2\frac{d\chi}{dt} + C\gamma_3\frac{d\varrho}{dt} &= k_3,\end{aligned}\right. \tag{42}$$

wo k_1, k_2, k_3 drei Konstanten mit leicht erkennbarer Bedeutung sind Die Gleichungen (42) stellen ja den Satz von der Erhaltung des Rotationsmomentes der Bewegung dar; k_1, k_2, k_3 sind also die Komponenten dieses Momentes nach den im Raume festen (x, y, z)-Achsen. Oder anders ausgedrückt: k_1, k_2, k_3 sind die x-, y-, z-Komponenten des Drehimpulses $\mathfrak{U}_0$ der Drehimpuls ist also nach Größe und Richtung im Raume konstant, wie schon oben hervorgehoben.

Man erkennt leicht, daß die Konstanten k_1, k_2, k_3 in engem Zusammenhang mit U_0^2 stehen. Denn quadriert man die Gleichungen (42

und addiert sie, so folgt unter Beachtung der Relationen, die zwischen den $\alpha_1 \ldots \gamma_3$ wegen ihrer Natur als Richtungskosinusse bestehen, sofort:

$$A^2\left(\frac{d\pi}{dt}\right)^2 + B^2\left(\frac{d\chi}{dt}\right)^2 + C^2\left(\frac{d\varrho}{dt}\right)^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2, \tag{43}$$

und der Vergleich mit (41) liefert sogleich:

$$k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = U_0^2. \tag{44}$$

U_0 ist also der absolute Betrag des Drehimpulsvektors $\mathfrak{U}_0$, dessen Richtung im Raume durch die drei Richtungskosinusse

$$\frac{k_1}{U_0}, \quad \frac{k_2}{U_0}, \quad \frac{k_3}{U_0} \tag{45}$$

gegeben ist. Diese drei Richtungskosinusse bestimmen auch natürlich die zum Drehimpuls senkrechte, durch den Koordinatenanfangspunkt gehende Ebene, die nichts anderes als die invariable Ebene des Systems ist. Anderseits folgt aus (41) sofort, daß die Richtung des Drehimpulses gegen das bewegliche System (ξ, η, ζ) durch resp. die Richtungskosinusse

$$\frac{A\frac{d\pi}{dt}}{U_0}, \quad \frac{B\frac{d\chi}{dt}}{U_0}, \quad \frac{C\frac{d\varrho}{dt}}{U_0} \tag{46}$$

definiert wird. Dies folgt auch mit Hilfe von (42), wenn man bedenkt, daß der Drehimpuls ein von der Richtung des Koordinatensystems unabhängiger Vektor ist, daß er sich also auf ein anderes Koordinatensystem transformiert, wie die Koordinaten selbst und z. B. die Kräfte. Erweitert man die Gleichungen (42) z. B. resp. mit $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ und addiert, so folgt sofort:

$$A\frac{d\pi}{dt} = k_1\alpha_1 + k_2\beta_2 + k_3\gamma_1,$$

und die rechte Seite ist nach der obigen Auseinandersetzung die ξ-Komponente des Drehimpulses $(=\mathfrak{U}_\xi)$, woraus das Behauptete folgt.

In speziellen Fällen läßt sich nun schon der Charakter der Bewegung überblicken: Nehmen wir z. B. an, für den betrachteten festen Punkt des starren Körpers seien alle drei Hauptträgheitsmomente untereinander gleich, $A = B = C$; das ist z. B. der Fall für den Mittelpunkt einer homogenen Kugel, weshalb ein so beschaffener Kreisel ein „Kugelkreisel" genannt wird. Aus den Eulerschen Gleichungen (39) folgt in diesem Falle sofort, daß die Rotationskomponenten um die ξ-, η-, ζ-Achsen, $\frac{d\pi}{dt}$, $\frac{d\chi}{dt}$, $\frac{d\varrho}{dt}$, zeitlich konstant sein müssen, daß also die Rotation mit konstanter Winkelgeschwindigkeit vom Betrage $\omega = \sqrt{\left(\frac{d\pi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\chi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\varrho}{dt}\right)^2}$ erfolgt. Ferner sieht man, daß die Richtung der Rotationsachse im

Körper fest ist, da ihre Richtungskosinusse gegen das (ξ, η, ζ)-System, $\dfrac{\frac{d\pi}{dt}, \frac{d\chi}{dt}, \frac{d\varrho}{dt}}{\omega}$ alle konstant sind. Ferner ist nach (46) der Drehimpuls, der beim kräftefreien Kreisel im Raume stets nach Größe und Richtung konstant ist, auch im Körper konstant, und seine Richtung fällt, ebenfalls nach (46), mit der der Rotationsachse zusammen. Also hat auch die Rotationsachse im Raume eine konstante Richtung. Die Bewegung ist also folgende: Der Körper dreht sich um eine im Raume und im Körper feste Achse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit; die Richtung der Rotationsachse stimmt überein mit der Richtung des Drehimpulses. Die Bestimmung der Eulerschen Winkel ϑ, φ, ψ ist in diesem einfachsten Falle fast trivial; doch wollen wir sie durchführen, um die Methode zu erläutern, die wir auch in komplizierteren Fällen anwenden werden. Wir wollen zunächst das (x, y, z)-System uns bequem legen, nämlich so, daß seine xy-Ebene mit der invariablen Ebene, die z-Achse mit der Richtung des Drehimpulses zusammenfällt. Dann vereinfacht sich (42) folgendermaßen:

$$(47)\qquad \begin{cases} A\,\alpha_1 \dfrac{d\pi}{dt} + B\,\alpha_2 \dfrac{d\chi}{dt} + C\,\alpha_3 \dfrac{d\varrho}{dt} = 0, \\ A\,\beta_1 \dfrac{d\pi}{dt} + B\,\beta_2 \dfrac{d\chi}{dt} + C\,\beta_3 \dfrac{d\varrho}{dt} = 0, \\ A\,\gamma_1 \dfrac{d\pi}{dt} + B\,\gamma_2 \dfrac{d\chi}{dt} + C\,\gamma_3 \dfrac{d\varrho}{dt} = k_3. \end{cases}$$

Spezialisieren wir diese Gleichung auf unser augenblickliches Problem, und setzen die Anfangswerte der Rotationskomponenten resp. gleich $\dot\pi_0$, $\dot\chi_0$, $\dot\varrho_0$ (die dauernd bestehen bleiben), so ist:

$$(48)\qquad \begin{cases} \alpha_1 \dot\pi_0 + \alpha_2 \dot\chi_0 + \alpha_3 \dot\varrho_0 = 0, \\ \beta_1 \dot\pi_0 + \beta_2 \dot\chi_0 + \beta_2 \dot\varrho_0 = 0, \\ \gamma_1 \dot\pi_0 + \gamma_2 \dot\chi_0 + \gamma_3 \dot\varrho_0 = \dfrac{k_3}{A}. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen folgt leicht, indem man z. B. mit α_1, β_1, γ_1 erweitert und addiert:

$$\dot\pi_0 = \frac{k_3}{A}\gamma_1,$$

oder:

$$\gamma_1 = \frac{A\,\dot\pi_0}{k_3},$$

und ähnlich für die Werte γ_2 und γ_3. Berücksichtigt man ferner, daß für unseren Fall nach (43)

$$k_3^2 = A^2\left[\left(\frac{d\pi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\chi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\varrho}{dt}\right)^2\right] = A^2\omega^2,$$

also $k_3 = A\omega$ ist, so erhalten wir aus (48) die drei Werte:

$$(49)\qquad \begin{cases} \gamma_1 = \dfrac{\dot{\pi}_0}{\omega}, \\ \gamma_2 = \dfrac{\dot{\chi}_0}{\omega}, \\ \gamma_3 = \dfrac{\dot{\varrho}_0}{\omega}, \end{cases}$$

und diese liefern, wenn wir die Gleichungen (59) des VI. Kapitels auf pag. 337 heranziehen, die die Richtungskosinusse $\alpha_1 \ldots \gamma_3$ durch die Eulerschen Winkel ausdrücken:

$$(50)\qquad \begin{cases} \gamma_1 = \sin\psi \sin\vartheta = \dfrac{\dot{\pi}_0}{\omega}, \\ \gamma_2 = \cos\psi \sin\vartheta = \dfrac{\dot{\chi}_0}{\omega}, \\ \gamma_3 = \cos\vartheta \qquad\quad = \dfrac{\dot{\varrho}_0}{\omega}. \end{cases}$$

Die beiden ersten Gleichungen (50) liefern:

$$(51\,a)\qquad \operatorname{tang}\psi = \frac{\dot{\pi}_0}{\dot{\chi}_0},$$

die letzte:

$$(51\,b)\qquad \cos\vartheta = \frac{\dot{\varrho}_0}{\omega};$$

der dritte Eulersche Winkel ergibt sich aus der letzten Gleichung (61) des VI. Kapitels auf pag. 338, die hier lautet:

$$\dot{\varrho}_0 = \cos\vartheta \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\dot{\varrho}_0}{\omega} \frac{d\varphi}{dt};$$

also wird:

$$(51\,c)\qquad \varphi = \omega(t - t_0),$$

wo t_0 eine Integrationskonstante ist. Die den Winkeln ψ und ϑ noch anhaftende Unbestimmtheit wird beseitigt durch Hinzunahme der Anfangsbedingungen; mit ihrer Hilfe bestimmen die drei Gleichungen (51) die Lage des Körpers vollständig: die Winkel ψ und ϑ behalten ihre konstanten Anfangswerte bei, φ ändert sich proportional der Zeit; d. h. also nach den allgemeinen Auseinandersetzungen über die Bedeutung der Eulerschen Winkel in Nummer 72, daß sich der Körper mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\omega = \sqrt{\dot{\pi}_0^2 + \dot{\chi}_0^2 + \dot{\varrho}_0^2}$ um die im Raume und im Körper feste z-Achse (gleichzeitig die Richtung des Drehimpulses) dreht, was wir oben bereits erkannten.

Wir wollen nun wieder allgemein weiter gehen und uns geometrisch einige Züge der Bewegung klar machen. Zu diesem Zwecke gehen wir von einer geometrischen Deutung der beiden Gleichungen (40) und (41) aus. Betrachten wir nämlich $\frac{d\pi}{dt}$, $\frac{d\chi}{dt}$, $\frac{d\varrho}{dt}$ als kartesische Koordinaten ξ, η, ζ eines Punktes, so stellen (40) und (41) zwei konzentrische Ellipsoide dar, die auf ihre Hauptachsen bezogen sind. Man hat dann die

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 = 2E_0, \tag{40a}$$

und:

$$A^2\xi^2 + B^2\eta^2 + C^2\zeta^2 = U_0^2. \tag{41a}$$

Die Halbachsen des ersten Ellipsoides, das wir das E_0-Ellipsoid nennen wollen, sind resp.

$$\sqrt{\frac{2E_0}{A}} \leqq \sqrt{\frac{2E_0}{B}} \leqq \sqrt{\frac{2E_0}{C}}; \tag{52}$$

die des zweiten Ellipsoides, das U_0-Ellipsoid heiße:

$$\frac{U_0}{A} \leqq \frac{U_0}{B} \leqq \frac{U_0}{C}, \tag{53}$$

wenn wir ein für allemal die Bezeichnung A, B, C der Hauptträgheitsmomente so wählen, daß

$$A \geqq B \geqq C;$$

dann sind in (52) und (53) die Halbachsen nach steigenden Werten angeordnet. Da wir $\frac{d\pi}{dt}$, $\frac{d\chi}{dt}$, $\frac{d\varrho}{dt}$ als kartesische Koordinaten auffassen, so bedeuten die beiden Gleichungen (40a) und (41a), daß die die Rotationskomponenten repräsentierenden Punkte auf beiden Ellipsoiden gleichzeitig liegen müssen, d. h. auf ihrer Schnittlinie. Ziehen wir also vom Zentrum nach einem Punkte der Schnittlinie einen Radiusvektor, so hat dieser die Größe $\omega = \sqrt{\left(\frac{d\pi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\chi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\varrho}{dt}\right)^2}$ und die Richtungskosinusse $\dfrac{\frac{d\pi}{dt}, \frac{d\chi}{dt}, \frac{d\varrho}{dt}}{\omega}$, stellt also nach Größe und Richtung die Rotationsgeschwindigkeit dar. Den Endpunkt dieses Vektors nannten wir schon früher den Drehpol. Die stets geschlossene Schnittlinie der beiden Ellipsoide ist also die Kurve, die der Drehpol im Laufe der Zeit im Körper beschreibt, also die sogenannte „Polhodiekurve", die zusammen mit dem Koordinatenanfangspunkt den „Polhodiekegel" bestimmt, der von dem genannten Radiusvektor beschrieben wird, wenn der Drehpol die Polhodiekurve durchläuft. Daß die Schnittkurve beider Ellipsoide stets reell ist, folgt sofort aus physikalischen Erwägungen: der Radiusvektor vom Betrage $\omega = \sqrt{\dot\pi^2 + \dot\chi^2 + \dot\varrho^2}$ ist ja bei physikalischen Problemen stets reell. Die Gleichung des Polhodiekegels läßt sich leicht aus (40a) und (41a) ableiten. Erweitert man (40a) mit U_0^2 und (41a) mit $2E_0$, so erhält man durch Subtraktion:

$$\xi^2(AU_0^2 - 2E_0A^2) + \eta^2(BU_0^2 - 2E_0B^2) + \zeta^2(CU_0^2 - 2E_0C^2) = 0. \tag{54}$$

Dies ist, wie man sofort sieht, die Gleichung des gesuchten Kegels.

Ersetzt man $\frac{d\pi}{dt}$, $\frac{d\chi}{dt}$, $\frac{d\varrho}{dt}$ überall durch $\frac{dp}{dt}$, $\frac{dq}{dt}$, $\frac{dr}{dt}$, was mit Hilfe der Richtungskosinusse $\alpha_1 \ldots \gamma_3$ ohne Schwierigkeit geschehen kann, so

kann man (40) und (41) mit Bezug auf das feste System ausdrücken; die Schnittkurve der so erhaltenen Flächen liefert offenbar die Herpolhodiekurve, die zusammen mit dem Koordinatenanfangspunkte den Herpolhodiekegel bestimmt. Doch hat ein näheres Eingehen darauf keinen Zweck, da die $\alpha_1 \ldots \gamma_3$ als Funktionen der Zeit unbekannt sind: es ist ja gerade das Ziel der Untersuchung, sie kennen zu lernen.

Wir können die Untersuchung, die wir eben für die Rotationsachse ausgeführt haben, auch für den Drehimpuls $\mathfrak{U}_0$ ausführen. Nach (46) sind die ξ, η, ζ-Komponenten dieselben:

$$\mathfrak{U}_\xi = A\frac{d\pi}{dt}, \qquad \mathfrak{U}_\eta = B\frac{d\chi}{dt}, \qquad \mathfrak{U}_\zeta = C\frac{d\varrho}{dt}. \tag{55}$$

Setzen wir dies in (40) und (41) ein, so erhalten wir zwei Gleichungen:

$$\frac{\mathfrak{U}_\xi^2}{A} + \frac{\mathfrak{U}_\eta^2}{B} + \frac{\mathfrak{U}_\zeta^2}{C} = 2E_0, \tag{56}$$

$$\mathfrak{U}_\xi^2 + \mathfrak{U}_\eta^2 + \mathfrak{U}_\zeta^2 = U_0^2. \tag{57}$$

Deuten wir $\mathfrak{U}_\xi$, $\mathfrak{U}_\eta$, $\mathfrak{U}_\zeta$ als kartesische Koordinaten, d. h. als die Koordinaten des Endpunktes des Impulsvektors $\mathfrak{U}_0$, und nennen wir sie ξ, η, ζ, so haben wir die beiden Gleichungen:

$$\frac{\xi^2}{A^2} + \frac{\eta^2}{B^2} + \frac{\zeta^2}{C^2} = 2E_0, \tag{58}$$

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = U_0^2, \tag{59}$$

von denen die erste ein Ellipsoid mit den Halbachsen

$$\sqrt{2E_0 A} \geqq \sqrt{2E_0 B} \geqq \sqrt{2E_0 C}, \tag{60}$$

die zweite eine damit konzentrische Kugel darstellt, deren — wie früher — stets reelle und stets geschlossene Schnittlinie die Kurve darstellt, die der Endpunkt des Drehimpulses im Körper beschreibt; auch diese sogenannte „Impulskurve" bestimmt mit dem Koordinatenanfangspunkte einen Kegel, den der Drehimpulsvektor bei der Bewegung des Körpers in diesem erzeugt, den man etwa den „Impulskegel" nennen kann. Seine Gleichung ergibt sich analog wie vorher zu:

$$\xi^2\left(\frac{U_0^2}{A} - 2E_0\right) + \eta^2\left(\frac{U_0^2}{B} - 2E_0\right) + \zeta^2\left(\frac{U_0^2}{C} - 2E_0\right) = 0. \tag{61}$$

Um kurze Ausdrücke zu haben, wollen wir das Ellipsoid (58) das „Impulsellipsoid", die Kugel (59) die „Impulskugel" nennen.

Im Raume ist der Impuls nach Größe und Richtung fest; und daher erkennt man, daß die Impulsachse eine viel einfachere Gesetzmäßigkeit aufweist als die Rotationsachse, die sowohl im Körper als im Raume einen Kegel beschreibt; dafür hat vielleicht die Rotationsachse die mechanisch anschaulichere Bedeutung. Wir wollen, um jede Verwechslung von Impuls- und Rotationsachse auszuschließen, — in der populären Kreiselliteratur beruhen darauf zahlreiche Irrtümer, der Dar-

stellung — gleichzeitig sowohl die Lage des Rotationsvektors als auch des Impulsvektors betrachten.

Da die Schnittlinien der Ellipsoide (40a) und (41a) sowie des Ellipsoides (58) und der Kugel (59) stets reell sein müssen, so ergeben sich sofort folgende Grenzen für die relativen Größen dieser Oberflächen. Zunächst kann nämlich der Radius U_0 der Impulskugel (59) nicht kleiner als die kleinste und nicht größer als die größte Halbachse des Impulsellipsoides sein; denn in beiden Fällen wäre die Schnittlinie nicht reell, da die eine Fläche die andere ganz umhüllen würde, ohne einen Punkt mit ihr gemeinsam zu haben. Die beiden Extremfälle sind also die, daß der Kugelradius gerade gleich der kleinsten oder gerade gleich der größten Halbachse des Impulsellipsoides ist. Dann umschließt zwar noch immer die eine Fläche die andere völlig, aber es tritt Berührung an den Endpunkten der kleinsten oder größten Halbachse ein: die Schnittlinie ist reell, wenn auch auf zwei Punkte reduziert. Im ersten Fall haben wir nach (60):

(62) $$U_0 = \sqrt{2E_0 C},$$

im zweiten:

(63) $$U_0 = \sqrt{2E_0 A}.$$

Diesen beiden Extremfällen für die Bewegung des Impulsvektors im Körper entsprechen zwei ganz analoge für die des Rotationsvektors. Denn wenn (62) erfüllt ist, also die Impulskugel (59) innerhalb des Impulsellipsoides (58) liegt, und nur Berührung an den Endpunkten der kleinsten Halbachse stattfindet, so gilt nach (52) und (53), daß die größte Achse des U_0-Ellipsoides $\frac{U_0}{C}$ gerade gleich der größten Achse $\sqrt{\frac{2E_0}{C}}$ des E_0-Ellipsoides ist; denn $\frac{U_0}{C}$ ist vermöge (62) gleich $\frac{\sqrt{2E_0 C}}{C} = \sqrt{2E_0 C}$; dann haben wir für die Halbachsen des E_0-Ellipsoides nach (52):

$$\sqrt{\frac{2E_0}{A}} \leqq \sqrt{\frac{2E_0}{B}} \leqq \sqrt{\frac{2E_0}{C}},$$

und für die des U_0-Ellipsoides nach (53) und (62):

$$\sqrt{\frac{2E_0}{A}\cdot\frac{C}{A}} \leqq \sqrt{\frac{2E_0}{B}\cdot\frac{C}{B}} \leqq \sqrt{\frac{2E_0}{C}},$$

d. h. aber, da $\frac{C}{A}$ ein echter Bruch ist, daß die anderen Halbachsen des U_0-Ellipsoides kleiner sind als die entsprechenden des E_0-Ellipsoides; mit anderen Worten: das U_0-Ellipsoid ist gestreckter als das E_0-Ellipsoid und liegt ganz innerhalb des letzteren, dasselbe nur an den Enden der großen Halbachse berührend. Auch hier reduziert sich also die Schnittlinie, d. h. die Bahn des Drehpoles, auf zwei Punkte.

Um ein vollständiges Bild der gegenseitigen Beziehungen von Impulsvektor und Rotationsvektor zu haben, müßten die vier Flächen in den

Körper eingezeichnet werden, mit dem gemeinsamen Zentrum im festen Punkte S; diese Flächen liegen im Körper fest und machen dessen Bewegung mit. Um indessen die Zeichnung nicht zu unübersichtlich zu machen, zerlegen wir sie in zwei, indem in Fig. 119a ein Schnitt durch die Impulskugel und das Impulsellipsoid, und in Fig. 119b ein Schnitt durch das E_0- und das U_0-Ellipsoid gezeichnet sind. Die Figuren nebst den eingetragenen Buchstaben sind wohl ohne weitere Erläuterung verständlich.

Wie ist die Bewegung in diesem Falle? Aus den Figg. 119a und 119b geht hervor, daß dann sowohl der Impulsvektor als auch der Rotationsvektor im Körper und im Raume festliegen; d. h. sie fallen beide

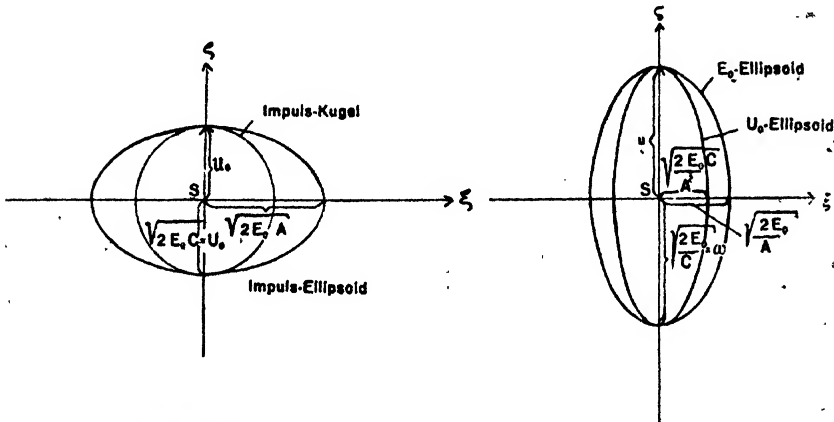


Fig. 119a. Fig. 119b.

zusammen, und zwar bei unserer Wahl des (ξ, η, ζ)-Koordinatensystems mit der ζ-Achse, d. h. der Achse des kleinsten Trägheitsmomentes C durch den Punkt S. Diese Achse ist also auch im Raume fest, ohne anderweitig festgehalten zu sein, als nur in dem festen Punkte S. Es ist also in der früheren Ausdrucksweise die Achse des kleinsten Hauptträgheitsmomentes eine „freie" oder „permanente" Rotationsachse. Die Rotation um dieselbe geschieht mit konstanter Winkelgeschwindigkeit, da der Rotationsvektor auch der Größe nach konstant bleibt; ob im Sinne oder entgegengesetzt dem Sinne des Uhrzeigers bleibt unentschieden; das hängt von den Anfangsbedingungen ab. Diese Unbestimmtheit entspricht dem Umstande, daß wir in den Figg. 119 jedesmal zwei Berührungspunkte, also zwei mögliche Richtungen von Drehimpuls- und Rotationsvektor haben.

Betrachten wir jetzt den zweiten Extremfall, der durch (63) formuliert ist. Dann sind gleichzeitig die Achsen des E_0- und U_0-Ellipsoides nach (52) und (63):

$$E_0\text{-Ellipsoid:}\ \sqrt{\frac{2E_0}{A}} \leqq \sqrt{\frac{2E_0}{B}} \leqq \sqrt{\frac{2E_0}{C}},$$

$$U_0\text{-Ellipsoid:}\ \sqrt{\frac{2E_0}{A}} \leqq \sqrt{\frac{2E_0}{B}\cdot\frac{A}{B}} \leqq \sqrt{\frac{2E_0}{C}\cdot\frac{A}{C}},$$

d. h. die beiden Ellipsoide stimmen in der kleinsten Halbachse überein, und das U_0-Ellipsoid umhüllt das E_0-Ellipsoid vollständig, dasselbe nur in den Endpunkten der kleinsten Halbachse berührend. Wir erhalten also das Bild der Figuren 120a und 120b. Auch in diesem Falle haben wir eine Rotation mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um eine im Raume und im Körper feste Achse vor uns, die jetzt mit der

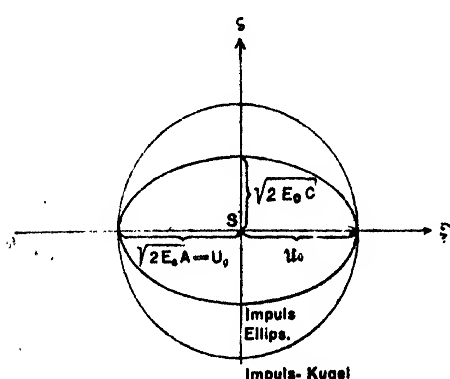


Fig. 120a.

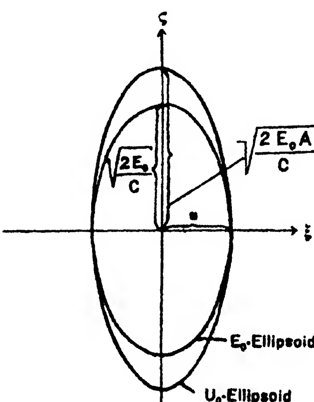


Fig. 120b.

Achse des größten Trägheitsmomentes A zusammenfällt; auch diese Achse ist eine permanente Rotationsachse, wie wir schon aus Nummer 82 von der Untersuchung der Deviationsmomente her wissen. Die Richtung der Rotationsachse und natürlich ebenso der Impulsachse bleibt zweideutig.

Zwischen diesen beiden Extremfällen steht in der Mitte derjenige, daß der Radius der Impulskugel gleich der mittleren Halbachse des Impulsellipsoides ist. Dann ist nach (60):

$$U_0 = \sqrt{2E_0 B}. \tag{64}$$

Dann berühren sich Impulskugel und Impulsellipsoid in den Endpunkten der mittleren Halbachse, durchschneiden sich aber gleichzeitig. Denn der Kugelradius ist dann ja kleiner als die größte, aber größer als die kleinste Halbachse des Impulsellipsoides. Man macht sich leicht klar, daß die beiden Flächen sich infolgedessen in zwei Kreisen durchschneiden müssen, die durch die Berührungspunkte an den Enden der mittleren Halbachse hindurchgehen (Fig. 121a). Gleichzeitig stimmen dann auch

das E_0-Ellipsoid und das U_0-Ellipsoid in ihren mittleren Halbachsen überein und durchschneiden sich aus demselben Grunde wie vorher in zwei Kurven, die durch die Berührungspunkte hindurchgehen (Fig. 121 b). Auch hier ist die Bewegung von demselben Charakter: konstante Rotationsgeschwindigkeit um die Achse des mittleren Trägheitsmomentes B, wobei die Richtung des Rotationsvektors und Impulsvektors zweideutig bleibt.

Die Bewegung um die mittlere Achse unterscheidet sich übrigens in einem wesentlichen Punkte von derjenigen um die beiden anderen Hauptträgheitsachsen, worauf wir nachher noch näher eingehen müssen.

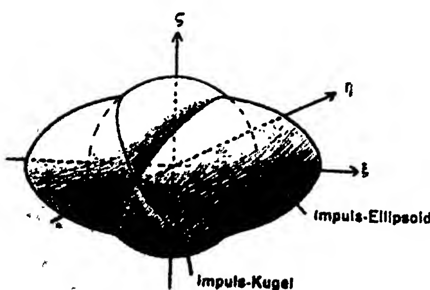


Fig. 121 a.

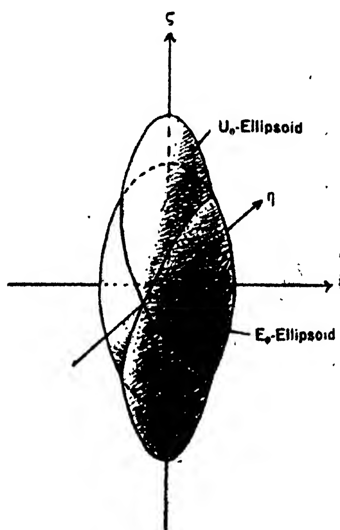


Fig. 121 b.

Nach der Behandlung der Extremfälle gehen wir jetzt zum allgemeinen Falle über, wobei wir uns aber auf die Betrachtung des Rotationsvektors, d. h. des E_0- und U_0-Ellipsoides, beschränken können, da für Impulsellipsoid und Impulskugel alles ganz analog ist. Wir wollen also, mit dem ersten Extremfalle beginnend, wo das U_0-Ellipsoid ganz innerhalb des E_0-Ellipsoides liegt, das U_0-Ellipsoid wachsen lassen, wobei wir das E_0-Ellipsoid konstant halten. Dieses ist gestattet, da es uns ja nur auf die relativen Größen beider Flächen ankommt. Lassen wir das U_0-Ellipsoid aus seiner Anfangslage wachsen, die durch Fig. 119 b dargestellt ist, so durchschneidet es das E_0-Ellipsoid, und zwar offenbar in zwei kleinen ovalen Kurven, die die größte Halbachse umgeben (Fig. 122). Je größer das U_0-Ellipsoid wird, desto größer werden auch die Schnittkurven; aber sie umgeben stets die größte Halbachse, bis die mittleren Halbachsen beider Ellipsoide gleich geworden

sind, d. h. bis der Fall der Fig. 121 b realisiert ist. In diesem Falle durchschneiden sich die beiden Schnittkurven in den Endpunkten der mittleren Halbachsen, und man kann daher hier sowohl sagen, daß die Schnittlinien die größte wie die kleinste Halbachse umgeben. Lassen wir das U_0-Ellipsoid weiter wachsen, so daß wir uns dem Grenzfall der Fig. 120 b annähern, so haben wir nunmehr Schnittkurven (Fig. 123), die die kleinste Halbachse umschlingen. Diese werden immer kleiner und kleiner, und reduzieren sich endlich auf zwei Punkte, wenn der Fall der Fig. 120 b tatsächlich erreicht ist.

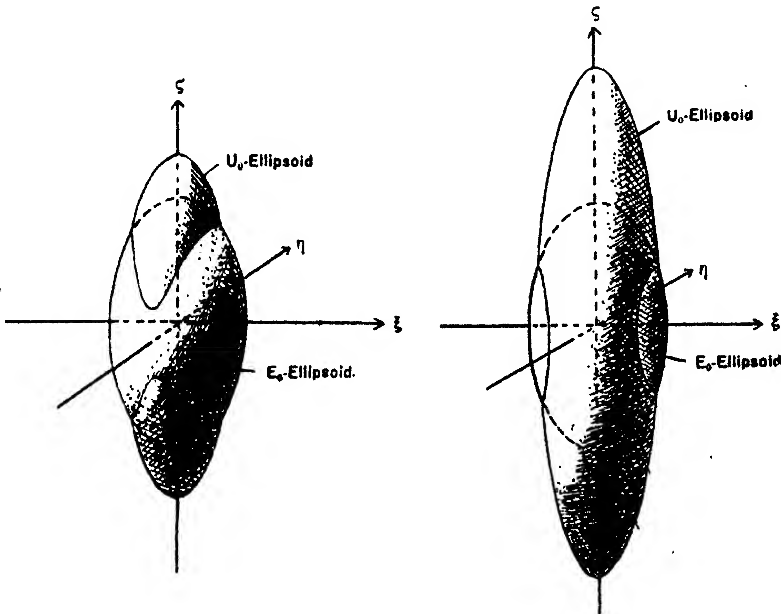


Fig. 122. Fig. 123.

Die Schnittlinien stellen jedesmal die Polhodiekurve dar; daß man stets zwei erhält, entspricht der Unbestimmtheit des Rotationssinnes. Da wir bei unserer Darstellung das E_0-Ellipsoid konstant gehalten haben, so schneidet das U_0-Ellipsoid nacheinander alle möglichen Schnittkurven, die wir oben besprochen haben, auf dem E_0-Ellipsoid aus, wie es in Fig. 124 dargestellt ist. Wir können nun auch den vorhin erwähnten Unterschied der Rotation um die mittlere Hauptträgheitsachse im Verhältnis zur Rotation um die beiden anderen Hauptträgheitsachsen verstehen. Zu diesem Zwecke erläutern wir, was wir unter „Stabilität“ und „Labilität“ einer Bewegung verstehen wollen. Das ist eine Erweiterung der in Nummer 58 eingeführten, genau definierten Begriffe der Stabilität und Labilität des Gleichgewichtes eines Punktsystems

Um die Stabilität einer Gleichgewichtslage zu definieren, gaben wir dem System einen kleinen Stoß und untersuchten dann, was eintritt, wenn dieser Stoß immer kleiner und kleiner gemacht wurde. Wenn dann auch die Entfernung jedes Punktes des Systems von der Gleichgewichtslage und die ihm durch den Stoß mitgeteilte Geschwindigkeit immer kleiner und kleiner wurden, so nannten wir das Gleichgewicht **stabil**, im anderen Falle **labil**. Falls das Gleichgewicht stabil ist, entfernt sich das System nur wenig von der Gleichgewichtslage und führt kleine Schwingungen um dieselbe aus; ist die Gleichgewichtslage labil, so verläßt das System dieselbe mit endlicher Geschwindigheit, um nie wieder in dieselbe zurückzukehren, wie klein auch der Stoß gewählt wird.

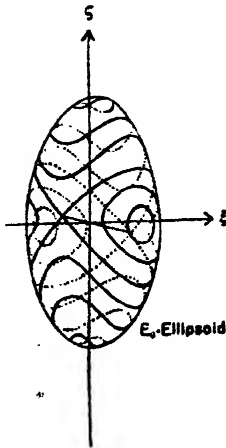


Fig. 124.

Nach dem Vorgang von E. I. Routh[1]) erweitert man diese Begriffe auf die Bewegung; allerdings ist die Routhsche Definition nicht zweckmäßig. Wir sagen im Anschluß an F. Klein und A. Sommerfeld[2]), eine Bewegung sei stabil, wenn die sämtlichen sie bestimmenden Elemente (die aufeinanderfolgenden Lagen des Körpers im Raume, die Lagen des Drehungsvektors und des Impulsvektors im Körper und im Raume usw.) um so weniger durch den Stoß geändert werden, je kleiner der Stoß ist. Im anderen Falle nennen wir die Bewegung labil.

Wir wollen nun die Stabilität der konstanten Rotation um die Hauptträgheitsachsen untersuchen, die wir oben ausführlich besprochen haben. Wenn der Körper um die Achse des größten oder kleinsten Trägheitsmomentes rotiert, so ändert jeder Stoß die Bewegung so ab, daß die vorher sich in den Endpunkten der betreffenden Achsen berührenden E_0- und U_0-Ellipsoide sich ein wenig durchschneiden, so zwar, daß die Schnittkurve den ursprünglichen Berührungspunkt umschließt. Je kleiner der Stoß, um so enger umschließt die Polhodiekurve (gleiches gilt von der Impulskurve, was wir nicht mehr besonders hervorheben) die betreffende Ellipsoidachse, um schließlich, wenn der Stoß unendlich klein gemacht wird, auf den Berührungspunkt einzuschrumpfen. **Beide Bewegungen sind also stabil.**

Da die Rotationsachse sowohl im Körper als im Raume fest ist, so kann ein in dieser Weise rotierender Kreisel offenbar zum Nachweis der Erdrotation dienen. Ein solcher Versuch ist mit Erfolg von Föppl[3])

---

[1]) E. I. Routh, Treatise on the Stability of motion, London 1877.
[2]) F. Klein u. A. Sommerfeld, Theorie des Kreisels, pag. 129.
[3]) A. Föppl, Physik. Zeitschr., Bd. V, pag. 416, 1904.

angestellt worden; doch ist die Genauigkeit viel geringer als die des Foucaultschen Pendelversuches.

Anders steht es mit der Rotation um die Achse des mittleren Trägheitsmomentes. Geben wir dem rotierenden Körper einen noch so kleinen Stoß, so umschließt die entstehende Polhodiekurve — es sind nur die Fälle der Figg. 122 und 123 möglich — entweder die Achse des kleinsten oder des größten Trägheitsmomentes. Nie aber kann eine Schnittkurve entstehen, die die mittlere Hauptträgheitsachse umschließt. Der Charakter der Bewegung wird durch den kleinsten Stoß radikal abgeändert: die Rotation um die Achse des mittleren Trägheitsmomentes ist also labil.

Um die Bewegung im allgemeinen Falle in allen Einzelheiten übersehen zu können, bleibt nichts anderes übrig, als auf die Eulerschen Gleichungen resp. die daraus bereits abgeleiteten Integrale (40) und (41) zurückzugehen. Wir werden für den unsymmetrischen kräftefreien Kreisel ($A \neq B \neq C$) die Rechnungsmethode nur andeuten und sie in der folgenden Nummer für den symmetrischen kräftefreien Kreisel wirklich durchführen.

Erweitert man die Gleichung (40) mit B und subtrahiert davon Gleichung (41), so erhält man $\dot{\pi}$ ausgedrückt durch $\dot{\varrho}$, nämlich:

$$(65) \qquad \left(\frac{d\pi}{dt}\right)^2 = \frac{2BE_0 - U_0^2 - C(B-C)\dot{\varrho}^2}{A(A-B)}.$$

Erweitert man entsprechend (40) mit A und subtrahiert dann (41), so folgt eine analoge Darstellung für $\dot{\chi}$:

$$(66) \qquad \left(\frac{d\chi}{dt}\right)^2 = -\frac{2AE_0 - U_0^2 - C(A-C)\dot{\varrho}^2}{B(A-B)}.$$

Zieht man die Quadratwurzeln und setzt diese in die dritte der kräftefreien Eulerschen Gleichung (39) ein, so folgt:

$$C\frac{d(\dot{\varrho})}{dt} = \pm\sqrt{\frac{-2BE_0 + U_0^2 + C(B-C)\dot{\varrho}^2}{A}} \cdot \pm\sqrt{\frac{2AE_0 - U_0^2 - C(A-C)\dot{\varrho}^2}{B}},$$

oder:

$$(67) \qquad \frac{d\dot{\varrho}}{\pm\sqrt{-2BE_0+U_0^2+C(B-C)\dot{\varrho}^2} \cdot \pm\sqrt{2AE_0-U_0^2-C(A-C)\dot{\varrho}^2}} = C\sqrt{AB}\cdot dt.$$

Darin sind die Variabeln getrennt und die Integration liefert für $\dot{\varrho}$ als Funktion von t offenbar eine elliptische Funktion, da das linksstehende Differential ein elliptisches Differential ist. Ist $\dot{\varrho}$ bekannt, so ergeben sich nach (65) und (66) sofort $\dot{\pi}$ und $\dot{\chi}$. Damit sind alle drei Rotationskomponenten in bezug auf das bewegte System bekannt. Legen wir die feste xy-Ebene in die invariable Ebene, so daß die positive z-Richtung mit der Impulsachse zusammenfällt, so liefern uns die Gleichungen (47) $\dot{\pi}, \dot{\chi}, \dot{\varrho}$ durch die Richtungskosinusse $\alpha_1 \ldots \gamma_3$ ausgedrückt, die ihrerseits nach (59) des VI. Kapitels mit den Eulerschen Winkeln zusammenhängen. Man erhält auf diese Weise schließlich die Euler-

schen Winkel durch $\dot{\pi}$, $\dot{\chi}$, $\dot{\varrho}$ ausgedrückt, d. h. als Funktionen der Zeit, womit alles bekannt ist. Wie schon bemerkt, führt die Lösung auf elliptische Funktionen; wir müssen darauf verzichten, näher auf diesen Gegenstand einzugehen.

84. Kräftefreie Bewegung des symmetrischen Kreisels.

Dagegen wollen wir einen wichtigen Spezialfall, den des symmetrischen Kreisels, behandeln. Darunter versteht man einen solchen, für den zwei Hauptträgheitsmomente gleich groß sind. Wir nehmen etwa $B = A \mp C$. Die Behandlung dieses Falles können wir zweckmäßig sofort in die geeignet spazialisierten kräftefreien Eulerschen Gleichungen (39) anschließen.

Dies werden hier:

$$(68)\qquad \begin{cases} A\,\dfrac{d^2\pi}{dt^2} + (C-A)\,\dfrac{d\chi}{dt}\,\dfrac{d\varrho}{dt} = 0, \\ A\,\dfrac{d^2\chi}{dt^2} + (A-C)\,\dfrac{d\varrho}{dt}\,\dfrac{d\pi}{dt} = 0, \\ C\,\dfrac{d^2\varrho}{dt^2} \qquad\qquad\qquad\quad = 0. \end{cases}$$

Von diesen liefert die letzte sofort für die Komponente der Rotationsgeschwindigkeit um die ζ-Achse (wir bezeichnen die Rotationskomponenten im folgenden vielfach der Kürze halber durch $\dot{\pi}$, $\dot{\chi}$, $\dot{\varrho}$):

$$(69)\qquad \dot{\varrho} = \text{Const.} = \dot{\varrho}_0.$$

Da die Lage der ζ-Achse, um die die Rotation $\dot{\varrho}_0$ stattfindet, bisher nur dadurch definiert ist, daß sie mit der Achse des kleinsten Trägheitsmomentes C zusammenfällt, so wollen wir diese Bestimmung dahin ergänzen, daß wir diejenige Richtung als positive ζ-Achse nehmen, in bezug auf die die Rotation im positiven Sinne vor sich geht, d. h. wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\dot{\varrho}_0 > 0$ annehmen.

Aus (69) folgt mit Benutzung der für unseren Fall spezialisierten Gleichung (41) sofort weiter:

$$(70)\qquad A^2(\dot{\pi}^2 + \dot{\chi}^2) = U_0^2 - C^2\dot{\varrho}_0^2 = \text{Const.};$$

also ist auch $\dot{\pi}^2 + \dot{\chi}^2 + \dot{\varrho}^2 = \omega^2$ konstant, d. h. die **Rotationsgeschwindigkeit ist konstant.** Damit vereinfachen sich die beiden ersten Gleichungen (68) folgendermaßen:

$$(71)\qquad \begin{cases} A\,\dfrac{d^2\pi}{dt^2} + (C-A)\,\dot{\varrho}_0\,\dfrac{d\chi}{dt} = 0, \\ A\,\dfrac{d^2\chi}{dt^2} - (C-A)\,\dot{\varrho}_0\,\dfrac{d\pi}{dt} = 0, \end{cases}$$

d. h. wir haben zwei miteinander gekoppelte lineare homogene Gleichungen, wie wir sie ganz ähnlich bei den Schwingungen eines Systems zweier Massenpunkte vor uns hatten (vgl. Nr. 60). Indem man den

Kunstgriff benutzt, die letzte der Gleichungen (71) mit der imaginären Einheit $i = \sqrt{-1}$ zu multiplizieren und zur ersten zu addieren, erhält man die einfachere Gleichung:

$$A\left(\frac{d^2\pi}{dt^2} + i\frac{d^2\chi}{dt^2}\right) - i(C - A)\varrho_0\left(\frac{d\pi}{dt} + i\frac{d\chi}{dt}\right) = 0,$$

oder wenn wir für einen Augenblick $\frac{d\pi}{dt} + i\frac{d\chi}{dt} = V$ setzen:

(72) $$\frac{dV}{dt} = i\frac{C - A}{A}\varrho_0 V,$$

die wir durch den schon früher bei dem Schwingungsproblem bewährten Ansatz zu lösen versuchen:

(73) $$V = e^{at},$$

wo a eine zu bestimmende Konstante ist. Gleichung (72) liefert sofort:

$$a = i\frac{C - A}{A}\varrho_0,$$

so daß wir aus (73) erhalten, wenn wir noch eine willkürliche Konstante E einführen:

(74) $$V = \dot{\pi} + i\dot{\chi} = Ee^{i\frac{C-A}{A}\varrho_0 t}.$$

Im allgemeinen wird E komplex sein, also gleich $\beta + i\gamma$ zu setzen sein. Trennt man in der letzten Gleichung das Reelle vom Imaginären, so erhält man unmittelbar:

$$\dot{\pi} = \beta\cos\frac{C - A}{A}\varrho_0 t - \gamma\sin\frac{C - A}{A}\varrho_0 t,$$
$$\dot{\chi} = \gamma\cos\frac{C - A}{A}\varrho_0 t + \beta\sin\frac{C - A}{A}\varrho_0 t,$$

oder, wenn wir noch setzen:

$$\beta = F\sin\delta,$$
$$\gamma = F\cos\delta,$$

kann man für $\dot{\pi}$ und $\dot{\chi}$ schreiben:

(75) $$\begin{cases} \dot{\pi} = -F\sin\left(\frac{C - A}{A}\varrho_0 t - \delta\right), \\ \dot{\chi} = +F\cos\left(\frac{C - A}{A}\varrho_0 t - \delta\right), \end{cases}$$

oder, unter Einführung einer anderen Integrationskonstanten t_0, erhält man für alle drei Rotationskomponenten:

(76) $$\begin{cases} \dot{\pi} = -F\sin\frac{C - A}{A}\varrho_0(t - t_0), \\ \dot{\chi} = +F\cos\frac{C - A}{A}\varrho_0(t - t_0), \\ \dot{\varrho} = \varrho_0. \end{cases}$$

Die Konstante F bestimmt sich nach (70) zu: $\pm\sqrt{\frac{U_0^2 - C^2\dot{\varrho}_0^2}{A^2}}$. Nun drücken wir vermittels der geeignet spezialisierten Gleichungen (47) $\dot{\pi}$, $\dot{\chi}$, $\dot{\varrho}$ durch $\alpha_1 \ldots \gamma_3$ aus. Wir haben zunächst aus (47):

$$A(\alpha_1\dot{\pi} + \alpha_2\dot{\chi}) + C\alpha_3\dot{\varrho}_0 = 0,$$
$$A(\beta_1\dot{\pi} + \beta_2\dot{\chi}) + C\beta_3\dot{\varrho}_0 = 0,$$
$$A(\gamma_1\dot{\pi} + \gamma_2\dot{\chi}) + C\gamma_3\dot{\varrho}_0 = k_3.$$

$|k_3|$ ist offenbar $= U_0$; aber es kann im allgemeinen nicht geschlossen werden, daß k_3 selbst gleich U_0 ist. Wir werden jedoch nachher sehen, daß eine derartige Festsetzung über das Koordinatensystem getroffen werden kann, daß stets $k_3 = U_0$ ist. Bis dahin führen wir das Zeichen k_3 als verschieden von U_0 mit. Erweitert man die letzten Gleichungen mit resp. α_1, β_1, γ_1 und addiert, so folgt:

(77) $$A\frac{d\pi}{dt} = k_3\gamma_1;$$

ebenso folgt durch Erweiterung mit α_2, β_2, γ_2:

(78) $$A\frac{d\chi}{dt} = k_3\gamma_2;$$

und endlich ebenso:

(79) $$C\dot{\varrho}_0 = k_3\gamma_3.$$

Daraus folgt weiter mit Benutzung von (75):

(80) $$\begin{cases} \gamma_1 = \frac{A}{k_3}\dot{\pi} = -\frac{A}{k_3}F\sin\frac{C-A}{A}\dot{\varrho}_0(t-t_0), \\ \gamma_2 = \frac{A}{k_3}\dot{\chi} = \frac{A}{k_3}F\cos\frac{C-A}{A}\dot{\varrho}_0(t-t_0), \\ \gamma_3 = \frac{C}{k_3}\dot{\varrho}_0. \end{cases}$$

Mithin nach (59) des VI. Kapitels auf pag. 337:

(81) $$\begin{cases} \sin\psi\sin\vartheta = -\frac{AF}{k_3}\sin\frac{C-A}{A}\dot{\varrho}_0(t-t_0), \\ \cos\psi\sin\vartheta = +\frac{AF}{k_3}\cos\frac{C-A}{A}\dot{\varrho}_0(t-t_0), \\ \cos\vartheta = \frac{C}{k_3}\dot{\varrho}_0. \end{cases}$$

Aus den beiden ersten folgt:

$$\operatorname{tang}\psi = -\operatorname{tang}\frac{C-A}{A}\dot{\varrho}_0(t-t_0),$$

oder:

(82) $$\psi = -\frac{C-A}{A}\dot{\varrho}_0(t-t_0); \quad \frac{d\psi}{dt} = -\frac{C-A}{A}\dot{\varrho}_0.$$

Dabei bleibt in ψ noch eine Unbestimmtheit um ein ganzes Vielfaches von π, die durch Heranziehen der Anfangsbedingungen entschieden

werden kann. Aus der letzten Gleichung (81) folgt, daß ϑ konstant gleich ϑ_0 ist. ϑ_0 ist der Winkel zwischen der positiven z-Achse und der bereits endgültig festgelegten ζ-Achse. Nun können wir die positive Richtung der z-Achse, welch' letztere bisher nur dadurch festgelegt war, daß sie mit der Normalen auf der invariablen Ebene zusammenfällt, jetzt so wählen, daß der Winkel $\sphericalangle(z\zeta)$ spitz ausfällt, d. h. sein Kosinus und Sinus positiv werden. Nach der letzten Gleichung (81) ist dann k_3, da C und $\dot{\varrho}_0$ positiv sind, gleichfalls positiv; es ist also direkt mit U_0 identisch und kann daher dadurch in Zukunft ersetzt werden. Für den Sinus von ϑ_0 erhalten wir also:

$$\text{81a)} \qquad \sin\vartheta_0 = +\frac{1}{U_0}\sqrt{U_0^2 - C^2\dot{\varrho}_0^2}\,.$$

Aus der dritten Gleichung (61) des VI. Kapitels auf pag. 338 folgt endlich zur Bestimmung von φ:

$$\dot{\varrho}_0 = C\dot{\varrho}_0\frac{d\varphi}{dt} - \frac{A-C}{A}\dot{\varrho}_0\,;$$

also ist:

$$\text{83)} \qquad \begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dt} = \dfrac{C\dot{\varrho}_0}{A\cos\vartheta_0} = \dfrac{U_0}{A}, \quad \text{und} \\ \varphi = \dfrac{U_0}{A}(t-t_0') = \dfrac{C\dot{\varrho}_0}{A\cos\vartheta_0}(t-t_0'), \end{cases}$$

wenn t_0' eine neue Integrationskonstante bedeutet.

Wie stellt sich nun die Bewegung dar? Da um die Achse des kleinsten Trägheitsmomentes C, die mit unserer ζ-Achse zusammenfällt, Symmetrie herrschen muß (da $A = B$), so werden wir jetzt die ζ-Achse als Symmetrieachse oder Figurenachse des rotierenden Körpers bezeichnen. Der Winkel zwischen der Figurenachse und der mit der invariablen Achse zusammenfallenden z-Achse ist gleich ϑ_0, also konstant. Um diese Figurenachse findet eine Rotation (in der früheren Bezeichnung eine „Eigendrehung") mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\psi}{dt} = -\frac{C-A}{A}\dot{\varrho}_0$ statt (vgl. Fig. 100), die vom Winkel ϑ_0 zwischen Figurenachse und z-Achse unabhängig ist; denn nach der letzten Gleichung (81) hängen ϑ_0 und $\dot{\varrho}_0$ nur durch eine willkürliche Konstante (k_3) zusammen. Die Rotationsgeschwindigkeit ist bei unseren Festsetzungen positiv, da $C < A$ ist. Gleichzeitig ändert sich der sogenannte „Präzessionswinkel" φ zwischen der Knotenlinie und der x-Achse mit der gleichfalls positiven „Präzessionsgeschwindigkeit" $\frac{d\varphi}{dt}$, die vom Verhältnis der Trägheitsmomente C und A, der Rotationsgeschwindigkeit $\dot{\varrho}_0$ um die Figurenachse, und der Neigung ϑ_0 derselben gegen die invariable Achse abhängig ist. Da ϑ_0 konstant ist, so beschreibt die Figurenachse (ζ-Achse) einen Kreiskegelmantel um die invariable Achse (z-Achse), d. h. wir haben es mit einer regulären Präzession zu tun. Mit dieser Fest-

stellung ist die ganze Bewegung völlig bestimmt, da für jede Zeit die Lage des Körpers durch die Eulerschen Winkel festgelegt ist.

Man bemerke noch folgendes: Wie oben betont, haben $\frac{d\psi}{dt}$ und $\frac{d\varphi}{dt}$ dasselbe Vorzeichen, da nach unserer Festsetzung $C < A$ ist; die Eigendrehung um die Figurenachse und die Präzessionsbewegung der Figurenachse um die invariable Achse gehen also gleichsinnig vor sich, weshalb diese Präzessionsbewegung speziell „progressive Präzession“ genannt wird. Würde die Figurenachse die Achse des größten Trägheitsmomentes sein, ($C > A$), so wären $\frac{d\psi}{dt}$ und $\frac{d\varphi}{dt}$ von entgegengesetztem Vorzeichen; die Präzession heißt in diesem Falle „retrograde Präzession“.

Die hier gewählte Darstellung ist äußerst anschaulich, aber es ist nicht die früher besprochene Poinsotsche, bei der man auf das Abrollen zweier Kegel aufeinander geführt wird. Wir wollen der größeren Deutlichkeit halber, und damit Verwechselungen der verschiedenen Achsen und Kegel nach Möglichkeit ausgeschlossen werden, jetzt noch die Poinsotsche Darstellung, aber in analytischer Form, geben.

Zu diesem Zwecke haben wir zunächst die Lage der instantanen Rotationsachse im Körper und im Raume festzustellen, was keine Schwierigkeiten bietet, da die Größen $\dot{\pi}, \dot{\chi}, \dot{\varrho}$ und damit auch die Größen $\dot{p}, \dot{q}, \dot{r}$ bekannt sind. Die Gleichung der instantanen Rotationsachse im Körper ist, wenn mit ξ, η, ζ die Koordinaten eines derselben angehörenden Punktes bezeichnet werden, offenbar:

$$\xi : \eta : \zeta = \dot{\pi} : \dot{\chi} : \dot{\varrho},$$

oder wenn man die Werte (75) benutzt und D ein Proportionalitätsfaktor ist:

$$(84)\qquad \begin{cases} \xi = -DF\sin\frac{C-A}{A}\dot{\varrho}_0(t-t_0), \\ \eta = -DF\cos\frac{C-A}{A}\dot{\varrho}_0(t-t_0), \\ \zeta = \quad D\dot{\varrho}_0. \end{cases}$$

Die instantane Rotationsachse geht durch den festen Koordinatenanfangspunkt; wir wollen nur solche Punkte derselben betrachten, die vom Nullpunkte aus gerechnet nach der positiven Seite liegen; d. h. wir können D als positiv voraussetzen. Setzen wir D direkt gleich 1, so sind offenbar (ξ, ζ) die Koordinaten des Drehpols, und mit $D = 1$ stellen die Gleichungen (84) in Parameterdarstellung die Polhodiekurve, d. h. die sukzessiven Lagen des Drehpoles dar. Diese Gleichungen stellen zugleich bei beliebigem D in Parameterdarstellung den Polhodiekegel dar, d. h. die Gesamtheit der sukzessiven Lagen der instantanen Rotationsachse im Körper. Zulassung negativer D-Werte würde bedeuten, daß wir auch den „diametralen“ Kegel mitzählen würden. Durch Elimination von t und D erhält man leicht:

$$\frac{\xi^2 + \eta^2}{\zeta^2} = \frac{F^2}{\dot{\varrho}_0^2},$$

oder wenn für F^2 sein Wert $\frac{U_0^2 - C^2 \dot{\varrho}_0^2}{A^2}$ gesetzt wird:

(85) $$(\xi^2 + \eta^2)\,\dot{\varrho}_0^2 + \zeta^2 \left(\frac{C^2 \dot{\varrho}_0^2 - U_0^2}{A^2}\right) = 0,$$

die eine Kegelgleichung in ihrer gewöhnlichen Form darstellt. Und zwar einen Kreiskegel um die ζ-Achse. Der Kegelwinkel ε_1 ist offenbar dadurch bestimmt, daß der Ausdruck $\frac{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}{\zeta}$ gleich der trigonometrischen Tangente von ε_1 ist; also:

(86) $$\operatorname{tang} \varepsilon_1 = \frac{F}{\dot{\varrho}_0} = + \frac{\sqrt{U_0^2 - C^2 \dot{\varrho}_0^2}}{A \dot{\varrho}_0}.$$

Das Vorzeichen der Wurzel muß so gewählt werden, daß der Zähler

$$\sqrt{\xi^2 + \eta^2} = \pm D F = \pm \frac{D}{A} \sqrt{U_0^2 - C^2 \dot{\varrho}_0^2}$$

positiv ausfällt, da er den stets positiven Abstand des betrachteten Punktes von der ζ-Achse darstellt. Dieselbe Betrachtung entscheidet auch nachher beim Herpolhodiekegel über das Vorzeichen.

Natürlich hätte man das Resultat auch direkt durch Spezialisierung der allgemeinen Gleichung des Polhodiekegels gemäß (54) erhalten können; man überzeugt sich in der Tat leicht, daß (54) für unseren Fall in (85) übergeht.

Jetzt wollen wir die Lage der instantanen Rotationsachse im Raume bestimmen; ihre Gleichung ist:

$$x : y : z = \dot{p} : \dot{q} : \dot{r}.$$

$\dot{p}, \dot{q}, \dot{r}$ hängen mit den bekannten Eulerschen Winkeln ϑ, φ, ψ nach Gleichung (60) des VI. Kapitels auf pag. 337 folgendermaßen zusammen:

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \cos\varphi \cdot \dot{\vartheta} + \sin\varphi \cdot \sin\vartheta \cdot \dot{\psi}, \\ \dot{q} &= \sin\varphi \cdot \dot{\vartheta} - \cos\varphi \cdot \sin\vartheta \cdot \dot{\psi}, \\ \dot{r} &= \dot{\varphi} + \cos\vartheta \cdot \dot{\psi}. \end{aligned}$$

Gemäß (81), (82) und (83) wird daraus für die Rotationskomponenten in bezug auf die festen Achsen:

(87) $$\left\{ \begin{aligned} \dot{p} &= -\sin \frac{U_0}{A}(t - t_0') \cdot \sqrt{1 - \frac{C^2 \dot{\varrho}_0^2}{U_0^2}} \cdot \frac{C - A}{A} \dot{\varrho}_0, \\ \dot{q} &= -\cos \frac{U_0}{A}(t - t_0') \cdot \sqrt{1 - \frac{C^2 \dot{\varrho}_0^2}{U_0^2}} \cdot \frac{C - A}{A} \dot{\varrho}_0, \\ \dot{r} &= \frac{U_0}{A} - \frac{C}{U_0} \cdot \frac{C - A}{A} \dot{\varrho}_0^2. \end{aligned} \right.$$

Bezeichnet E also wieder einen positiv zu wählenden Proportionalitätsfaktor, so haben wir für die Punkte der instantanen Rotationsachse die Gleichungen:

$$(88)\quad \begin{cases} x = -E \sin \frac{U_0}{A}(t - t_0') \cdot \sqrt{1 - \frac{C^2 \dot{\varrho}_0^2}{U_0^2}} \frac{C-A}{A} \dot{\varrho}_0, \\ y = +E \cos \frac{U_0}{A}(t - t_0') \cdot \sqrt{1 - \frac{C^2 \dot{\varrho}_0^2}{U_0^2}} \frac{C-A}{A} \dot{\varrho}_0, \\ z = \frac{E U_0}{A} - \frac{E C}{U_0} \frac{C-A}{A} \dot{\varrho}_0^2. \end{cases}$$

Das ist gleichzeitig die Parameterdarstellung für den Herpolhodiekegel. Eliminiert man die Zeit t und die Konstante E, so folgt leicht:

$$(89)\quad (x^2 + y^2)\left(\frac{U_0}{A} - \frac{C}{U_0}\frac{C-A}{A}\dot{\varrho}_0^2\right) - z^2 \frac{1}{U_0^2}\left(U_0^2 - C^2 \dot{\varrho}_0^2\right)\left(\frac{C-A}{A}\right)^2 \dot{\varrho}_0^2 = 0,$$

und das ist offenbar wieder die Gleichung eines Kreiskegels, und zwar um die z-Achse. Für die trigonometrische Tangente des Kegelwinkels ε_2 hat man wieder:

$$(90)\quad \operatorname{tang} \varepsilon_2 = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} = \frac{-\frac{1}{U_0}\sqrt{U_0^2 - C^2 \dot{\varrho}_0^2}\, \frac{C-A}{A} \dot{\varrho}_0}{\frac{U_0}{A} - \frac{C}{U_0}\frac{C-A}{A}\dot{\varrho}_0^2}.$$

Das Minuszeichen rechtfertigt sich auf die vorhin beim Polhodiekegel auseinandergesetzte Weise. Es ist leicht, ε_2 mit ϑ_0 und ε_1 in Zusammenhang zu bringen. Denn man kann (90) so schreiben:

$$\operatorname{tang} \varepsilon_2 = \frac{\sqrt{U_0^2 - C^2 \dot{\varrho}_0^2}\left\{\frac{1}{C\dot{\varrho}_0} - \frac{1}{A\dot{\varrho}_0}\right\}}{1 + \frac{U_0^2 - C^2 \dot{\varrho}_0^2}{A C \dot{\varrho}_0^2}},$$

und darin ist die rechte Seite gleich:

$$\frac{\operatorname{tg} \vartheta_0 - \operatorname{tg} \varepsilon_1}{1 + \operatorname{tg} \vartheta_0 \operatorname{tg} \varepsilon_1} = \operatorname{tang}(\vartheta_0 - \varepsilon_1);$$

also folgt schließlich:

$$(91)\quad \varepsilon_2 = \vartheta_0 - \varepsilon_1.$$

Wir haben also die Verhältnisse der Fig. 125 vor uns. Man erkennt insbesondere folgendes: Von der Eigendrehungsgeschwindigkeit $\dot{\psi}$ wissen wir bereits, daß sie positiv ist; ebenso von der Präzessionsgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ um die z-Achse. Deshalb ist um die z-Achse und in die kreisförmige Grundfläche des sog. „Präzessionskegels" je ein Pfeil mit positivem Rotationssinne eingezeichnet worden. Innerhalb dieses Kegels liegt zufolge (91) die instantane Rotationsachse, die den Kegelwinkel ϑ_0 in zwei Teile ε_1 und ε_2 teilt. Im Raume beschreibt die Rotationsachse den Kegel mit der Öffnung ε_2, und zwar im positiven Sinne, wie man sofort aus den beiden ersten Gleichungen (88) entnehmen kann; deshalb ist ein entsprechender Pfeil eingezeichnet worden. Der Polhodiekegel mit der Öffnung ε_1 wird dagegen im negativen Sinne von der Rotationsachse umlaufen, wie die beiden ersten Gleichungen (84) erkennen lassen (wäre $C > A$, so würde die Rotationsachse beide Kegel im gleichen Sinne

beschreiben; wir kommen darauf noch zurück); ein entsprechender Pfeil ist eingetragen. Endlich erfolgt die Rotation um die instantane Rotationsachse im positiven Sinne, d. h. in demselben, in dem die Be-

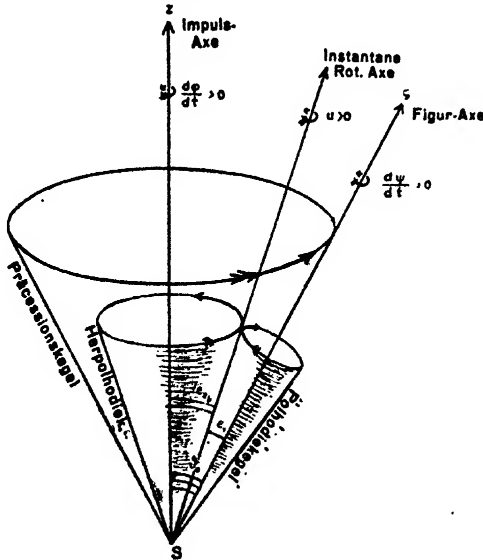


Fig. 125.

wegung der Rotationsachse auf dem Herpolhodiekegel erfolgt, d. h. die Präzession ist progressiv. Bei dieser rollt also der Polhodiekegel stets von außen auf dem Herpolhodiekegel ab.

Betrachten wir nun den Fall, daß $C > A$ ist. Die Unterschiede gegen den bisher behandelten Fall werden am besten hervortreten, wenn wir die folgende Tabelle studieren.

	$C < A$	$C > A$
Eigendrehungsgeschwindigkeit $\frac{d\psi}{dt}$	>0	<0
Präzessionsgeschwindigkeit $\frac{d\varphi}{dt}$	>0	>0
Umlaufsinn der inst. Rotationsachse auf Polhodiekegel	negativ	positiv
Desgl. auf Herpolhodiekegel	positiv	positiv
Beziehung zwischen den Winkeln ϑ_0, s_1, s_2	$s_2 = \vartheta_0 - s_1$	$s_2 = s_1 - \vartheta_0$
Charakter der Präzession	progressiv; Polhodiekegel rollt von außen auf Herpolhodiekegel ab (Fig. 125)	Spez. Fall der retrograden Präzession; Polhodiekegel umfaßt den Herpolhodiekegel und rollt von innen an ihm ab (Fig. 126)

Wir erhalten so das Bild der Fig. 126 die ganz analog wie Fig. 125 angelegt ist und mit Hilfe der Tabelle ohne Schwierigkeit verständlich sein wird.

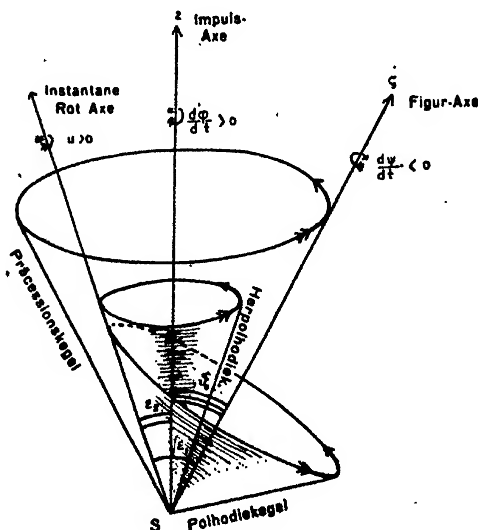


Fig. 126.

85. Summarische Betrachtung der Bewegungen eines symmetrischen Kreisels unter dem Einfluß von Kräften.[1]

Die Behandlung des allgemeinen Problems des symmetrischen Kreisels unter dem Einfluß von Kräften, insbesondere der Schwere, würde den Rahmen dieses Buches überschreiten; der Leser sei dafür auf die bereits genannte umfassende Monographie über die Theorie des Kreisels von F. Klein und A. Sommerfeld verwiesen. Wir beschränken uns hier auf eine summarische Betrachtung der dabei auftretenden Verhältnisse.

Wir denken uns einen sehr schnell um die Figurenachse rotierenden Kreisel, dessen Drehimpuls nach Größe und Richtung $\mathfrak{U}$ sei. Wirkt nun auf den Kreisel ein Drehmoment $\mathfrak{M}$ ein, so sagen die Momentengleichungen oder der damit gleichwertige zweite Impulssatz (Gleichung 40) des IV. Kapitels auf pag. 194) aus, daß die zeitliche Änderung des Drehimpulses gleich dem wirkenden Momente ist. Also:

$$(92)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\mathfrak{U}}{dt} &= \mathfrak{M}, \quad \text{oder} \\ d\mathfrak{U} &= \mathfrak{M}\,dt. \end{aligned}\right.$$

[1]) Nach Hamel, Elementare Mechanik, pag. 401 ff.

Dabei ist selbstverständlich die Änderung $\frac{d\mathfrak{U}}{dt}$ vom festen System aus beurteilt. Aus der zweiten Formulierung der Gleichung (92) geht hervor, daß die Änderung $d\mathfrak{U}$ des Drehimpulses ein Vektor ist, der mit $\mathfrak{M}$ die gleiche Richtung hat, aber vom dt-fachen Betrage ist. Der Impuls $\mathfrak{U}$ geht also infolge der Wirkung des Drehmomentes $\mathfrak{M}$ nach der Zeit dt über in $\mathfrak{U} + d\mathfrak{U}$. Wir wollen jetzt die gegenseitige Lage der drei Vektoren $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U}+d\mathfrak{U}$, $\mathfrak{M}$ feststellen. Es mögen in Fig. 127 $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{OB}$ der Größe und Richtung nach die beiden Vektoren $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{U}$ darstellen, die von einem Punkte O aus aufgetragen sind. Dann kann $d\mathfrak{U}$ etwa durch das in Richtung von $\mathfrak{M}$ abgetragene Stück $\overrightarrow{OP}$ charakterisiert werden.

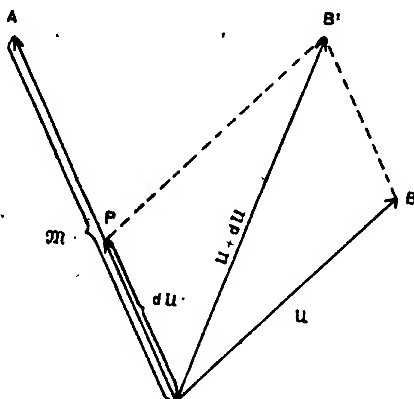


Fig. 127.

Nach der Parallelogrammregel finden wir dann den Punkt B' derartig, daß $\overrightarrow{OB'}$ der Größe und Richtung nach den neuen Drehimpuls $\mathfrak{U}+d\mathfrak{U}$ darstellt. Der Vektor $\mathfrak{U}+d\mathfrak{U}$ liegt also stets in dem Winkel, den die beiden Vektoren $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{U}$ miteinander bilden, und daher kann man das Resultat so aussprechen, daß der Drehimpuls bestrebt ist, der Richtung nach sich derjenigen von $\mathfrak{M}$ zu nähern, also sich $\mathfrak{M}$ parallel zu stellen. Man bezeichnet dieses Verhalten des Impulses, das keineswegs auf den Kreisel beschränkt ist, sondern offenbar in gleicher Allgemeinheit wie der Impulssatz gilt, beim Kreisel als „Tendenz zum gleichsinnigen Parallelismus".

Nun ist allerdings die Impulsachse nicht gut zu beobachten. Wenn wir aber einen sehr schnell um die Figurenachse rotierenden Kreisel annehmen, und das wirkende Moment $\mathfrak{M}$ nicht allzu groß ist, so werden wir erwarten dürfen, daß angenähert die Verhältnisse etwa der Figur 12[illegible] oder 126 des kräftefreien Kreisels bestehen bleiben, d. h. daß Figurenachse und instantane Rotationsachse noch imme

der Impulsachse benachbart sind und dieselbe rasch im Kreise umlaufen.

Im Mittel wird daher die Tendenz zum gleichsinnigen Parallelismus auch noch für die Figurenachse gelten, aber natürlich nicht in Strenge, wie für die Impulsachse. Es wird daher im Mittel sich die Figurenachse des Kreisels der Richtung des wirkenden Momentes $\mathfrak{M}$ parallel zu stellen suchen.

Dieser Satz erklärt das scheinbar paradoxe Verhalten eines schnell rotierenden Kreisels gegenüber äußeren Kräften (Fig. 128). Nehmen wir den in Fig. 128 gezeichneten Kreisel am Griffe in die Hand, halten

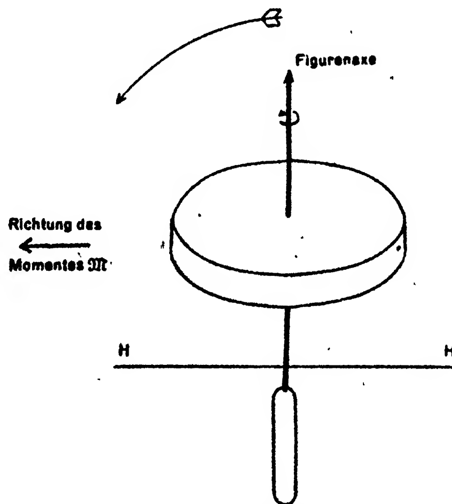


Fig. 128.

ihn vertikal und versetzen ihn in eine Drehung, die, von oben aus beurteilt, positiv ist. Dann ist die positive Richtung der Impulsachse nach oben gerichtet.

Versucht man den Kreisel so zu bewegen, daß das obere Ende der Figurenachse sich nach hinten bewegt (d. h. dreht man ihn um die horizontale Achse HH), so übt man ein Moment aus, dessen Richtung, von vorne gesehen, in der Zeichenebene nach links liegt, wie es der Pfeil andeutet. Also bewegt sich nach dem eben Gesagten die Kreiselspitze statt nach hinten, wie man erwarten sollte, im Mittel nach links (die Impulsachse streng nach links).

Würde die Rotation um die Figurenachse im umgekehrten Sinne erfolgen, so würde ihre positive Richtung nach unten zu nehmen sein, die Kreiselspitze würde sich dann nach rechts neigen, damit die positive Richtung der Figurenachse und des Momentes $\mathfrak{M}$ im Mittel wieder gleich-

sinnig werden können. Speziell erklärt sich auf diese Weise die Wirkung der Schwere auf einen symmetrischen Kreisel, der nicht in seinem Schwerpunkt S, sondern in einem anderen Punkte O festgehalten ist (Fig. 129).

Auf ihn wirkt im Schwerpunkt S die Resultante der Schwere Mg, die das Moment $\mathfrak{M}$ ausübt. Diesem stets horizontal gerichteten Moment sucht sich die Impulsachse parallel zu stellen, was, da der Punkt O des Kreisels fest ist, zur Folge hat, daß der Endpunkt des Impulsvektors einen horizontalen Kreis in Richtung des Momentes $\mathfrak{M}$ beschreibt; dabei nimmt er im Mittel die Figurenachse und die instantane Rotationsachse mit sich. Würde diese Bewegung in Strenge für die Figurenachse gelten, so hätten wir eine „reguläre Präzession" vor uns. Aber eine solche kommt

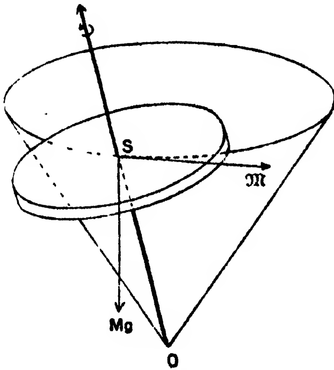
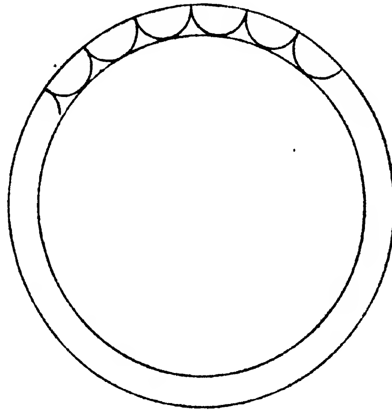


Fig. 129.


Fig 130.

im allgemeinen (von speziellen Fällen abgesehen) beim schweren symmetrischen Kreisel nicht zustande, sondern nur im Mittel, indem die Kreiselspitze kleine Zykloidenbögen beschreibt, die bei schneller Rotation zwischen zwei sehr nahe gleichen Kreisbögen liegen und die sich der Beobachtung vielfach entziehen (Fig. 130).

86. Das Potential kontinuierlich verbreiteter Massen, speziell einer homogenen Kugelschale; der Begriff des Gradienten.

Den Schluß dieses Kapitels sollen einige Ausführungen über Potentialtheorie bilden, die eine Vorbereitung zu den detaillierteren Auseinandersetzungen bilden, die wir in der Elastizitätstheorie und im zweiten Bande dieses Werkes in der Theorie der Elektrizität geben müssen. Das hier Folgende hat hauptsächlich den Zweck, uns mit den auftretenden Ausdrücken etwas vertraut zu machen; wir gewinnen dieselben

hier durch geeignete Verallgemeinerung der früher für das Potential diskreter Massenpunkte aufgestellten Werte.

In Gleichung (182) des V. Kapitels (pag. 286) hatten wir für das Potential eines Systems von Massenpunkten folgenden Ausdruck gefunden:

$$\Phi = -k \sum \frac{m_\lambda}{r_\lambda}.$$

Dabei ist k die sogenannte Gravitationskonstante, und r_λ bedeutet den Abstand des λ^{ten} Massenpunktes mit den Koordinaten $(x_\lambda, y_\lambda, z_\lambda)$ von dem Aufpunkt (x, y, z), in dem das Potential angegeben werden soll. Dieser Ausdruck verliert seine Bedeutung, wenn der Aufpunkt mit einem der Massenpunkte $(x_\lambda, y_\lambda, z_\lambda)$ zusammenfällt, da dann $\frac{1}{r_\lambda}$ unendlich wird. Bei fortgesetzter Annäherung an einen Massenpunkt ist es eben nicht mehr zulässig, sich die Masse als punktförmig vorzustellen, sondern jede noch so kleine Masse nimmt genau genommen einen endlichen Raum ein. Wir müssen daher die früheren Betrachtungen ergänzen, und zwar wollen wir uns die Materie der Einfachheit halber als kontinuierlich vorstellen, d. h. ihr eine bestimmte Dichte zuschreiben, die wir ε nennen wollen und die im allgemeinen als Funktion des Ortes zu betrachten sein wird. Die in einem Volumelement $d\tau = dx'\,dy'\,dz'$ vorhandene Masse ist dann $\varepsilon(x'\,y'\,z')\,dx'\,dy'\,dz'$ und der Anteil, den diese Masse zum Potential beiträgt, ist offenbar:

$$-\frac{k\,\varepsilon(x'\,y'\,z')\,dx'\,dy'\,dz'}{r},$$

wo r den Abstand zwischen Aufpunkt (xyz) und diesem Volumelement, dessen mittlere Koordinaten $(x'y'z')$ seien, bedeutet. Haben wir also endlich ausgedehnte Massen, so erhalten wir für das Potential eine Summe von ähnlichen Ausdrücken, die über den betrachteten Körper erstreckt ist, d. h. ein bestimmtes, über den Körper erstrecktes Integral. Also:

$$(93) \qquad \Phi = -k \iiint \frac{\varepsilon\,dx'\,dy'\,dz'}{r} = -k \int \frac{\varepsilon\,d\tau}{r}.$$

Dieser Ausdruck ist eine Funktion von x, y, z, d. h. den Koordinaten des Aufpunktes; die Integration dagegen erstreckt sich über $x'y'z'$, d. h. die mit räumlicher Dichtigkeit ε erfüllten Stellen des betreffenden Körpers. Es ist nun leicht, zu sehen, daß dieser Ausdruck endlich bleibt, auch wenn der Aufpunkt im Innern des betreffenden Körpers liegt, d. h. mit einem der Punkte $(x'y'z')$ koinzidiert. Für diesen Fall wird in dem Integranden allerdings $r = 0$, aber das Integral selbst wird nicht unendlich groß. Denn führt man Polarkoordinaten r, ϑ, φ ein, so kann man das Volumelement $d\tau$ schreiben:

$$d\tau = r^2\,dr \sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi.$$

Damit wird das Potential nach (93):

$$\Phi(x\,y\,z) = -k\int\frac{\varepsilon\cdot r^2\,d\,r\sin\vartheta\,d\,\vartheta\,d\,\varphi}{r} = -k\int\varepsilon\cdot r\,d\,r\sin\vartheta\,d\,\vartheta\,d\,\varphi,$$

und der Integrand wird für $r=0$ keineswegs unendlich groß, sondern sogar unendlich klein; der Ausdruck (93) für das Potential behält also seine Bedeutung bei auch für „innere" Punkte.

Betrachten wir nun die Komponenten der Anziehungskraft, die von unserem Körper auf die Masseneinheit ausgeübt wird, und nehmen wir den Aufpunkt zunächst außerhalb des Körpers an. Dann erhält man offenbar:

$$X = -k\int\frac{\varepsilon(x-x')}{r^3}\,d\,\tau,$$

$$Y = -k\int\frac{\varepsilon(y-y')}{r^3}\,d\,\tau,$$

$$Z = -k\int\frac{\varepsilon(z-z')}{r^3}\,d\,\tau.$$

Auch diese Ausdrücke bleiben endlich, wenn der Aufpunkt ins Innere des Körpers hineinrückt, wie man auf dieselbe Weise zeigen kann.

Nehmen wir wieder zunächst den Aufpunkt im Äußeren des Körpers an, so läßt sich leicht zeigen, daß die obigen Kraftkomponenten die negativen partiellen Ableitungen des Potentials sind, das durch (93) definiert ist. Denn da für einen äußeren Punkt $1/r$ stets endlich bleibt, so kann man die Differentiationen nach den Koordinaten des Aufpunktes unter dem Integralzeichen ausführen. So folgt zum Beispiel für:

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial x} = k\int\varepsilon(x'y'z')\,d\,\tau\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} = -k\int\frac{\varepsilon\cdot(x-x')}{r^3}\,d\,\tau,$$

und das ist wirklich nach der obigen Gleichung gleich X; also gilt jedenfalls für äußere Punkte die alte Beziehung:

$$X = -\frac{\partial\Phi}{\partial x},\quad Y = -\frac{\partial\Phi}{\partial y},\quad Z = -\frac{\partial\Phi}{\partial z}. \tag{94}$$

Liegt der Aufpunkt innerhalb der attrahierenden Materie, so läßt sich die Differentiation unter dem Integralzeichen nicht mehr ausführen, es läßt sich also nicht mehr auf die bisherige Weise zeigen, daß noch immer die Kraftkomponenten die negativen partiellen Ableitungen des Potentials sind. Vielmehr hat man zu diesem Zwecke einen geeigneten Grenzübergang auszuführen. Wir wollen jedoch an dieser Stelle nicht näher darauf eingehen, sondern die Allgemeingültigkeit dieser Beziehung als bewiesen annehmen. Wir müssen im zweiten Bande (in der Elektrizitätslehre) ohnehin noch einmal ausführlich auf alle diese Dinge eingehen.

Dagegen wollen wir die Beziehung, in der das Potential zur Kraft steht, und die durch (94) formuliert ist, in der Sprache der Vektoranalysis

ausdrücken. Dies geschieht mit Hilfe des Begriffes des „Gradienten" einer skalaren Funktion.

Es sei eine beliebige Funktion Φ gegeben; wir können derselben einen Vektor $\mathfrak{A}$ durch die Beziehung zuordnen:

$$\mathfrak{A}_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \mathfrak{A}_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \mathfrak{A}_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z};$$

dann gilt für eine beliebige Richtung s entsprechend, wie eine leichte Rechnung zeigt:

$$\mathfrak{A}_s = \frac{\partial \Phi}{\partial s}.$$

$\frac{\partial \Phi}{\partial s}$ stellt den auf die Längeneinheit bezogenen Zuwachs der skalaren Funktion Φ dar, wenn man in der Richtung s um das Stück ds

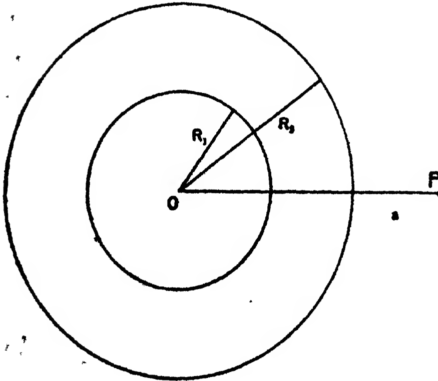


Fig. 131 a.

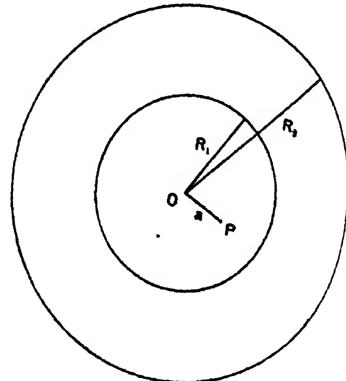


Fig. 131 b.

weitergeht; analoge Bedeutung haben natürlich $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$. Den so definierten Vektor $\mathfrak{A}$ nennt man den „Gradienten von Φ", geschrieben „grad Φ". Wir haben seinen Betrag und seine Richtung zu bestimmen. Der Betrag des Gradienten ist offenbar gleich

$$+\sqrt{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2};$$

seine Richtung ergibt sich aus folgender Erwägung: Die Komponente $\mathfrak{A}_s$ des Vektors $\mathfrak{A}$ wird selbstverständlich am größten, wenn die Richtung s mit der des Vektors selbst zusammenfällt, da dann $\mathfrak{A}_s$ direkt gleich $\mathfrak{A}$ wird. Gemäß der Bedeutung von $\frac{\partial \Phi}{\partial s}$ ist also in diesem Falle die Richtung von s, d. h. die des Vektors grad Φ, diejenige, in der die Funktion Φ den stärksten Anstieg hat. Die Richtung des Gradienten von Φ ist also allgemein die des stärksten Anstieges

von Φ. In dieser Ausdrucksweise läßt sich (94) jetzt schreiben, wenn die Gesamtkraft durch $\mathfrak{K}$ bezeichnet wird:

$$\mathfrak{K} = -\operatorname{grad} \Phi . \tag{95}$$

Wir wollen nunmehr einen speziellen Körper ins Auge fassen, nämlich eine Kugelschale vom inneren Radius R_1 und dem äußeren R_2 aus homogenem Material, d. h. ε sei konstant. Wir werden dabei sowohl den Fall untersuchen, daß der Aufpunkt außerhalb wie innerhalb des von Materie erfüllten Raumes liegt.

Zunächst nehmen wir den ersten Fall, der sich noch in zwei Unterfälle sondert, je nachdem der Abstand a des Aufpunktes P vom Zen-

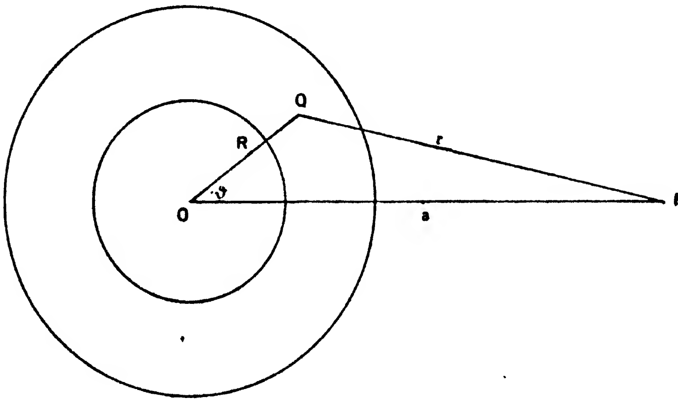


Fig. 132.

trum 0 der beiden die Schale bildenden Kugelflächen größer als R_2 oder kleiner als R_1 ist (Figg. 131a u. 131b), d. h. je nachdem der Aufpunkt außerhalb oder innerhalb des Hohlraumes der Schale liegt. In beiden Fällen ist offenbar P ein äußerer Punkt.

Nehmen wir (Fig. 132) OP als Achse eines Polarkoordinatensystems (R, ϑ, φ), d. h. nennen wir den Winkel, den ein von O nach einem beliebigen Punkte Q der Schale gezogener Radiusvektor $\overrightarrow{OQ}$ mit OP bildet, ϑ, und nennen wir den Winkel, den die Ebene OPQ mit einer festen Ebene bildet, φ, so wird die Kugelschale beschrieben, wenn R zwischen R_1 und R_2, ϑ zwischen O und π, φ zwischen O und 2π variiert. Endlich werde der Abstand des Q enthaltenden Volumelementes

$$d\tau = R^2\, d R \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$$

vom Aufpunkte P durch r bezeichnet.

Wir haben nun das Integral (93) für unseren Fall auszuwerten. Das gibt:

$$(96)\quad \begin{cases} \Phi = -k\varepsilon \int\limits_{R_1}^{R_2}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{R^2\,dR\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi}{r} \\ \quad = -k\varepsilon \int\limits_{R_1}^{R_2}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{R^2\,dR\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi}{\sqrt{a^2+R^2-2aR\cos\vartheta}}, \end{cases}$$

wobei die Wurzel mit dem Pluszeichen zu nehmen ist, da r eine stets positive Größe bedeutet. Die Integrationen nach ϑ und φ lassen sich sofort ausführen, und man erhält so:

$$(97)\quad \Phi = -k\varepsilon\cdot 2\pi \int\limits_{R_1}^{R_2} R\,dR\left[\sqrt{a^2+R^2+2aR} - \sqrt{a^2+R^2-2aR}\right].$$

Jetzt sondern sich die vorher besprochenen Unterfälle ab. Denn die Wurzel $\sqrt{a^2+R^2-2aR} = \pm(a-R)$ ist so zu wählen, daß ihr Wert positiv ausfällt, also im ersten Unterfalle (Fig. 131a) ist $a-R$, im zweiten (Fig. 131b) $R-a$ zu wählen. Also ergibt sich im ersten Unterfalle $(a > R_2)$, für den wir das Potential durch Φ_a' bezeichnen:

$$(98)\quad \Phi_a' = -\frac{4\pi k\varepsilon}{a}\int\limits_{R_1}^{R_2} R^2\,dR = -\frac{4\pi}{3}\frac{k\varepsilon}{a}(R_2^3 - R_1^3),$$

oder, wenn wir bedenken, daß $\frac{4\pi}{3}\varepsilon(R_2^3 - R_1^3)$ gleich der Masse M ist, die in der Kugelschale enthalten ist, so ist einfacher:

$$(98\text{a})\quad \Phi_a' = -\frac{kM}{a} = -\frac{kM}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

d. h. in einem äußeren, von der Kugelschale nicht umschlossenen Punkte verhält sich das Potential so, als ob ihre Masse im Kugelzentrum konzentriert wäre; die Kugelschale wirkt also in diesem Falle wie ein einzelner Massenpunkt. Das gilt offenbar auch noch, wenn wir im Vorhergehenden $R_1 = 0$, d. h. an Stelle einer Schale eine Vollkugel nehmen. Auch dann kann die ganze Masse im Zentrum der Kugel konzentriert gedacht werden, wenn es sich um die Berechnung der Wirkung auf einen äußeren Punkt handelt. Das Gleiche gilt natürlich auch für die Anziehungskräfte, die eine Vollkugel auf einen äußeren Punkt ausübt. Dieses Resultat füllt eine Lücke aus, die wir in Nr. 61 lassen mußten. Dort setzten wir bei der Berechnung der Wirkung der Erde auf einen an ihrer Oberfläche befindlichen Punkt voraus, daß die Masse der Erde in dem Erdmittelpunkte konzentriert gedacht werden könne; diese Voraussetzung ist jetzt insoweit bewiesen, als man die Erde als homogene Kugel betrachten darf.

Im zweiten Unterfalle ($a < R_1$) erhalten wir dagegen aus (97):

$$\Phi = -\frac{2\pi k \varepsilon}{a}\int_{R_1}^{R_2} R\,dR \cdot 2a,$$

oder ausgerechnet (das Potential bezeichnen wir jetzt mit Φ_a''):

(99) $$\Phi_a'' = -2\pi k \varepsilon (R_2^2 - R_1^2) = \text{Const.},$$

d. h. das Potential einer Kugelschale in bezug auf einen äußeren vom Hohlraum der Schale umschlossenen Punkt ist konstant. Daraus folgt für die Kräfte das wichtige Resultat, daß dieselben für einen umschlossenen äußeren Punkt gleich Null sind.

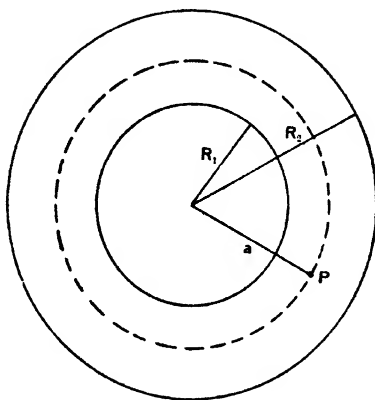


Fig. 133.

Wir betrachten jetzt den zweiten Hauptfall, daß der Aufpunkt P im Innern der Kugelschale liegt (Fig. 133), und nennen für diesen Fall das Potential Φ_i.

Dieser Fall kann auf die beiden vorher behandelten zurückgeführt werden. Denn schlagen wir um das Kugelzentrum O mit dem Radius a die durch den Aufpunkt P gehende Kugel (in der Figur punktiert), so erhält man zwei Kugelschalen, eine innere und eine äußere. Für die innere sind die Bedingungen des ersten Unterfalles erfüllt (Gleichung 98), für die äußere diejenigen der zweiten (Gleichung 99). Addieren wir die Potentiale beider Kugelschalen, so erhalten wir das Potential der gegebenen Kugelschale auf einen inneren Punkt. Man erhält so in leichter Rechnung:

(100) $$\Phi_i = -\frac{4\pi}{3}\cdot\frac{k\varepsilon}{a}(a^3 - R_1^3) - 2\pi k \varepsilon (R_2^2 - a^2),$$

und wenn man wieder R_1 gleich O setzt, so folgt für das Potential einer Vollkugel mit dem Radius R_2 auf einen inneren Punkt im Abstande a vom Zentrum:

(101) $$\Phi_i = -2\pi k \varepsilon \{R_2^2 - \tfrac{1}{3}a^2\},$$

oder endlich, da $a^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ist, wenn wir den Koordinatenanfangspunkt ins Kugelzentrum legen:

(101a) $$\Phi_i = -2\pi k \varepsilon \{R_2^2 - \tfrac{1}{3}(x^2 + y^2 + z^2)\}.$$

Die Kraftkomponenten findet man hieraus durch Differentiation nach den Koordinaten:

$$(101\text{b})\quad \begin{cases} X = -\frac{\partial \Phi_i}{\partial x} = -\frac{4\pi}{3} k \varepsilon \cdot x, \\ Y = -\frac{4\pi}{3} k \varepsilon \cdot y, \quad Z = -\frac{4\pi}{3} k \varepsilon \cdot z, \end{cases}$$

d. h. die Kraft auf einen inneren Punkt ist proportional dem Abstande vom Zentrum, während für einen äußeren Punkt aus Gleichung (98a) die Kraft sich als umgekehrt proportional dem Quadrate des Abstandes ergibt.

Die letzteren Formeln sind unter anderem von Nutzen, wenn wir die Differentialgleichung bestimmen wollen, der das Potential (98): $-k\int\frac{\varepsilon\, d\tau}{r}$ in allen Punkten des Raumes gehorcht; bevor wir dazu übergehen, wollen wir noch zwei wichtige Typen von Potentialfunktionen besprechen.

87. Potential von Oberflächenbelegungen und Doppelschichten.

Wir haben in der vorigen Nummer den Ausdruck $-k\sum\frac{m_\lambda}{r_\lambda}$ derartig verallgemeinert, daß wir annahmen, die Massenpunkte seien kontinuierlich über ein bestimmtes Raumgebiet verteilt. Nunmehr wollen wir annehmen, daß Massenpunkte auf einer Fläche S angeordnet seien, deren Zahl wir allmählich immer mehr und mehr wachsen lassen, jedoch so, daß die auf die Flächeneinheit entfallende Masse endlich bleibt. Gehen wir schließlich zu einer kontinuierlichen Verteilung der Massen auf der Fläche über, wobei ebenfalls die Masse pro Flächeneinheit, die wir η nennen wollen, die sogenannte „Flächendichte", endlich bleibt, so erhalten wir eine sogenannte „Oberflächenbelegung". Nennen wir ein Flächenelement mit den Koordinaten $(x'y'z')$ dS, so ist die Masse desselben $\eta\, dS$; seine Entfernung vom Aufpunkte sei r; dann erhalten wir als Potential einer Oberflächenbelegung den Ausdruck:

$$(102)\qquad \Phi = -k\int\frac{\eta\, dS}{r}.$$

Dieser Ausdruck ist wieder Funktion von x, y, z, d. h. den Koordinaten des Aufpunktes; die Integration erstreckt sich über x', y', z', d. h. alle Punkte der Fläche, für die η von Null verschieden ist. Man zeigt leicht — ebenso wie für räumliche Potentiale in der vorigen Nummer — daß der Ausdruck (102) auch dann endlich bleibt, wenn der Aufpunkt in die Fläche S hineinrückt, r also in dem Integrationsbereich den Wert Null annehmen kann. Mit Potentialen dieser Art werden wir es hauptsächlich in der Elektrizitätslehre zu tun haben, da die elektrische Ladung im Gleichgewichtszustande auf Leitern nur an der Oberfläche sitzt; dort werden wir uns auch mit den Eigenschaften von (102) genauer zu beschäftigen haben. Doch treten Integrale von

der Form (102) auch schon in der Elastizitätslehre auf, weswegen die kurzen Betrachtungen dieser Nummer schon hier notwendig waren.

Ebenso eine Rolle in der Theorie der Elektrizität (wie auch der Elastizität) spielen gewisse Anordnungen von Flächen, sog. „Doppelschichten". Das Newtonsche Attraktionsgesetz kennt nur Anziehungen, keine Abstoßungen; solche aber gibt es bei den Kräften, die elektrische Ladungen aufeinander ausüben. Abstoßende Kräfte vergrößern die Entfernung r, sind also positiv zu rechnen. Wir wollen nun einmal auf Flächen verteilte Massen von der Dichte η fingieren, die abstoßende Kräfte aufeinander ausüben; dann würde das Potential solcher Massen nach (102) sein:

$$\Phi = + k \int \frac{\eta \, dS}{r}. \tag{102a}$$

Wir wollen uns nun zwei Flächen denken (Fig. 134), von denen die eine mit anziehender, die andere mit abstoßender Materie von gleicher Dichtigkeit η belegt sei.

Diese beiden Flächen seien in der Figur durch das $\pm$-Zeichen charakterisiert. Der sehr kleine Abstand der beiden Flächen voneinander sei konstant und zwar gleich h. Greifen wir jetzt auf der einen Fläche ein Element derselben heraus, dessen Größe dS sei, und ziehen wir durch den Rand desselben die Normalen, so schneiden diese auf der anderen Fläche ebenfalls ein Element heraus, dessen Größe bis auf Glieder höherer Ordnung ebenfalls dS ist. Der Abstand dieser beiden „entsprechenden" Flächenelemente von dem Aufpunkt P sei resp. r_+ und r_-; dann haben wir als Potential dieser beiden „entsprechenden" Flächenelemente nach (102) und (102a):

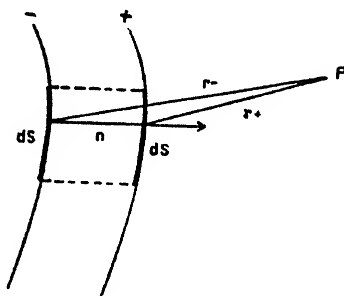


Fig. 134.

$$d\Phi = \frac{k \eta \, dS}{r_+} - \frac{k \eta \, dS}{r_-} = k \eta \, dS \left\{ \frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right\},$$

also haben wir als Potential der beiden ganzen Flächen einen Ausdruck von der Form:

$$\Phi = k \int \eta \, dS \left\{ \frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right\}. \tag{103}$$

Wir wollen nun die beiden Flächen einander immer näher rücken lassen. Würden wir dabei η unverändert lassen, so würde das Potential nach (103) immer mehr abnehmen, da die Differenz $\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}$ der Null immer näher kommt. Wir wollen jedoch η entsprechend wachsen lassen, so daß das Produkt $\eta \cdot h$ aus Flächendichte η und Flächenabstand h

stets endlich bleibt. Nimmt h zu Null ab, so wird nach dieser Festsetzung gleichzeitig η unendlich. Diese Anordnung von Massen nennt man im Grenzfall eine „Doppelschicht", das Produkt ηh das „Moment" derselben.

In dem jetzt betrachteten Grenzfalle, wo h unendlich klein werdend gedacht wird, können wir (103) einfacher schreiben, da r_+ und r_- nur um einen infinitesimalen Betrag voneinander verschieden sind. Entwickeln wir r_- nach dem Taylorschen Lehrsatze und brechen hinter dem zweiten Gliede ab, so haben wir:

$$r_- = r_+ + \left(\frac{\partial r_+}{\partial n}\right) h; \tag{104}$$

die positive Richtung der Normale n ist dabei von der negativen zur positiven Fläche hin gerichtet (Fig. 134). Zunächst wird aus (103):

$$\Phi = k \int \eta \frac{r_- - r_+}{r_- \cdot r_+} \cdot dS = k \int \eta \frac{r_- - r_+}{r_+^2} dS.$$

Für das Produkt $r_- \cdot r_+$ ist dabei einfach r_+^2 gesetzt, was nach dem Vorgehenden nur um Größen höherer Ordnung davon verschieden ist. Dann können wir endlich auch den Index $+$ an r fortlassen, indem wir unter r jetzt einfach die Entfernung eines Elementes der Doppelschicht vom Aufpunkt verstehen, und so erhalten wir schließlich:

$$\Phi = k \int \frac{\eta \cdot h}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial n} dS = -k \int \eta h \cdot \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dS. \tag{105}$$

In dieser Form stellt sich also das Potential einer Doppelschicht dar. Solchen Ausdrücken werden wir ebenfalls schon in der Elastizitätslehre begegnen, die dann ihre Deutung als Doppelschichtpotentiale finden können. Die Eigenschaften dieser Potentiale werden wir in extenso allerdings erst im zweiten Bande untersuchen.

88. Die Poissonsche Differentialgleichung.

Die Laplacesche Differentialgleichung $\Delta\Phi = 0$ versagt für den Fall, daß wir mit dem Aufpunkt unendlich nahe an den Massenpunkt m_1 heranrücken. Welche Gleichung innerhalb der in natura doch stets ausgedehnten Massenpunkte gilt, kann durch die früheren Betrachtungen nicht entschieden werden, vielmehr ist gerade dazu die Vorstellung kontinuierlich verbreiteter Massen nützlich. Betrachten wir zunächst nur Punkte, die außerhalb des mit Materie gefüllten Raumes liegen, so gilt für diese jedenfalls die Laplacesche Gleichung $\Delta\Phi = 0$. Denn in dem Ausdruck $\int \frac{\varepsilon d\tau}{r}$ $\left(\text{oder auch } \int \frac{\eta dS}{r} \text{ oder } \int \eta h \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dS\right)$ wird für äußere Punkte r niemals gleich Null, also kann man die Differentiationen $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$,

$\frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ unter dem Integralzeichen ausführen, und das liefert, da eben $\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = 0$, stets $\Delta\Phi = 0$.

Dieser modus procedendi ist nicht mehr brauchbar, wenn der Aufpunkt in der anziehenden Materie liegt. Denn dann kommt in dem Integrationsgebiet der Wert $r = 0$ vor, und daher ist die Differentiation unter dem Integralzeichen nicht mehr statthaft. Wir wollen für das folgende annehmen, daß die Dichte ε konstant sei; das vereinfacht unsere Rechnung sehr erheblich. Das Resultat gilt aber allgemein, wie wir später sehen werden. In Fig. 135 bedeute K den anziehenden Körper, in dessen Innern der Punkt P liege.

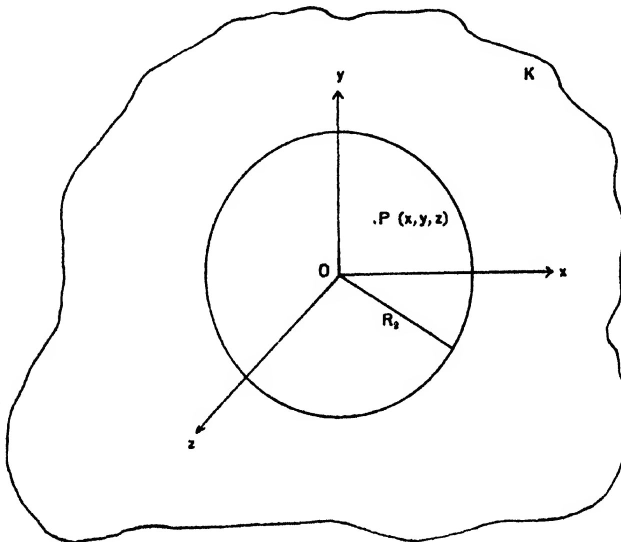


Fig. 135.

Um in diesem Falle zum Ziele zu kommen, schlagen wir um einen Punkt O, den wir zum Koordinatenanfangspunkt nehmen wollen, eine Kugelfläche derartig, daß P innerhalb dieser Kugelfläche und die Kugelfläche selbst noch ganz innerhalb des Körpers K liegt. Wenn man O hinreichend nahe an P wählt, so ist das immer zu erzielen. Dann können wir das Potential des Körpers K aus zwei Teilpotentialen zusammensetzen, dem der Kugel (Φ_1) und dem von der Kugel nicht umschlossenen Körperteil (Φ_2). In dem Ausdrucke für Φ_2 wird, da der Aufpunkt außerhalb des betreffenden Körperteiles liegt, r nicht gleich Null, also kann in Φ_2 unter dem Integralzeichen differenziert werden. Das liefert $\Delta\Phi_2 = 0$. Uns interessiert also jetzt nur der Teil Φ_1. Nennen wir den Radius der um O geschlagenen Kugel R_2, so können wir direkt die

Formel (101 a) hier anwenden; denn hier ist ja P innerer Punkt der Kugel. Also wird das Gesamtpotential des Körpers K in P:

(106) $$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \Phi_2 - 2\pi k\varepsilon\{R_2^2 - \tfrac{1}{3}(x^2 + y^2 + z^2)\},$$

Bilden wir jetzt die Operation Δ und beachten, daß $\Delta\Phi_2 = 0$, so folgt sofort:

(107) $$\Delta\Phi = \Delta\Phi_1 + \Delta\Phi_2 = 4\pi k\varepsilon.$$

Diese Differentialgleichung ist zuerst von Poisson aufgestellt worden und trägt seinen Namen. Sie ist hier nur für homogene Körper abgeleitet worden, gilt aber allgemein; sie umfaßt als speziellen Fall für $\varepsilon = 0$ die Laplacesche Gleichung. Mit der allgemeinen Lösung der Poissonschen Gleichung beschäftigt sich die Potentialtheorie; wir haben oben nur gezeigt, daß der Ausdruck $\int \frac{\varepsilon\, d\tau}{r}$ ein partikuläres Integral dieser Gleichung ist, und wir werden erst später auf die allgemeine Integration eingehen. Der ganze hier eingefügte Abschnitt über Potentiale sollte überhaupt nur einige Begriffe vorbereiten und geläufig machen.

Drittes Buch.

Mechanik der Kontinua (Elastizitätslehre und Hydrodynamik).

Einleitung.

89. Allgemeines.

Während wir bisher in der Mechanik uns nur mit Massenpunkten und starren Körpern beschäftigten, werden wir jetzt unsere Untersuchungen gewissermaßen verfeinern. Bisher nahmen wir ja an, daß die Gestalt des Körpers durch die wirkenden Kräfte nicht verändert werde, und alles, was wir zu tun hatten, war, die Fortbewegung des Schwerpunktes des betreffenden Körpers und die Rotation um eine durch den Schwerpunkt gehende Rotationsachse zu bestimmen. Diese Aufgabe kann als grundsätzlich gelöst betrachtet werden: Die allgemeinen Gleichungen sind bekannt, und es bleibt im Einzelfalle nur noch mathematische Arbeit zu tun.

Jetzt dagegen wollen wir einen Schritt weiter gehen. Denn wenn auch die Vorstellung, daß ein Körper starr sei, in der Natur vielfach mit großer Annäherung realisiert ist, so ist es doch eben nur ein spezieller Grenzfall, der, streng genommen, nie vorliegt. Bei genauerer Beobachtung konstatiert man vielmehr, daß alle Körper durch die angreifenden Kräfte mehr oder weniger deformiert werden. Mit der Untersuchung dieser Deformation in ihrer Abhängigkeit von den äußeren Kräften haben wir uns nun zu beschäftigen. Von der Translations- und Rotationsbewegung dieser deformierbaren Körper können wir dabei absehen, denn das ist eine bereits in der Mechanik starrer Körper erledigte Aufgabe.

Die deformierbaren Körper nennt man im Gegensatz zu den bisher betrachteten starren Gebilden „elastische", und die Eigenschaft, vermöge deren sie Formänderungen zeigen, „Elastizität" im Gegensatz zur „Starrheit". Eine genauere Definition des Begriffs „Elastizität" kann erst später gegeben werden, und hier sei nur noch folgendes bemerkt: Zwischen den elastischen Eigenschaften der Körperwelt bestehen starke quantitative Unterschiede. Läßt man z. B. dieselbe äußere Kraft einmal auf

einen Glaskörper, ein anderes Mal auf einen Körper gleicher Gestalt aus Kautschuk wirken, so ist schon aus der Erfahrung des täglichen Lebens bekannt, daß im letzteren Falle die auftretenden Deformationen viel größer sind als im ersteren. Man nennt Glas den „stärker elastischen“, Kautschuk im Verhältnis zu Glas den „schwächer elastischen“ Körper. Man beachte, daß diese Ausdrucksweise sich keineswegs mit dem Sprachgebrauch des täglichen Lebens deckt.

90. Molekulartheorie und Kontinuumshypothese (Natur der elastischen Medien).

Bevor wir nun an unsere eigentliche Aufgabe herangehen, müssen wir zunächst einen eigentümlichen Umstand besprechen. In der Mechanik diskreter Massenpunkte hatten wir einen starren Körper einfach durch die Bedingung definiert, daß der Abstand je zweier seiner materiellen Punkte $(x_a\, y_a\, z_a)$ und $(x_b\, y_b\, z_b)$ voneinander konstant ist, d. h.

$$\sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2 + (z_a - z_b)^2} = r_{ab} = \text{Const.}$$

Wir hatten uns aber nicht darum gekümmert, ob in der Natur solche Körper realisiert werden können. Jetzt, wo wir mit dem Begriff der elastischen Körper bekannt geworden sind, ist es für das Folgende doch notwendig, daß wir uns klar machen, wodurch denn eigentlich die Eigenschaft der Elastizität der Körper hervorgerufen wird. Dabei wird von selbst ein Licht auf die Natur der starren Körper fallen.

Die am nächsten liegende Vorstellung über die Natur des elastischen Körpers ist die folgende: Man denkt sich ihn aufgebaut aus einer sehr großen Anzahl kleinster Teilchen, die wir etwa Moleküle nennen können; diese Annahme ist auch in Übereinstimmung mit den Anschauungen der Chemie und zahlreichen anderen Erfahrungen. Zwischen diesen Molekülen müssen wir Kräfte — sogenannte „innere“ Kräfte — als wirkend annehmen, die den Körper zusammenhalten und ihm seine Gestalt geben. Sind keine äußeren Kräfte vorhanden, so nimmt der Körper eine gewisse Gestalt an, die wir die „Normalgestalt“ nennen wollen. Lassen wir aber äußere Kräfte wirken, so muß nach den allgemeinen Gesetzen des Gleichgewichtes die Konfiguration der Moleküle, die unseren Körper bilden, sich ändern, d. h. die Normalgestalt geht verloren, der Körper nimmt unter der gemeinsamen Wirkung der inneren und der äußeren Kräfte eine neue Gestalt an. Er geht aber im allgemeinen wieder in seine Normalgestalt zurück, wenn die äußeren Kräfte wieder verschwinden.

Hier haben wir also ein Modell eines Körpers vor uns, der unter dem Einfluß äußerer Kräfte sich deformiert, den wir also als elastisch bezeichnen müssen. Da wir die Eigenschaft der Elastizität durch die molekulare Struktur erklären wollen, wäre es offenbar ein Circulus vitiosus, wenn wir nun die Moleküle ebenfalls als elastisch annehmen

wollten; diesen müssen wir vielmehr offenbar die Eigenschaft der Starrheit im obenbezeichneten Sinne des Wortes zuschreiben.

Akzeptieren wir diese Erklärung, so haben wir die Elastizität zurückgeführt auf die „inneren" Kräfte zwischen starren Gebilden. Die Starrheit selbst bleibt als primärer Begriff unbegreiflich. Dieser Standpunkt ist derjenige, der sich fast von selbst aufdrängt und der auch historisch bei der Entwicklung der Theorie der Elastizität zunächst in den Vordergrund getreten ist.

Aber es ist auch eine ganz andere Auffassung möglich. Wir können versuchen, den Begriff der Starrheit zu verstehen, wobei wir dann die Elastizität als primären Begriff unerklärt lassen müssen. Denn wenn wir uns an die Beobachtung halten, daß alle Körper mehr oder weniger elastisch sind, so werden wir als starr von diesem Standpunkt aus einen Körper bezeichnen müssen, der „unendlich stark elastisch" ist, d. h. nach der oben gegebenen Definition durch sehr starke äußere Kräfte nur minimale — im Grenzfall gar keine — Deformationen erfährt. Hier wird ein starrer Körper als Grenzfall eines elastischen aufgefaßt, die Starrheit durch die Elastizität verständlich gemacht.

In dieser Auffassung bleibt die Elastizität ganz ungeklärt, und es liegt daher auch keine Veranlassung vor, die elastischen Körper als aus Molekülen aufgebaut zu denken. Vielmehr liegt es nahe, die entgegengesetzte Annahme zu machen, die sich durch ihre Einfachheit empfiehlt, daß der Körper, wie es ja übrigens auch unsere Sinne zu zeigen scheinen, kontinuierlich ist.

Mathematisch lassen sich die beiden, scheinbar so verschiedenen Vorstellungsweisen versöhnen. Denn wir können uns auch das Volumen eines aus Molekülen aufgebauten Körpers in Volumelemente geteilt denken, und diese so groß wählen, daß ein solches immer noch sehr viele Moleküle enthält; derartige Volumelemente nennt man wohl „physikalisch unendlich klein". Man muß nun Mittelwerte der Kräfte bilden, die von den einzelnen Molekülen eines Volumelementes ausgehen, und kann diese Mittelwerte dann als die Kräfte betrachten, die ein Volumelement eines Kontinuums auf die benachbarten ausübt, womit offenbar die Brücke zwischen beiden Anschauungsweisen geschlagen ist. Diese Art der Mittelwertsbildung, von der wir hier natürlich nur eine oberflächliche Andeutung geben konnten, wird uns im zweiten Bande dieses Werkes, in der Elektronentheorie, zu beschäftigen haben.

Beide Anschauungsweisen haben ihre Vorteile und Nachteile. Der Vorteil der Molekulartheorie der Elastizität besteht hauptsächlich darin, daß die ihr zugrunde liegende Vorstellung einer molekularen Struktur der Materie von fast unzählig vielen Tatsachen gefordert wird; der Nachteil derselben darin, daß eine Molekulartheorie der Elastizität notwendig Hypothesen über die Natur der uns doch wesentlich noch unbekannten Molekularkräfte machen muß, die zurzeit nicht hinreichend

gestützt werden können. Das hat sich auch bald bei den alten Molekulartheorien gezeigt, deren Resultate in vielen Fällen mit der Wirklichkeit nicht übereinstimmten, weil eben die zugrunde gelegten Hypothesen nicht zutrafen.

Im Gegensatz zur Molekulartheorie hat die Vorstellung von der Kontinuität der elastischen Medien den Vorteil, daß man solcher Hypothesen nicht bedarf. Letztere ist daher beim augenblicklichen Stande der Wissenschaft vorzuziehen. Auch wir wollen diese Annahme machen, und so rechtfertigt sich der Titel dieses Buches: „Mechanik der Kontinua".

Freilich darf nicht vergessen werden, daß dieser Standpunkt kein definitiver sein kann. Das Ideal bleibt stets eine Molekulartheorie, die immer einen tieferen Einblick in die Vorgänge gewähren kann. Deshalb ist natürlich auch die Ausbildung der Molekulartheorien dringend notwendig. W. Voigt ist es auch gelungen, die älteren Molekulartheorien wesentlich zu verbessern. Dennoch ziehen wir der Einfachheit halber die Kontinuumshypothese vor. Wir verzichten daher von dem hier eingenommenen Standpunkte aus freiwillig auf das Verständnis mancher Prozesse, z. B. des Bruches oder des Zerreißens von Materialien, die ursprünglich bei der historischen Entwicklung der Elastizitätstheorie eine große Rolle gespielt haben. Derartige Vorgänge schließen wir notgedrungen von vornherein aus. Es bleibt für die Elastizitätstheorie also die Aufgabe übrig, bei gegebenen äußeren Kräften die entstehenden Deformationen zu berechnen oder umgekehrt, bei gegebener Deformation die wirksamen äußeren Kräfte anzugeben. Weitere notwendige Einschränkungen dieser Aufgabe werden wir später kennen lernen.

91. Ungeordnete und geordnete Bewegungen.

Zwischen den Bewegungen, die einerseits die Moleküle eines Körpers und anderseits die Volumelemente eines Kontinuums ausführen können, besteht ein fundamentaler Unterschied.

Denken wir uns ein Gas in ein ruhendes Gefäß eingeschlossen, oder, wie man sich im Anschluß an ein Beispiel von Helmholtz etwas drastischer ausdrücken kann, einen Mückenschwarm. Jede Mücke ist von der benachbarten völlig unabhängig, ihre Bewegungen sind völlig verschieden von denjenigen der benachbarten. Eine solche Bewegung können auch die Moleküle eines Körpers ausführen, und wir nennen sie in leichtverständlicher Bezeichnung „Ungeordnete Bewegung". Auf eine solche führt z. B. die sogenannte „Mechanische Wärmetheorie" die Erscheinungen der Wärme zurück. Es ist aber klar, daß solche Bewegungsvorgänge bei einem Kontinuum nicht vorkommen können. Denn die Zerlegung in Volumelemente ist ja keine reale, sondern eine bloß gedachte, ist lediglich ein mathematisches Hilfsmittel.

Die aneinandergrenzenden Volumelemente sind voneinander nicht unabhängig, sondern müssen notwendigerweise in enger Beziehung zueinander stehen, da sonst der Körper auseinandergerissen werden würde. Wenn also ein Volumelement eine gewisse Bewegung ausführt, so müssen die benachbarten ähnliche Bewegungen ausführen, die um so mehr mit derjenigen des ersten Volumelementes übereinstimmen, je näher die Volumelemente einander sind. Diese Art von Bewegung, mit der wir es im folgenden allein zu tun haben werden, da wir ja die elastischen Medien als Kontinua denken, nennen wir „Geordnete Bewegung".

Geordnete Bewegungen können natürlich neben den ungeordneten bei den Molekülen eines Körpers vorkommen. Wenn wir z. B. dem obenerwähnten Gefäß, in das wir den Mückenschwarm eingeschlossen haben, etwa eine geradlinige Bewegung erteilen, so erteilen wir allen Mücken (Molekülen) eine geordnete Bewegung, und zwar eine besonders einfache, bei der alle gleiche Geschwindigkeit in derselben Richtung haben. Lassen wir das Gefäß sich auch deformieren, so deformiert sich auch der Mückenschwarm, und wir erhalten eine kompliziertere, aber zweifellos geordnete Bewegung, neben der ungeordneten. Natürlich kann man sich das ganze Gefäß auch schließlich wegdenken und die ganze Überlegung auf einen freien Schwarm anwenden.

Die obigen Erwägungen zeigen uns, daß man bei den wirklich vorhandenen Körpern (die aus Molekülen bestehen, welch letztere infolge ihres Wärmezustandes stets ungeordnete Bewegungen ausführen) zwischen den geordneten und ungeordneten Bewegungen unterscheiden kann. Man kann also grundsätzlich die Phänomene der Elastizität, die auf geordneten Bewegungen beruhen, behandeln, ohne auf die ungeordneten Wärmebewegungen eingehen zu müssen. Diese Möglichkeit mußte nachgewiesen werden, da andernfalls die Vorstellung der elastischen Medien als Kontinua unzulässig gewesen wäre.

Unsere nächste Aufgabe ist nun eine geometrische Untersuchung der in kontinuierlichen Medien entstehenden Deformationen. Diese Aufgabe behandeln wir im IX. Kapitel: „Kinematik eines Kontinuums". In den Kapiteln X und XI werden die Kräfte untersucht, welche diese Deformationen hervorbringen; diese Abschnitte gehören der „allgemeinen Dynamik" eines Kontinuums an. Alle übrigen Kapitel dieses Buches sind dann der speziellen Dynamik gewidmet. Da die spezielle Dynamik hier einen sehr großen Raum gegenüber der allgemeinen Dynamik einnimmt, so ist hier die strenge Einteilung des I. und II. Buches in Kinematik, allgemeine und spezielle Dynamik in den Kapitelüberschriften nicht mehr zum Ausdruck gebracht worden.

Neuntes Kapitel.

Kinematik eines Kontinuums.

92. Analytische Darstellung von Deformationen; lineare Deformationen.

Die Bewegung eines Volumelementes oder, wie wir kurz, aber nicht ganz exakt, uns ausdrücken können, eines „Punktes" des elastischen Mediums ist bekannt, wenn seine drei Koordinaten (x, y, z), die auf irgendein im Raume festes Koordinatensystem bezogen sind, als Funktionen der Zeit t bestimmt worden sind. Also in Gleichungen ausgedrückt:

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t)\,. \tag{1}$$

Liegt das Koordinatensystem nicht im Raume fest, sondern bewegt es sich irgendwie in demselben, so muß natürlich außerdem die Bewegung des Koordinatensystems bekannt sein. In vielen Fällen kommt es jedoch nur darauf an, die Bewegung relativ zum bewegten System zu kennen.

Die in Gleichung (1) auftretenden Funktionen müssen, aus dem nämlichen Grunde wie in der Mechanik diskreter Massenpunkte, stetige Funktionen der Zeit sein, sowie stetige Differentialquotienten nach der Zeit besitzen, denen die Bedeutung der Geschwindigkeitskomponenten und der Beschleunigungskomponenten zukommt. Wir würden also in dieser Bezeichnungsweise haben, wenn wir die Geschwindigkeitskomponenten resp. u, v, w nennen:

$$u = \frac{dx}{dt}, \quad v = \frac{dy}{dt}, \quad w = \frac{dz}{dt}, \tag{2}$$

und ganz entsprechend für die Beschleunigung. Es sei nochmals hervorgehoben, daß dabei x, y, z stets die Koordinaten eines und desselben Massenpunktes bedeuten.

Man kann aber auch etwas anders verfahren. Wir greifen etwa zur Zeit $t=0$ einen Massenpunkt heraus, der zu dieser Zeit mit dem Raumpunkte (a, b, c) zusammenfällt. Im Laufe der Zeit gelangt dieser Massenpunkt an immer andere Stellen des Raumes. Dies können wir dadurch ausdrücken, daß wir (a, b, c), d. h. die betreffende Stelle im Raume festhalten, und die Zuwächse (ξ, η, ζ) dieser Größen untersuchen. Zu einer anderen Zeit befindet sich also der nämliche Massenpunkt an der Stelle des Raumpunktes, der durch die Koordinaten $a+\xi$, $b+\eta$,

$c+\zeta$ charakterisiert ist. Die Größen ξ, η, ζ bezeichnet man als die Komponenten des Vektors der „Verschiebung" oder der „Verrückung" des betreffenden Massenpunktes. Sie sind natürlich Funktionen der Zeit, aber auch von a, b, c, den „Anfangswerten", abhängig. Wir erhalten also eine zweite Darstellung durch die Formeln:

$$(3) \qquad \xi = \xi(a, b, c, t); \quad \eta = \eta(a, b, c, t); \quad \zeta = \zeta(a, b, c, t).$$

Denken wir uns die Verrückungen $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ in der kleinen Zeit dt vor sich gegangen, so stellen die Quotienten $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$, wobei die Differentiationen bei konstantem (a, b, c) vorgenommen sind, d. h. die Ableitungen von ξ, η, ζ nach t, die Komponenten der Geschwindigkeit dar, und die zweiten Ableitungen $\frac{d^2\xi}{dt^2}$, $\frac{d^2\eta}{dt^2}$, $\frac{d^2\zeta}{dt^2}$ — ebenfalls bei konstantem a, b, c — die entsprechenden Komponenten der Beschleunigung.

Um auszudrücken, daß die Differentiationen nach t sich stets auf ein und dasselbe Massenteilchen beziehen (d. h. a, b, c festgehalten werden), schreibt man diese Differentiationen mit großem lateinischen D. Also haben wir:

$$(4) \qquad u = \frac{D\xi}{Dt}, \quad v = \frac{D\eta}{Dt}, \quad w = \frac{D\zeta}{Dt},$$

oder auch, da $x = a + \xi$, $y = b + \eta$, $z = b + \zeta$ und die a, b, c unabhängig von t sind:

$$(4a) \qquad u = \frac{Dx}{Dt}, \quad v = \frac{Dy}{Dt}, \quad w = \frac{Dz}{Dt}.$$

Ebenso hat man für die Komponenten der Beschleunigung die verschiedenen Ausdrücke:

$$(4b) \qquad \frac{D^2\xi}{Dt^2} = \frac{D^2x}{Dt^2} = \frac{Du}{Dt}; \quad \frac{D^2\eta}{Dt^2} = \frac{D^2y}{Dt^2} = \frac{Dv}{Dt}; \quad \frac{D^2\zeta}{Dt^2} = \frac{D^2z}{Dt^2} = \frac{Dw}{Dt}.$$

Die ξ, η, ζ, u, v, w, als Funktionen von a, b, c betrachtet, müssen ebenfalls gewisse Stetigkeitseigenschaften besitzen; denn wir legen ja ein kontinuierliches Medium zugrunde, d. h. betrachten nur geordnete Bewegungen; d. h. aber folgendes: Es seien die Verrückungen eines Punktes (a, b, c) mit ξ, η, ζ bezeichnet, die eines anderen Punktes (a_0, b_0, c_0) mit ξ_0, η_0, ζ_0; dann lassen wir die Punkte (a, b, c) und (a_0, b_0, c_0) sich nähern, so daß $|a - a_0|$, $|b - b_0|$, $|c - c_0|$ kleiner und kleiner werden. Dann nähern sich auch $|\xi - \xi_0|$, $|\eta - \eta_0|$, $|\zeta - \zeta_0|$ unbegrenzt dem Werte 0, d. h. aber nichts anderes, als daß die Funktionen ξ, η, ζ stetige Funktionen von a, b, c sind. Ebenso nehmen wir die Differentialquotienten nach a, b, c als stetige Funktionen von a, b, c an.

Das Auftreten von partiellen Ableitungen nach a, b, c unterscheidet die Mechanik der Kontinua von der diskreten Massenpunkte. Diese Ableitungen hätten ja dort auch nicht den

geringsten Sinn. Die Differentialgleichungen der Bewegung sind daher hier partielle, dort gewöhnliche.

Nach diesen Vorbemerkungen wollen wir nun zur analytischen Darstellung einer Deformation übergehen. Wir legen zunächst ein rechtshändiges kartesisches Koordinatensystem zugrunde, das im Raume festliegt.

Wir nennen, wie oben, die Verschiebungskomponenten eines Punktes (a_0, b_0, c_0) resp. ξ_0, η_0, ζ_0, und entsprechend ohne Index 0 für einen zweiten Punkt (a, b, c). Dann sind nach obigen Voraussetzungen ξ, η, ζ in eine Taylorsche Reihe entwickelbar, die nach Potenzen von $a-a_0$, $b-b_0$, $c-c_0$ fortschreitet.

Die Verschiebungen ξ, η, ζ sollen hier nicht als Funktionen der Zeit betrachtet werden: es handelt sich im folgenden nur um die geometrische Abhängigkeit zwischen den Lagen eines beliebigen Punktes vor und nach einer Deformation. Anfangslage und Endlage sind dabei von vornherein gegeben; wir haben also das vor uns, was man in der Mathematik eine „Abbildungsaufgabe" nennt.

Wir haben also:

$$
(5)\quad \left\{
\begin{aligned}
\xi &= \xi_0 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial a}\right)_0 (a-a_0) + \left(\frac{\partial \xi}{\partial b}\right)_0 (b-b_0) + \left(\frac{\partial \xi}{\partial c}\right)_0 (c-c_0)\\
&\qquad + \text{quadrat. Glieder} + \text{höhere Glieder},\\
\eta &= \eta_0 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial a}\right)_0 (a-a_0) + \left(\frac{\partial \eta}{\partial b}\right)_0 (b-b_0) + \left(\frac{\partial \eta}{\partial c}\right)_0 (c-c_0)\\
&\qquad + \text{quadrat. Glieder} + \text{höhere Glieder},\\
\zeta &= \zeta_0 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial a}\right)_0 (a-a_0) + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial b}\right)_0 (b-b_0) + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial c}\right)_0 (c-c_0),\\
&\qquad + \text{quadrat. Glieder} + \text{höhere Glieder}.
\end{aligned}
\right.
$$

Diese Gleichungen (5) bringen zum Ausdruck, daß die Verschiebung eine geordnete ist. Man erkennt, daß die ξ, η, ζ im allgemeinen recht komplizierte Funktionen von a, b, c sind. Nur in ganz speziellen Fällen wird es sich ereignen, daß die quadratischen und höheren Glieder allgemein zum Fortfall kommen, d. h. ξ, η, ζ lineare Funktionen von a, b, c sind. Eine Deformation, die durch eine lineare Abhängigkeit dargestellt wird, nennt man kurz eine „lineare Deformation". Diese sind, wie unmittelbar einleuchtet, durch besonders einfache Eigenschaften vor den allgemeinen Deformationen ausgezeichnet. Vom mathematischen Standpunkte aus sind lineare Deformationen natürlich nur ein ganz spezieller Fall. Dennoch können wir uns auf die Betrachtung linearer Deformationen beschränken, wenn wir nur einen kleinen Bereich des Körpers (statt des ganzen) in Betracht ziehen. Dann bleiben $a-a_0$, $b-b_0$, $c-c_0$ stets kleine Größen, so daß man in erster Näherung ihre Quadrate und noch höhere Glieder in (5) fortlassen kann. Wir erhalten so für einen hinreichend kleinen Bezirk:

$$
(6)\quad \begin{cases}
\xi = \xi_0 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial a}\right)_0 (a - a_0) + \left(\frac{\partial \xi}{\partial b}\right)_0 (b - b_0) + \left(\frac{\partial \xi}{\partial c}\right)_0 (c - c_0)\,, \\
\eta = \eta_0 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial a}\right)_0 (a - a_0) + \left(\frac{\partial \eta}{\partial b}\right)_0 (b - b_0) + \left(\frac{\partial \eta}{\partial c}\right)_0 (c - c_0)\,, \\
\zeta = \zeta_0 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial a}\right)_0 (a - a_0) + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial b}\right)_0 (b - b_0) + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial c}\right)_0 (c - c_0).
\end{cases}
$$

Es möge des Folgenden wegen nochmals betont werden, daß das Fortfallen der höheren Glieder nur darauf beruht, daß $(a-a_0)^2 \ldots$ klein gegen $|a-a_0| \ldots$ ist. Keineswegs aber fallen die höheren Glieder fort, weil die Koeffizienten von $(a-a_0), \ldots$ klein wären. Die Koeffizienten sind vielmehr alle endliche Größen; ihr Betrag kann unter Umständen sogar groß sein.

Den Index 0 an den Ableitungen $\frac{\partial \xi}{\partial a}, \ldots$ können wir in Zukunft fortlassen; denn da der betrachtete Bereich nur klein ist, so können wir ohne merkliche Fehler auch die Werte $\left(\frac{\partial \xi}{\partial a}\right)_{abc}$, $\left(\frac{\partial \xi}{\partial b}\right)_{abc}$, ..., die an der Stelle (a, b, c) selbst gebildet sind, einsetzen.

93. Allgemeine Eigenschaften linearer Deformationen.

Man kann den Gleichungen (6) für das folgende eine etwas andere Gestalt geben, indem man der Reihe nach zu ihnen folgende Identitäten addiert:

$$
\begin{aligned}
a &= a_0 + (a - a_0), \\
b &= b_0 + (b - b_0), \\
c &= c_0 + (c - c_0).
\end{aligned}
$$

Dann erhält man:

$$
(6\text{a})\quad \begin{cases}
a+\xi = a_0+\xi_0+\left(1+\frac{\partial \xi}{\partial a}\right)(a-a_0)+ \frac{\partial \xi}{\partial b}(b-b_0)+ \frac{\partial \xi}{\partial b}(c-c_0), \\
b+\eta = b_0+\eta_0+ \frac{\partial \eta}{\partial a}(a-a_0)+\left(1+\frac{\partial \eta}{\partial b}\right)(b-b_0)+ \frac{\partial \eta}{\partial c}(c-c_0), \\
c+\zeta = c_0+\zeta_0+ \frac{\partial \zeta}{\partial a}(a-a_0)+ \frac{\partial \zeta}{\partial b}(b-b_0)+\left(1+\frac{\partial \zeta}{\partial c}\right)(c-c_0).
\end{cases}
$$

An diesen Gleichungen kann eine Vereinfachung angebracht werden, indem wir als Vergleichspunkt (a_0, b_0, c_0) den Koordinatenanfangspunkt wählen, d. h. $a_0 = b_0 = c_0 = 0$ nehmen. Setzen wir für einen Augenblick:

$$
a + \xi = x, \quad b + \eta = y, \quad c + \zeta = z,
$$

so haben wir aus (6a):

$$
(6\text{b})\quad \begin{cases}
x = \xi_0 + \left(1+\frac{\partial \xi}{\partial a}\right)\cdot a + \frac{\partial \xi}{\partial b}\cdot b + \frac{\partial \xi}{\partial c}\cdot c, \\
y = \eta_0 + \frac{\partial \eta}{\partial a}\cdot a + \left(1+\frac{\partial \eta}{\partial b}\right)\cdot b + \frac{\partial \eta}{\partial c}\cdot c, \\
z = \zeta_0 + \frac{\partial \zeta}{\partial a}\cdot a + \frac{\partial \zeta}{\partial b}\cdot b + \left(1+\frac{\partial \zeta}{\partial c}\right)\cdot c.
\end{cases}
$$

x, y, z sind die Koordinaten des Raumpunktes, mit dem der betrachtete Massenpunkt nach geschehener Verrückung (ξ, η, ζ) koinzidiert; wir können sie daher die „augenblicklichen" Koordinaten nennen, im Gegensatz zu a, b, c, den „früheren" Koordinaten desselben Massenpunktes vor der Verrückung.

Es sind also in (6b) die augenblicklichen Koordinaten dargestellt als Funktionen der früheren Koordinaten. Natürlich kann man im allgemeinen aus (6b) umgekehrt a, b, c als Funktionen von x, y, z darstellen, und zwar wiederum als lineare Funktionen. Man erhält dann Gleichungen von der Form:

$$(6c) \quad \left\{ \begin{aligned} a &= A_0 + A_1 x + A_2 y + A_3 y\,, \\ b &= B_0 + B_1 x + B_2 y + B_3 z\,, \\ c &= C_0 + C_1 x + C_2 y + C_3 z\,, \end{aligned} \right.$$

wo die A, B, C leicht zu bestimmende Konstanten sind.

Die Gleichungen (6b) und (6c) erlauben uns einige wichtige Schlüsse zu ziehen.

a) Wir betrachten eine Schar von Punkten, die vor der Deformation auf einer Ebene lagen. Es besteht also zu Anfang zwischen ihren Koordinaten eine lineare Gleichung:

$$(7) \qquad E \cdot a + F \cdot b + G \cdot c + H = 0\,.$$

Nach der Deformation sind a, b, c übergegangen in x, y, z. Wir erhalten also nach (6c), indem wir a, b, c durch x, y, z ausdrücken, für den geometrischen Ort nach der Deformation aus Gleichung (7):

$$\begin{aligned} E(A_0 + A_1 x + A_2 y + A_3 z) + F(B_0 + B_1 x + B_2 y + B_3 z) \\ + G(C_0 + C_1 x + C_2 y + C_3 z) + H = 0, \end{aligned}$$

oder anders geordnet:

$$(7a) \quad \left\{ \begin{aligned} x(EA_1 + FB_1 + GC_1) + y(EA_2 + FB_2 + GC_2) + z(EA_3 + FB_3 + GC_3) \\ + (AE_0 + FB_0 + GC_0 + H) = 0\,, \end{aligned} \right.$$

d. h. wiederum die Gleichung einer Ebene.

Wir erhalten also den Satz: Punkte, die vor der Deformation auf einer Ebene liegen, liegen auch nach der Deformation auf einer solchen.

b) Wir fassen nunmehr eine Punktmenge ins Auge, die vor der Deformation auf einer geraden Linie liegt: Eine Gerade kann aber stets als der Schnitt zweier Ebenen aufgefaßt werden und wir erhalten durch eine zweimalige Anwendung des vorhergehenden Satzes:

Punkte, die vor der Deformation auf einer Geraden liegen, liegen auch nach der Deformation auf einer solchen.

c) Wir betrachten endlich eine Punktmenge, die vor der Deformation auf einer Oberfläche zweiter Ordnung liegt (Ellipsoid, Hyperboloid,

Paraboloid). Ihre Koordinaten genügen also einer Gleichung zweiten Grades:

$$(8)\qquad a_{11}\cdot a^2+a_{22}\cdot b^2+a_{33}\cdot c^2+2a_{12}\cdot ab+2a_{23}\cdot bc+2a_{31}\cdot ca+a_{44}=0.$$

Um zu erfahren, welchen geometrischen Ort die Punkte nach der Deformation erfüllen, drücken wir wieder nach (6c) a, b, c durch x, y, z aus. Man erkennt ohne Rechnung, daß man eine Gleichung von der Form erhält:

$$(8a)\qquad A_{11}x^2+A_{22}y^2+A_{33}z^2+2A_{12}xy+2A_{23}yz+2A_{31}zx+A_{44}=0,$$

d. h. wiederum die Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung. Daraus folgt der Satz:

Punkte, die vor der Deformation auf einer Fläche zweiter Ordnung liegen, tun dies auch nachher.

d) Ein spezieller Fall des vorhergehenden Satzes ist folgender: Eine Punktmenge erfülle vor der Deformation eine Kugelfläche. Nach der Deformation ist es keine Kugelfläche mehr, wohl aber nach Satz c) noch immer eine Oberfläche zweiter Ordnung, und zwar hier im besonderen ein dreiachsiges Ellipsoid. Durch eine bestimmte Deformation wird also eine Kugel in ein bestimmtes Ellipsoid übergeführt. Dieser Gedankengang kann auch umgekehrt werden. Wir betrachten vor der Deformation ein dreiachsiges Ellipsoid. Dieses kann durch eine ganz bestimmte Deformation in eine Kugel übergeführt werden.

94. Einführung eines mitbewegten Koordinatensystems.

Wir schließen unsere Betrachtungen an die Gleichung (6b) an. In dieser kommen die von a, b, c freien Koeffizienten ξ_0, η_0, ζ_0 vor, deren physikalische Bedeutung wir nun untersuchen wollen.

Nehmen wir $a=b=c=0$ an, so betrachten wir die Bewegung des Koordinatenanfangspunktes. Dann ergeben die Gleichungen (6b):

$$(9)\qquad x=\xi_0,\quad y=\eta_0,\quad z=\zeta_0;$$

d. h. vor der Deformation waren die Koordinaten unseres Punktes (0, 0, 0); nach der Deformation werden sie durch Gleichung (9) angegeben. Dadurch ist die Bedeutung von ξ_0, η_0, ζ_0 klar gestellt: es sind die Verrückungskomponenten des Anfangspunktes. Bei einer wirklichen Deformation, die wir doch in der Umgebung des Anfangspunktes untersuchen wollen, kommt es aber natürlich nur auf die relativen Verschiebungen zum Anfangspunkte an, während eine gemeinsame Translation gegen das ruhende Koordinatensystem ganz gleichgültig ist. Die Größen ξ_0, η_0, ζ_0 bedeuten für die eigentliche Deformation nichts, da sie nur eine gemeinschaftliche Translation darstellen, die das elastische Medium gleich wie ein starrer Körper ausführt. Wir können also davon in Zukunft ganz absehen. Wir elimi-

nieren die Bewegung des Anfangspunktes aus unseren Gleichungen, indem wir das Koordinatensystem nicht mehr fest im Raume annehmen, sondern parallel mit dem ursprünglichen in einem Punkte des Körpers selbst befestigen, den wir als Koordinatenanfangspunkt nehmen. Dann sind dessen Koordinaten dauernd gleich 0, d. h. ξ_0, η_0, ζ_0 sind in unseren Gleichungen gleich 0 zu setzen.

Durch die Überlegungen dieser Nummer ist bereits ein Schritt zur Analyse der Gleichungen (6) getan. Wir haben erkannt, daß in ihnen unter anderem eine Translation des Systems, wobei es sich als starr verhält, enthalten ist, und haben diese Translation eliminiert durch Beziehung auf ein geeignet mitbewegtes Koordinatensystem.

95. Zusammensetzung zweier linearer Deformationen.

Um nicht immer die Differentialsymbole $\frac{\partial \xi}{\partial a}, \ldots$ hinschreiben zu müssen, wollen wir einige, allerdings nur vorläufige, abkürzende Bezeichnungen einführen. Wir setzen:

$$(10)\qquad \begin{cases} \frac{\partial \xi}{\partial a} = k_{11}; & \frac{\partial \xi}{\partial b} = k_{12}; & \frac{\partial \xi}{\partial c} = k_{13}; \\ \frac{\partial \eta}{\partial a} = k_{21}; & \frac{\partial \eta}{\partial b} = k_{22}; & \frac{\partial \eta}{\partial c} = k_{23}; \\ \frac{\partial \zeta}{\partial a} = k_{31}; & \frac{\partial \zeta}{\partial b} = k_{32}; & \frac{\partial \zeta}{\partial c} = k_{33}. \end{cases}$$

Mit dieser Bezeichnung werden die Gleichungen (6b), wenn man nach Nr. 94 in ihnen ξ_0, η_0, ζ_0 gleich 0 setzt:

$$(11)\qquad \begin{cases} x = (1+k_{11})\cdot a + k_{12}\cdot b + k_{13}\cdot c, \\ y = k_{21}\cdot a + (1+k_{22})\cdot b + k_{23}\cdot c, \\ z = k_{31}\cdot a + k_{32}\cdot b + (1+k_{33})\, c. \end{cases}$$

Durch Subtraktion von resp. a, b, c auf beiden Seiten erhält man das gleichwertige System:

$$(11\text{a})\qquad \begin{cases} \xi = k_{11}\cdot a + k_{12}\cdot b + k_{13}\cdot c, \\ \eta = k_{21}\cdot a + k_{22}\cdot b + k_{23}\cdot c, \\ \zeta = k_{31}\cdot a + k_{32}\cdot b + k_{33}\cdot c. \end{cases}$$

Bezeichnen wir den unendlich kleinen Vektor der Verschiebung mit $d\mathfrak{s}$, den Lagevektor des verschobenen Punktes mit den Koordinaten (a, b, c) durch $\mathfrak{r}^0$, so kann (11a) auch geschrieben werden:

$$(11\text{b})\qquad \begin{cases} d\mathfrak{s}_x = k_{11}\,\mathfrak{r}_x^0 + k_{12}\,\mathfrak{r}_y^0 + k_{13}\,\mathfrak{r}_z^0, \\ d\mathfrak{s}_y = k_{21}\,\mathfrak{r}_x^0 + k_{22}\,\mathfrak{r}_y^0 + k_{23}\,\mathfrak{r}_z^0, \\ d\mathfrak{s}_z = k_{31}\,\mathfrak{r}_x^0 + k_{32}\,\mathfrak{r}_y^0 + k_{33}\,\mathfrak{r}_z^0. \end{cases}$$

Dies ist also in unserer früheren Bezeichnungsweise (vergl. pag. 365 ff.) eine lineare homogene Vektorfunktion, aber keine symmetrische, sondern eine allgemeine, mit 9 unabhängigen Koeffizienten k_{11} bis k_{33}.

Wir wollen nun zunächst eine Deformation (I) vornehmen, die wir durch die Koeffizienten k_{11}', k_{12}', $k_{13}' \ldots k_{33}'$ charakterisieren, die die Koordinaten a, b, c in x', y', z' überführt.

Sodann wollen wir, ohne die erste Deformation rückgängig zu machen, auf die bereits deformierten Koordinaten x', y', z' noch eine Deformation (II) mit den Koeffizienten k_{11}'', k_{12}'', k_{13}'', ... k_{33}'' wirken lassen, die x', y', z' in x'', y'', z'', überführt. Dann haben wir also:

Deformation I	Deformation II
(12a) $\begin{cases} x' = (1+k_{11}')a + k_{12}'b + k_{13}'c, \\ y' = k_{21}'a + (1+k_{22}')b + k_{23}'c, \\ z' = k_{31}'a + k_{32}'b + (1+k_{33}')c. \end{cases}$	(12b) $\begin{cases} x'' = (1+k_{11}'')x' + k_{12}''y' + k_{13}''z' \\ y'' = k_{21}''x' + (1+k_{22}'')y' + k_{23}''z', \\ z'' = k_{31}''x' + k_{32}''y' + (1+k_{33}'')z''. \end{cases}$

Die Gleichungen (12 b) geben uns die „endgültigen“ Koordinaten x'', y'', z'' durch die „mittleren“ x', y', z'. Diese letzteren können wir mit Hilfe von (12a) durch die „ursprünglichen“ a, b, c ausdrücken; also können wir auch x'', y'', z'' durch a, b, c darstellen. Wir erhalten so;

$$(12\,c)\quad \begin{cases} x'' = (1+k_{11}'')\,[(1+k_{11}')\,a + k_{12}'\,b + k_{13}'\,c] + k_{12}''\,[k_{21}'\,a \\ \qquad + (1+k_{22}')\cdot b + k_{23}'\cdot c] + k_{13}''\,[k_{31}'\,a + k_{32}'\cdot b + (1+k_{33}')\,c], \\ y'' = \text{ebenso}, \\ z'' = \text{ebenso}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen ordnen wir anders und erhalten:

$$(13)\quad \begin{cases} x'' = a\,[(1+k_{11}'')(1+k_{11}') + k_{12}''\cdot k_{21}' + k_{13}''\cdot k_{31}'] \\ \qquad + b\,[(1+k_{11}'')\,k_{12}' + k_{12}''\,(1+k_{22}') + k_{13}''\cdot k_{32}'] \\ \qquad + c\,[(1+k_{11}'')\,k_{13}' + k_{12}''\,k_{23}' + k_{13}''\,(1+k_{33}')], \\ y'' = \text{ebenso}, \\ z'' = \text{ebenso}. \end{cases}$$

Wir können die in Gleichung (13) dargestellte lineare Deformation als das „Resultat“ der Deformation I und II bezeichnen. Statt dieses Endergebnis durch zwei getrennte Schritte zu erzielen, können wir auch mit einer einzigen Deformation, die wir durch die ursprünglichen Koeffizienten $k_{11}, k_{12}, k_{13} \ldots k_{33}$ charakterisieren wollen, erreichen, daß die a, b, c in x'', y'', z'' übergehen. Wir erhalten dann:

$$(14)\quad \begin{cases} x'' = (1+k_{11})\,a + k_{12}\,b + k_{13}\,c, \\ y'' = k_{21}\,a + (1+k_{22})\,b + k_{23}\,c, \\ z'' = k_{31}\,a + k_{32}\,b + (1+k_{33})\,c. \end{cases}$$

Diese Deformation soll nach Voraussetzung identisch sein mit der durch Gleichung (13) dargestellten, also müssen die Koeffizienten bzw. gleich sein. Wir erhalten so:

$$(15)\quad \begin{cases} 1+k_{11} = (1+k_{11}'')(1+k_{11}') + k_{12}'' k_{21}' + k_{13}'' k_{31}', \\ k_{12} = (1+k_{11}'') k_{12}' + k_{12}''(1+k_{22}') + k_{13}'' k_{32}', \\ k_{13} = (1+k_{11}'') k_{13}' + k_{12}'' k_{23}' + k_{13}''(1+k_{33}'), \\ k_{21} = k_{21}''(1+k_{11}') + (1+k_{22}'') k_{21}' + k_{23}'' k_{31}', \\ 1+k_{22} = k_{21}'' k_{12}' + (1+k_{22}'')(1+k_{22}') + k_{23}'' k_{32}', \\ k_{23} = k_{21}'' k_{13}' + (1+k_{22}'') k_{23}' + k_{23}''(1+k_{33}'), \\ k_{31} = k_{31}''(1+k_{11}') + k_{32}'' k_{21}' + (1+k_{33}'') k_{31}', \\ k_{32} = k_{31}'' k_{12}' + k_{32}''(1+k_{22}') + (1+k_{33}'') k_{32}', \\ 1+k_{33} = k_{31}'' k_{13}' + k_{32}'' k_{23}' + (1+k_{33}')(1+k_{33}'). \end{cases}$$

Man erkennt, daß die Koeffizienten der „resultierenden" Deformation in keineswegs einfacher Weise aus den Koeffizienten der beiden primären zusammengesetzt sind; insbesondere ersieht man folgendes:

Wir wollen einmal die Reihenfolge der primären Deformationen I und II umkehren, d. h. Deformation II soll (a, b, c) in $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, Deformation I $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ in x, y, z überführen. $\bar{\bar{x}}\, \bar{\bar{y}}\, \bar{\bar{z}}$ erhalten wir dann durch (a, b, c) ausgedrückt, wenn wir in Gleichung (13) $x''\ y''\ z''$ durch resp. $\bar{\bar{x}}\, \bar{\bar{y}}\, \bar{\bar{z}}$ ersetzen, und die eingestrichenen mit den zweigestrichenen Koeffizienten vertauschen. Denken wir uns diese Deformation durch eine einzige hervorgebracht, deren Koeffizienten $\bar{k}_{11}, \bar{k}_{12}, \bar{k}_{13}, \ldots \bar{k}_{33}$ seien, so folgt aus (13), (14) und (15) z. B. für den Koeffizienten $\bar{k}_{11}$:

$$1+\bar{k}_{11} = (1+k_{11}')(1+k_{11}'') + k_{12}' k_{21}'' + k_{13}' k_{31}'',$$

und so weiter, d. h. die überstrichenen Koeffizienten $\bar{k}_{11}, \bar{k}_{12}, \bar{k}_{13}, \ldots \bar{k}_{33}$ sind sämtlich verschieden von den Koeffizienten $k_{11}, k_{21}, k_{12}, \ldots k_{33}$. Wir können dies Resultat so aussprechen: Bei Vertauschung der Reihenfolge der Deformationen I und II kommt man nicht zu derselben „resultierenden" Deformation, oder wenn wir die resultierenden Deformationen durch die Symbole (I, II) resp. (II, I) charakterisieren, kann man die symbolische Ungleichung schreiben:

$$(\mathrm{I}, \mathrm{II}) \neq (\mathrm{II}, \mathrm{I}).$$

96. Lineare infinitesimale Deformationen; Zusammensetzung derselben.

Um dies unerwünschte Ergebnis zu beseitigen, daß die resultierende Deformation abhängig ist von der Reihenfolge, in der die primären Deformationen wirken, wollen wir jetzt unseren linearen Deformationen eine weitere Einschränkung auferlegen.

Am Schlusse von Nr. 92 ist hervorgehoben worden, daß die Koeffizienten k_{11} bis k_{33} im allgemeinen nicht klein sind, sondern beliebige endliche Werte haben können. Jetzt dagegen wollen wir diese Größen als so klein annehmen, daß wir Quadrate und Produkte von je zweien von ihnen vernachlässigen können und a fortiori Größen höherer Ordnung.

Die so erhaltenen linearen Deformationen heißen „infinitesimale lineare Deformationen". Wenn wir in die Gleichung (15) diese Voraussetzung einführen, so erhalten wir:

$$(16)\quad \begin{cases} k_{11} = k_{11}' + k_{11}'', & k_{12} = k_{12}' + k_{12}'', & k_{13} = k_{13}' + k_{13}'', \\ k_{21} = k_{21}' + k_{21}'', & k_{22} = k_{22}' + k_{22}'', & k_{23} = k_{23}' + k_{23}'', \\ k_{31} = k_{31}' + k_{31}'', & k_{32} = k_{32}' + k_{32}'', & k_{33} = k_{33}' + k_{33}''. \end{cases}$$

Man erkennt aus (16): Die Koeffizienten der resultierenden infinitesimalen Deformation setzen sich additiv zusammen aus denen der primären Deformationen; sie sind also unabhängig von der Reihenfolge der letzteren.

Dieses Resultat ist deshalb von so großer Wichtigkeit, weil man nun umgekehrt sagen kann, daß man jede gegebene lineare infinitesimale Deformation, möge sie auch noch so kompliziert sein, in beliebig viele partielle Deformationen zerlegen kann. Man kann also Komplizierteres auf Einfacheres zurückführen, und das ist gerade dasjenige, was wir zur Analyse unserer Deformation notwendig haben.

97. Untersuchung der infinitesimalen Drehung.

Wir setzen von jetzt ab stets infinitesimale lineare Deformationen voraus. Unsere Aufgabe ist es, die Bewegung zu untersuchen, die durch die Gleichungen (11) resp. (11a) dargestellt wird, wobei die Translation eliminiert ist. Wenn wir uns die Frage stellen, was für Bewegungen der kleine Teil eines Kontinuums, auf den sich diese Gleichung bezieht, ausführen kann, so ist von vornherein folgendes auszusagen: Ein starrer Körper könnte in Bezug auf ein in ihm festliegendes, aber nicht rotierendes Koordinatensystem nur noch eine Rotation um eine bestimmte Achse ausführen; diese Bewegungsform kann natürlich auch das Kontinuum ausführen. Während aber die Bewegungsmöglichkeiten des starren Körpers damit erschöpft sind, können außer dieser uneigentlichen Deformation, wie wir die Rotation nennen können, beim Kontinuum auch noch wirkliche Verzerrungen stattfinden. Es ist also von vornherein wahrscheinlich, daß in unserer infinitesimalen Deformation, die ja im übrigen ganz allgemein ist, also auch die allgemeinste infinitesimale Bewegung eines Kontinuums darstellen muß, neben einer wirklichen Deformation auch eine infinitesimale Rotation enthalten ist.

Da es uns in der Elastizitätslehre nur auf eigentliche Deformationen ankommt, müssen wir lernen, die in (11) eventuell steckende Rotation abzusondern. Das erfordert aber eine Untersuchung der letzteren.[1])

Wir betrachten zuerst eine spezielle Rotation, und zwar um die x-Achse im positiven Sinne (entgegengesetzt dem Sinne des Uhrzeigers).

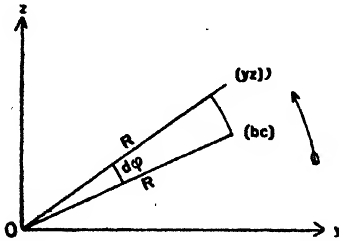


Fig. 136.

Durch die infinitesimale Rotation (Fig. 136) wird der Punkt (b, c) in den Punkt (y, z) übergeführt, und zwar besteht dabei, da die Entfernung vom Anfangspunkt O sich nicht ändert, die Relation:

$$y^2 + z^2 = b^2 + c^2,$$

oder da

$$y = b + \eta_1, \quad z = c + \zeta_1,$$

wobei η_1 und ζ_1 infinitesimale Größen sind:

$$2(b\eta_1 + c\zeta_1) + b^2 + c^2 = b^2 + c^2,$$

oder:

$$b\eta_1 + c\zeta_1 = 0,$$

oder endlich, wenn p eine Konstante bedeutet:

(17) $$-\frac{\eta_1}{c} = +\frac{\zeta_1}{b} = +p.$$

Wir erhalten also folgende spezielle (uneigentliche) Deformation:

(18) $$\begin{cases} \xi_1 = 0 \cdot a + 0 \cdot b + 0 \cdot c, \\ \eta_1 = 0 \cdot a + 0 \cdot b - p \cdot c, \\ \zeta_1 = 0 \cdot a + p \cdot b + 0 \cdot c. \end{cases}$$

Die Bedeutung von p ergibt sich dabei folgendermaßen: Die Entfernung der Punkte (y, z) und (b, c) voneinander ist gleich $R\,d\varphi$, wenn R den Radiusvektor und $d\varphi$ den infinitesimalen Drehungswinkel bedeutet. Andererseits ist nach (18) diese nämliche Entfernung gleich

$$+\sqrt{\eta_1^2 + \zeta_1^2} = p\sqrt{b^2 + c^2} = R \cdot p,$$

d. h. p **ist gleich dem infinitesimalen Drehungswinkel um die x-Achse.**

Wir wollen jetzt weiter eine ebensolche Rotation um die y-Achse untersuchen und setzen den infinitesimalen Drehungswinkel gleich q. Durch einfache zyklische Vertauschung, und indem man p durch q ersetzt, erhält man aus (18):

[1]) Der Inhalt der folgenden Untersuchung ist schon aus Nr. 71 bekannt. Wir ziehen diese Wiederholung einer Verweisung vor, damit der Leser die folgende Untersuchung als Ganzes vor sich habe.

$$(18a) \quad \begin{cases} \xi_2 = \quad 0\cdot a + 0\cdot b + q\cdot c, \\ \eta_2 = \quad 0\cdot a + 0\cdot b + 0\cdot c, \\ \zeta_2 = -q\cdot a + 0\cdot b + 0\cdot c. \end{cases}$$

Indem man nach Maßgabe der Gleichung (16) die beiden Rotationen zusammensetzt, erhält man für die resultierende Rotation:

$$(18b) \quad \begin{cases} \xi_1 + \xi_2 = \quad 0\cdot a + 0\cdot b + q\cdot c, \\ \eta_1 + \eta_2 = \quad 0\cdot a + 0\cdot b - p\cdot c, \\ \zeta_1 + \zeta_2 = -q\cdot a + p\cdot b + 0\cdot c. \end{cases}$$

Endlich erhalten wir für eine infinitesimale Rotation um den Winkel r um die z-Achse:

$$(18c) \quad \begin{cases} \xi_3 = 0\cdot a - r\cdot b + 0\cdot c, \\ \eta_3 = r\cdot a + 0\cdot b + 0\cdot c, \\ \zeta_3 = 0\cdot a + 0\cdot b + 0\cdot c, \end{cases}$$

und durch Zusammensetzung mit (18b), wenn wir die resultierende Verrückung mit ξ, η, ζ bezeichnen:

$$(19) \quad \begin{cases} \xi = \quad 0\cdot a - r\cdot b + q\cdot c, \\ \eta = \quad r\cdot a + 0\cdot b - p\cdot c, \\ \zeta = -q\cdot a + p\cdot b + 0\cdot c. \end{cases}$$

Dies ist die allgemeinste infinitesimale Rotation. Die Koeffizienten bilden folgendes Schema:

$$\begin{vmatrix} 0 & -r & +q \\ +r & 0 & -p \\ -q & +p & 0 \end{vmatrix}.$$

Es ist durch folgende Eigenschaften charakterisiert: Die Diagonalglieder sind gleich 0, und an den zur Diagonale symmetrisch gelegenen Stellen stehen entgegengesetzt gleiche Koeffizienten. Ein solches System nennt man **antisymmetrisch**.

Würden wir die Größen von p, q, r kennen, so könnten wir unsere allgemeine Deformation in die „uneigentliche Deformation" (19,) nämlich die Rotation, und die übrigbleibende zerlegen. Augenblicklich geht dies jedoch noch nicht, weil p, q, r eben noch unbekannt sind.

Es bleiben noch einige Fragen, die Rotation betreffend, zu erledigen, die wir jetzt besprechen wollen.

Die erste lautet: Welches ist die Rotationsachse?

Man bestimmt diese aus der Definition, daß ihre sämtlichen Punkte in Ruhe bleiben, daß also $\xi = \eta = \zeta = 0$ sein müssen.

Annullieren wir dementsprechend die rechten Seiten von (19), so sind die auf diese Weise erhaltenen Werte von a, b, c **Punkte, die der Rotationsachse angehören.** Wir erhalten aus (19):

$$r \cdot b = q \cdot c\,,$$
$$r \cdot a = p \cdot c\,,$$
$$q \cdot a = p \cdot b\,,$$

oder damit identisch:

$$(20) \qquad \begin{cases} \dfrac{b}{c} = \dfrac{q}{r}\,, \\ \dfrac{a}{c} = \dfrac{p}{r}\,, \\ \dfrac{b}{a} = \dfrac{q}{p}\,. \end{cases}$$

Von diesen Gleichungen geht jede aus den beiden anderen hervor, und so folgt, wenn k eine Konstante bedeutet:

$$a = k \cdot p\,,$$
$$b = k \cdot q\,,$$
$$c = k \cdot r\,,$$

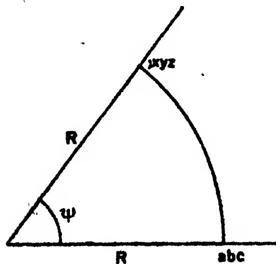


Fig. 137.

oder, statt dessen, die fortlaufende Proportion:

$$(21) \qquad a : b : c = p : q : r\,.$$

Das aber ist die Gleichung einer Geraden durch den Anfangspunkt; die Kosinusse der Winkel, die sie mit den drei Achsen bildet, verhalten sich wie die Komponenten der Rotation. Damit ist, wenn p, q, r gegeben sind, die Lage der Achse völlig bestimmt.

Eine weitere Frage ist die nach dem Betrage des (infinitesimalen) Drehungswinkels ψ (Fig. 137). Die Entfernung der Punkte (a, b, c) und (x, y, z) voneinander ist gleich $R\,.\,\psi$, anderseits ist das Quadrat dieses Wertes

$$R^2 \psi^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2\,.$$

Setzt man aus (19) die Werte ein, so folgt:

$$R^2 \psi^2 = (a^2 + b^2 + c^2)\,\psi^2 = r^2 b^2 + q^2 c^2 - 2 r q b c + r^2 a^2 + p^2 c^2 - 2 r p a c + q^2 a^2 + p^2 b^2 - 2 q p a b\,.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung kann man sehr vereinfachen, wenn man folgenden identisch verschwindenden Ausdruck hinzufügt:

$$p^2 a^2 - p^2 a^2 + q^2 b^2 - q^2 b^2 + r^2 c^2 - r^2 c^2\,.$$

Dann erhält man durch geeignete Zusammenfassung:

$$(a^2 + b^2 + c^2)\psi^2 = (p^2 + q^2 + r^2)\,(a^2 + b^2 + c^2) - (pa + qb + rc)^2\,,$$

oder nach Division mit $(a^2 + b^2 + c^2) \cdot (p^2 + q^2 + r^2)$:

$$(22) \qquad \frac{\psi^2}{p^2 + q^2 + r^2} = 1 - \frac{(pa + qb + rc)^2}{(p^2 + q^2 + r^2)(a^2 + b^2 + c^2)}\,.$$

Nun hat (Fig. 138) die Achse Richtungskosinusse, die nach Gleichung (21) proportional p, q, r sind. Die Richtungskosinusse selbst haben den Wert:

$$\cos\alpha = \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \quad \cos\beta = \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}.$$

Greifen wir nun einen beliebigen Punkt P (a, b, c) heraus, den wir mit dem Anfangspunkte verbinden, so ist $\overline{OP} = R$. Die Richtungskosinusse dieses Radiusvektors sind offenbar:

$$\cos\alpha_1 = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \quad \cos\beta_1 = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \quad \cos\gamma_1 = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

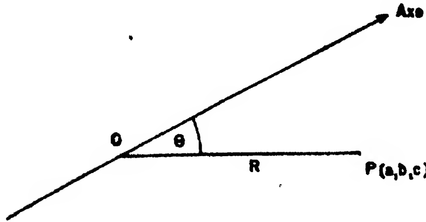


Fig. 138.

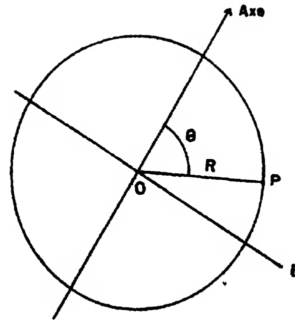


Fig. 139.

Mit diesen Bezeichnungen wird aus (22):

$$\text{(22a)} \qquad \frac{\psi^2}{p^2+q^2+r^2} = 1 - (\cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1)^2.$$

Nennen wir nun (Fig. 138) den Winkel zwischen Achse und Radiusvektor nach dem betreffenden Punkte Θ, so liefert (22a):

$$\frac{\psi^2}{p^2+q^2+r^2} = 1 - \cos^2\Theta = \sin^2\Theta,$$

oder endlich:

$$\text{(23)} \qquad \psi = \sqrt{p^2+q^2+r^2}\,\sin\Theta.$$

Wir denken uns nun eine Kugel um den Anfangspunkt mit dem Radius R geschlagen (Fig. 139). Legen wir durch O senkrecht zur Achse eine Ebene, so schneidet diese die Kugel in einem größten Kreise, dem Äquator. Für Punkte, die auf diesem liegen, ist $\Theta = \pi/2$, $\sin\Theta = 1$. Also hat nach (23) ψ seinen maximalen Wert am Äquator:

$$\psi_{\max} = \sqrt{p^2+q^2+r^2}.$$

Θ kann man als „Zenitdistanz" oder „Poldistanz" bezeichnen. Damit sind alle die Rotation betreffenden Fragen erledigt.

98. Synthese einer reinen Dehnung nach drei zueinander senkrechten Achsen.

Wir wollen nun eine sehr einfache eigentliche Deformation untersuchen. Wir greifen eine beliebige, durch den Anfangspunkt gehende Gerade heraus, die uns eine bestimmte Richtung festlegt, und konstruieren die durch den Anfangspunkt gehende zu ihr senkrechte Ebene EE (Fig. 140). Dann sollen die senkrechten Entfernungen aller Punkte von dieser Ebene im selben Verhältnis verändert (vergrößert oder verkleinert) werden. Eine solche Deformation nennt man eine reine Dehnung.

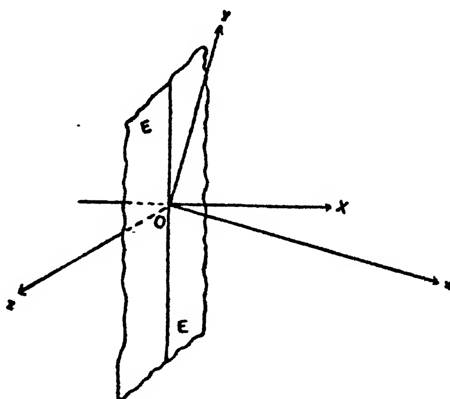


Fig. 140.

Um sie analytisch möglichst einfach darzustellen, legen wir die x-Achse eines neuen rechtshändigen Koordinatensystems, dessen Nullpunkt mit dem des alten zusammenfällt, in diese ausgezeichnete Richtung. Wir nennen das neue System X, Y, Z. Die Kosinusse der Winkel, die X mit x, y, z resp. bildet, seien $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; entsprechend werden durch $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ und $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ die Richtungskosinusse der neuen Y-Achse und neuen Z-Achse mit den alten bezeichnet.

Wir wollen nunmehr alles auf die neuen Achsen beziehen. Ein Punkt ist also charakterisiert durch (A, B, C); seine Verschiebungen durch Ξ, H, Z. Dann wird die eben besprochene Dehnung dargestellt durch die Gleichungen:

$$\text{(24a)} \qquad \begin{cases} \Xi_1 = \sigma_1 A + 0 \cdot B + 0 \cdot C, \\ H_1 = 0 \cdot A + 0 \cdot B + 0 \cdot C, \\ Z_1 = 0 \cdot A + 0 \cdot B + 0 \cdot C. \end{cases}$$

Nach (24a) sind die neuen Koordinaten des betreffenden Punktes

$$X_1 = A + \Xi_1, \quad Y_1 = B + H_1, \quad Z_1 = C + Z_1;$$

also die Verhältnisse, in dem die neuen zu den alten stehen:

$$\frac{X_1}{A} = 1 + \sigma_1; \quad \frac{Y_1}{B} = \frac{Z_1}{C} = 1.$$

Es sind also in der Tat nur die senkrechten Abstände von der neuen YZ-Ebene im Verhältnis $1+\sigma_1$ geändert. Da die Dehnung infinitesimal sein soll, so ist σ_1 als unendlich kleine Größe zu betrachten.

Wir betrachten nun eine zweite genau gleichartige Dehnung, deren Koeffizient σ_2 sein möge; diese Dehnung soll aber parallel der neuen Y-Achse erfolgen. Man erhält also für die Verrückungen analog (24a):

(24b) $$\Xi_2 = 0; \quad \mathsf{H}_2 = \sigma_2 B; \quad \mathsf{Z}_2 = 0.$$

Hier ist

$$\frac{X_2}{A} = \frac{Z_2}{C} = 1; \quad \frac{Y_2}{B} = 1 + \sigma_2.$$

Und endlich drittens lassen wir eine Dehnung mit dem Koeffizienten σ_3 parallel der Z-Achse auf unser Medium einwirken und erhalten:

(24c) $$\Xi_3 = 0; \quad \mathsf{H}_3 = 0; \quad \mathsf{Z}_3 = \sigma_3 C.$$

Hier ist

$$\frac{X_3}{A} = \frac{Y_3}{B} = 1; \quad \frac{Z_3}{C} = 1 + \sigma_3.$$

Setzt man diese Dehnungen nach Gleichung (16) zusammen, so erhält man eine allgemeine Dehnung nach drei zueinander senkrechten Achsen, die durch folgende Gleichungen dargestellt werden kann:

(25) $$\begin{cases} \Xi = \sigma_1 A + 0\cdot B + 0\cdot C, \\ \mathsf{H} = 0\cdot A + \sigma_2 B + 0\cdot C, \\ \mathsf{Z} = 0\cdot A + 0\cdot B + \sigma_3\cdot C. \end{cases}$$

Die drei aufeinander senkrechten Achsen führen den Namen „Hauptdilatationsachsen", die drei Werte $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ heißen „Hauptdilatationen". Die Bedeutung dieser Bezeichnungen wird später hervortreten.

Nennen wir die Koordinaten des Punktes (A, B, C) nach der Deformation (25) X, Y, Z, so ist:

(25a) $$\frac{X}{A} = 1 + \sigma_1; \quad \frac{Y}{B} = 1 + \sigma_2; \quad \frac{Z}{C} = 1 + \sigma_3.$$

Die Deformation (25) hat zwar allgemeinen Charakter, aber ihre Darstellung ist deshalb nicht die möglichst allgemeine, weil sie auf ein speziell gewähltes Koordinatensystem (X, Y, Z) bezogen ist. Wir müssen nun zu unserem alten System (x, y, z) und zu den diesen Achsen parallelen Verschiebungskomponenten ξ, η, ζ zurückgehen. Das tun wir mit Hilfe der Gleichungen, die die neuen Achsen auf die alten zurücktransformieren:

$$
(26)\quad \begin{cases} A = \alpha_1 \cdot a + \alpha_2 \cdot b + \alpha_3 \cdot c\,, \\ B = \beta_1 \cdot a + \beta_2 \cdot b + \beta_3 \cdot c\,, \\ C = \gamma_1 \cdot a + \gamma_3 \cdot b + \gamma_3 \cdot c\,. \end{cases}
$$

Entsprechende Beziehungen bestehen zwischen Ξ, H, Z und ξ, η, ζ:

$$
(26a)\quad \begin{cases} \Xi = \alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta + \alpha_3 \zeta\,, \\ \mathrm{H} = \beta_1 \xi + \beta_2 \eta + \beta_3 \zeta\,, \\ \mathrm{Z} = \gamma_1 \xi + \gamma_2 \eta + \gamma_3 \zeta\,. \end{cases}
$$

Gemäß der Bedeutung der α, β, γ als Richtungskosinusse bestehen folgende Relationen:

$$
(27)\quad \begin{cases} \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1\,, \\ \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 = \alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 = 1\,, \\ \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2 = 0\,, \\ \alpha_2 \alpha_3 + \beta_2 \beta_3 + \gamma_2 \gamma_3 = 0\,, \\ \alpha_3 \alpha_1 + \beta_3 \beta_1 + \gamma_3 \gamma_1 = 0\,. \end{cases}
$$

Durch Einsetzen in (25) erhält man zunächst:

$$
\begin{aligned} \alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta + \alpha_3 \zeta &= \sigma_1 (\alpha_1 a + \alpha_2 b + \alpha_3 c)\,, \\ \beta_1 \xi + \beta_2 \eta + \beta_3 \zeta &= \sigma_2 (\beta_1 a + \beta_2 b + \beta_3 c)\,, \\ \gamma_1 \xi + \gamma_2 \eta + \gamma_3 \zeta &= \sigma_3 (\gamma_1 a + \gamma_2 b + \gamma_3 c)\,. \end{aligned}
$$

Durch Multiplikation der letzten Gleichungen der Reihe nach mit $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ und Beachtung von (27) erhält man schließlich die erste der folgenden Gleichungen (28) und durch entsprechende Behandlung auch die zweite und dritte:

$$
(28)\quad \begin{cases} \xi = (\sigma_1 \alpha_1^2 + \sigma_2 \beta_1^2 + \sigma_3 \gamma_1^2) a + (\sigma_1 \alpha_1 \alpha_2 + \sigma_2 \beta_1 \beta_2 + \sigma_3 \gamma_1 \gamma_2) b \\ \qquad + (\sigma_1 \alpha_1 \alpha_3 + \sigma_2 \beta_1 \beta_3 + \sigma_3 \gamma_1 \gamma_3) c\,, \\ \eta = (\sigma_1 \alpha_1 \alpha_2 + \sigma_2 \beta_1 \beta_2 + \sigma_3 \gamma_1 \gamma_2) a + (\sigma_1 \alpha_2^2 + \sigma_2 \beta_2^2 + \sigma_3 \gamma_2^2) b \\ \qquad + (\sigma_1 \alpha_2 \alpha_3 + \sigma_2 \beta_2 \beta_3 + \sigma_3 \gamma_2 \gamma_3) c\,, \\ \zeta = (\sigma_1 \alpha_1 \alpha_3 + \sigma_2 \beta_1 \beta_3 + \sigma_3 \gamma_1 \gamma_3) a + (\sigma_1 \alpha_2 \alpha_3 + \sigma_2 \beta_2 \beta_3 + \sigma_3 \gamma_2 \gamma_3) b \\ \qquad + (\sigma_1 \alpha_3^2 + \sigma_2 \beta_3^2 + \sigma_3 \gamma_3^2) c\,. \end{cases}
$$

Diese Gleichungen stellen nun unsere allgemeine Dehnung auch wirklich allgemein dar. Wir erkennen sofort folgende Gesetzmäßigkeit im Bau des Koeffizientenschemas der Deformation: Die symmetrisch zur Diagonale stehenden Koeffizienten sind gleich. Wir haben also nur 6 unabhängige Koeffizienten. Dies tritt noch deutlicher hervor, wenn wir folgende Abkürzungen einführen:

$$(29)\quad \begin{cases} f = \sigma_1 \alpha_1^2 + \sigma_2 \beta_1^2 + \sigma_3 \gamma_1^2, \\ g = \sigma_1 \alpha_2^2 + \sigma_2 \beta_2^2 + \sigma_3 \gamma_2^2, \\ h = \sigma_1 \alpha_3^2 + \sigma_2 \beta_3^2 + \sigma_3 \gamma_3^2, \\ l = \sigma_1 \alpha_2 \alpha_3 + \sigma_2 \beta_2 \beta_3 + \sigma_3 \gamma_2 \gamma_3, \\ m = \sigma_1 \alpha_3 \alpha_1 + \sigma_2 \beta_3 \beta_1 + \sigma_3 \gamma_3 \gamma_1, \\ n = \sigma_1 \alpha_1 \alpha_2 + \sigma_2 \beta_1 \beta_2 + \sigma_3 \gamma_1 \gamma_2. \end{cases}$$

Diese wichtigen Gleichungen drücken die 6 Koeffizienten der Dehnung aus durch die Hauptdilatationen und die Richtungskosinusse, welche die Hauptdilatationsachsen mit den Koordinatenachsen bilden. Mit diesen Bezeichnungen wird die Deformation (28)

$$(30)\quad \begin{cases} \xi = fa + nb + mc, \\ \eta = na + gb + lc, \\ \zeta = ma + lb + hc. \end{cases}$$

Man nennt das Koeffizientenschema hier im Gegensatz zu dem der Rotation ein symmetrisches. Die Gleichungen (30) stellen offenbar den Vektor der Verschiebung $d\mathfrak{s}$ (mit den Komponenten ξ, η, ζ) als lineare homogene symmetrische Vektorfunktion des Lagevektors $\mathfrak{r}^0$ mit den Komponenten (a, b, c) dar.

Bevor wir dazu übergehen, die reine Dehnung nach drei zueinander senkrechten Achsen [Gleichung (30)] und die Rotationsbewegung [Gleichung (19)] zu einer allgemeineren Deformation zusammenzusetzen, wollen wir uns zunächst noch weiter mit der reinen Dehnung beschäftigen, und zwar wollen wir jetzt den umgekehrten Gang gehen und die Gleichung (30) analysieren.

99. Analyse der reinen Dehnung nach drei zueinander senkrechten Achsen.

Wir knüpfen an die Gleichungen (30) an; daß sie eine (wie wir annehmen wollen, uns noch unbekannte) Deformation darstellen, ist klar, da wir es ja mit einem Spezialfall der Gleichungen (11) und (11a) der allgemeinen linearen Deformation zu tun haben. Unser Problem ist, zu untersuchen, was für eine Deformation die Gleichungen (30) darstellen. Wir betrachten einen Punkt P (a, b, c) des Mediums, den wir mit dem Anfangspunkte O verbinden (Fig. 141). Dadurch wird eine bestimmte Richtung im Körper festgelegt. Wir fragen, ob eine Verrückung des Punktes P in dieser Richtung, d. h. eine einfache Dehnung parallel dieser Richtung mit den Gleichungen (30) verträglich ist. Wenn ja, so ist unsere nächste Aufgabe, die Richtung oder die Rich-

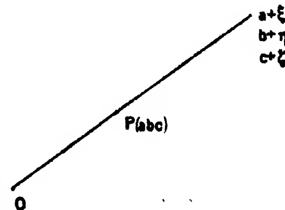


Fig. 141.

tungen, in denen dies statthaben kann, zu bestimmen. Durch die Deformation geht (a, b, c) über in $(a+\xi, b+\eta, c+\zeta)$. Die Bedingung dafür, daß dieser neue Punkt auf der durch O und P gelegten Geraden liegt, ist nach den Elementen der analytischen Geometrie:

(31) $$\frac{a+\xi}{a} = \frac{b+\eta}{b} = \frac{c+\zeta}{c}.$$

Nennt man den gemeinsamen, noch unbekannten Wert dieser Verhältnisse λ, so können wir (31) schreiben:

$$a+\xi=\lambda a; \quad b+\eta=\lambda b; \quad c+\zeta=\lambda c;$$

oder

$$\xi=(\lambda-1)a; \quad \eta=(\lambda-1)b; \quad \zeta=(\lambda-1)c,$$

oder, wenn wir eine neue Konstante $\sigma=\lambda-1$ einführen:

(31a) $$\xi=\sigma a; \quad \eta=\sigma b; \quad \zeta=\sigma c.$$

Ist diese Deformation mit (30) verträglich, so müssen die Werte ξ, η, ζ aus (31a) in (30) eingesetzt, Werte von a, b, c liefern, die die Gleichungen (30) befriedigen. Man erhält so:

(32) $$\begin{cases} (f-\sigma)a+nb+mc=0, \\ na+(g-\sigma)b+lc=0, \\ ma+lb+(h-\sigma)c=0. \end{cases}$$

Diese drei linearen Gleichungen lassen sich, da sie homogen sind, im allgemeinen nicht durch von 0 verschiedene Werte von (a, b, c) auflösen. Nur in dem Falle, daß die Determinante

(33) $$\begin{vmatrix} f-\sigma & n & m \\ n & g-\sigma & l \\ m & l & h-\sigma \end{vmatrix} = 0 \text{ wird,}$$

besitzen diese Gleichungen von 0 verschiedene Lösungen.

Da nun die Determinante eine unbekannte Größe σ enthält, so kann man diese so bestimmen, daß die Determinante verschwindet. **Für jeden Wert von σ, der die Determinante (33) zum Verschwinden bringt, erhält man Werte von a, b, c, die unserer vorausgesetzten Deformation entsprechen, also eine reine Dehnung darstellen.** Für diese Werte von σ ist also eine einfache Dehnung nach einer Achse mit den Gleichungen (30) verträglich

Berechnen wir zunächst den Wert von σ aus (33). Die Auflösung der Determinante ergibt folgende kubische Gleichung für σ:

(34) $$\begin{cases} \sigma^3-\sigma^2(f+g+h)+\sigma(fg+fh+gh-l^2-m^2-n^2) \\ \qquad +(fl^2+gm^2+hn^2-2lmn-fgh)=0. \end{cases}$$

Diese Gleichung liefert, wie wir zeigen werden, **drei stets reelle** Werte

von σ, die im allgemeinen voneinander verschieden sind. Wir nennen sie σ_1, σ_2, σ_3. Zunächst erhalten wir durch Einsetzen von σ_1 in (32):

$$(35)\qquad \begin{cases} \sigma_1 a = f a + n b + m c, \\ \sigma_1 b = n a + g b + l c, \\ \sigma_1 c = m a + l b + h c. \end{cases}$$

Diese Gleichungen sind jetzt lösbar und geben ein Werttripel $\bar a, \bar b, \bar c$. Ebenso ergibt die Einsetzung von σ_2 und σ_3 davon im allgemeinen verschiedene Werte $\bar{\bar a}, \bar{\bar b}, \bar{\bar c}$ und $\bar{\bar{\bar a}}, \bar{\bar{\bar b}}, \bar{\bar{\bar c}}$. Da die a, b, c nur bis auf einen konstanten Faktor bestimmt werden können, so erhält man nicht drei Punkte, sondern drei Richtungen im Körper, parallel zu denen reine Dehnungen stattfinden können.

Diese Richtungen wollen wir kurz als Richtungen 1, 2, 3 bezeichnen. Sie sind nichts anderes, als die in der vorigen Nummer bereits besprochenen Hauptdilatationsachsen.

Daß die Werte σ_1, σ_2, σ_3 alle reell sind, kann man direkt aus der Theorie der algebraischen Gleichungen beweisen, doch würde dieser Weg zu lange Rechnungen erfordern, weshalb wir ihn hier nicht einschlagen. Wir werden statt dessen später einen indirekten Beweis geben und setzen zunächst die drei σ als reell voraus.

Dagegen wollen wir jetzt beweisen, daß, falls $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$, die drei Richtungen 1, 2, 3 senkrecht aufeinander stehen müssen. Zu dem Zwecke setzen wir in (35) die Werte $\bar a, \bar b, \bar c$ ein, durch die (35) identisch befriedigt wird. Dann folgt:

$$\begin{aligned} \sigma_1 \bar a &\equiv f \bar a + n \bar b + m \bar c, \\ \sigma_1 \bar b &\equiv n \bar a + g \bar b + l \bar c, \\ \sigma_1 \bar c &\equiv m \bar a + l \bar b + h \bar c. \end{aligned}$$

Multipliziert man diese der Reihe nach mit $\bar{\bar a}, \bar{\bar b}, \bar{\bar c}$ und addiert, so folgt:

$$(36)\qquad \begin{cases} \sigma_1 (\bar a \bar{\bar a} + \bar b \bar{\bar b} + \bar c \bar{\bar c}) \equiv f \bar a \bar{\bar a} + n \bar b \bar{\bar a} + m \bar c \bar{\bar a} \\ \qquad + n \bar a \bar{\bar b} + g \bar b \bar{\bar b} + l \bar c \bar{\bar b} \\ \qquad + m \bar a \bar{\bar c} + l \bar b \bar{\bar c} + h \bar c \bar{\bar c}. \end{cases}$$

Setzt man ebenso in (32) die Werte σ_2 und $\bar{\bar a}, \bar{\bar b}, \bar{\bar c}$ ein, so folgt ebenso:

$$\begin{aligned} \sigma_2 \bar{\bar a} &\equiv f \bar{\bar a} + n \bar{\bar b} + m \bar{\bar c}, \\ \sigma_2 \bar{\bar b} &\equiv n \bar{\bar a} + g \bar{\bar b} + l \bar{\bar c}, \\ \sigma_3 \bar{\bar c} &\equiv m \bar{\bar a} + l \bar{\bar b} + h \bar{\bar c}. \end{aligned}$$

Erweitert man diese bzw. mit $\bar a, \bar b, \bar c$ und addiert, so folgt:

$$(37)\qquad \begin{cases} \sigma_2 (\bar a \bar{\bar a} + \bar b \bar{\bar b} + \bar c \bar{\bar c}) \equiv f \bar a \bar{\bar a} + n \bar{\bar b} \bar a + m \bar{\bar c} \bar a \\ \qquad + n \bar{\bar a} \bar b + g \bar{\bar b} \bar b + l \bar{\bar c} \bar b \\ \qquad + m \bar{\bar a} \bar c + l \bar{\bar b} \bar c + h \bar{\bar c} \bar c. \end{cases}$$

Nun sind die rechten Seiten von (36) und (37) gleich, also müssen es auch die linken Seiten sein. Mithin folgt durch Subtraktion:

$$(38) \qquad (\sigma_1 - \sigma_2)(\bar{a}\bar{\bar{a}} + \bar{b}\bar{\bar{b}} + \bar{c}\bar{\bar{c}}) = 0,$$

oder, da nach Voraussetzung $\sigma_1 \neq \sigma_2$ ist:

$$\bar{a}\bar{\bar{a}} + \bar{b}\bar{\bar{b}} + \bar{c}\bar{\bar{c}} = 0.$$

Da aber $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ und $\bar{\bar{a}}, \bar{\bar{b}}, \bar{\bar{c}}$ proportional den Richtungskosinussen der Richtungen 1 und 2 sind, so heißt dies, daß 1 und 2 aufeinander senkrecht stehen. Genau ebenso verläuft der Beweis für die dritte Richtung.

So haben wir alle die Resultate wiedergefunden, die wir bereits aus der vorigen Nummer kannten. Wir können aber jetzt noch etwas weiter gehen.

Der obige Beweis für die Orthogonalität der Richtungen 1, 2, 3 versagt offenbar, wenn zwei Wurzeln σ_1 und σ_2 oder alle drei Wurzeln einander gleich werden. Nehmen wir zunächst einmal an: $\sigma_1 = \sigma_2$, aber $\sigma_1 \neq \sigma_3$, so stehen die Richtungen 1 und 2 noch immer auf 3 senkrecht, aber in der zu 3 senkrechten Ebene ist dann jede Richtung gleichberechtigt. Endlich sind alle Richtungen gleichwertig, im Falle $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ ist.

Dieser Gedankengang kann auch dazu dienen, die Reellität der drei Wurzeln $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ zu zeigen. Da nämlich komplexe Wurzeln immer paarweise als konjugiert komplex auftreten, so muß bei einer kubischen Gleichung jedenfalls eine Wurzel reell, und es können höchstens zwei konjugiert komplexe Wurzeln vorhanden sein. Nehmen wir als diese letzteren σ_1, σ_2 an und setzen

$$\sigma_1 = s_1 + i s_2; \quad \sigma_2 = s_1 - i s_2.$$

Diese komplexen Werte in (32) eingesetzt, liefern natürlich komplexe Werte von $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ resp. $\bar{\bar{a}}, \bar{\bar{b}}, \bar{\bar{c}}$. Und zwar sind $\bar{a}, \bar{\bar{a}}$; $\bar{b}, \bar{\bar{b}}$; $\bar{c}, \bar{\bar{c}}$ paarweise konjugiert komplex. Dann liefert Gleichung (38) folgendes Resultat:

$$(\sigma_1 - \sigma_2) \cdot (\text{einer Summe von 6 Quadraten}).$$

Da aber nach Voraussetzung $\sigma_1 \neq \sigma_2$ ist, so kann diese Gleichung bei komplexen Wurzeln nicht erfüllt werden. Folglich muß die Voraussetzung komplexer Wurzeln als falsch fallen gelassen werden.

100. Geometrische Darstellung.

Betrachten wir einen kugelförmigen Raum des Körpers vor der Deformation mit dem Zentrum in O und dem Radius R. Die Gleichung der Oberfläche ist also

$$a^2 + b^2 + c^2 = R^2.$$

Bezeichnet man die Koordinaten nach der Verrückung mit x, y, z, so ist nach (30):

(30a)
$$\begin{cases} x=(1+f)a+nb+mc, \\ y=na+(1+g)b+lc, \\ z=ma+lb+(1+h)c. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen können umgekehrt a, b, c als Funktionen von x, y, z dargestellt werden. Man erhält, wenn $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu$ leicht berechenbare Abkürzungen sind:

(30b)
$$\begin{cases} a=(1+\alpha)x+\nu y+\mu z, \\ b=\nu x+(1+\beta)y+\lambda z, \\ c=\mu x+\lambda y+(1+\gamma)z. \end{cases}$$

Dies in die Kugelgleichung eingesetzt liefert:

(39) $$\{(1+\alpha)x+\nu y+\mu z\}^2+\{\nu x+(1+\beta)y+\lambda z\}^2+\{\mu x+\lambda y+(1+\gamma)z\}^2=R^2.$$

Dies ist aber die Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung, welche „Deformationsfläche“ oder „Verzerrungsfläche“ genannt wird. Es ist natürlich zweckmäßig, diese Fläche auf die Hauptdilatationsachsen als Koordinatenachsen zu beziehen. Es ergibt sich für die Gleichung der undeformierten Kugel in X, Y, Z:

$$A^2+B^2+C^2=R^2.$$

Daraus nach (25a):

(40) $$\frac{X^2}{(1+\sigma_1)^2}+\frac{Y^2}{(1+\sigma_2)^2}+\frac{Z^2}{(1+\sigma_3)^2}=R^2,$$

woraus man erkennt, daß die Verzerrungsfläche stets ein Ellipsoid, und zwar im allgemeinen ein dreiachsiges, ist. Die Größe der Halbachsen ist

$$R(1+\sigma_1), \quad R(1+\sigma_2), \quad R(1+\sigma_3).$$

Werden zwei der Größen σ, also etwa σ_1 und σ_2, einander gleich, so artet das Ellipsoid in ein Rotationsellipsoid, und falls alle drei Größen σ gleich werden, in eine Kugel aus. Natürlich gelten diese Betrachtungen nur, solange die Deformationen linear sind, d. h. im allgemeinen nur, solange wir einen kleinen Bereich ins Auge fassen. Wir werden später Fälle kennen lernen, in denen man nichtlineare Deformationen in Betracht zieht. Für einen endlichen Bereich existiert in diesen Fällen kein Deformationsellipsoid, sondern die entstehende Deformationsfläche ist viel komplizierter. Erst bei Beschränkung auf einen unendlich kleinen Bereich resultieren wieder die hier besprochenen einfachen Ergebnisse.

Die obigen Überlegungen gestatten uns sehr einfach die Volumveränderung der Volumeinheit des deformierten Körpers zu bestimmen; wir wollen sie Σ nennen.

Vor der Deformation haben wir eine Kugel mit dem Radius R; also

$$V_0=\tfrac{4}{3}R^3\pi;$$

nach der Dehnung ein Ellipsoid mit den Halbachsen $R(1+\sigma_1)$, $R(1+\sigma_2)$, $R(1+\sigma_3)$; also

$$V_1 = \tfrac{4}{3} R^3 \pi (1 + \sigma_1)(1 + \sigma_2)(1 + \sigma_3) = \tfrac{4}{3} R^3 \pi (1 + \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3),$$

da die σ_1, σ_2, σ_3 infinitesimale Größen sind.

Die Volumänderung der Volumeinheit, die sogenannte „räumliche Dilatation" ist also

(40a) $$\frac{V_1 - V_0}{V_0} = \Sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 .$$

Wir wollen nun noch eine Eigenschaft der Größen σ_1, σ_2, σ_3 ableiten, deretwegen man ihnen den Namen „Hauptdilatationen" beilegt.

Wir schlagen im undeformierten Medium um O eine Kugel mit dem Radius 1; die Gleichung der Oberfläche ist also

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 .$$

Nach der Dehnung ist diese in das betreffende Deformationsellipsoid übergegangen. Wir wollen nun nach den maximalen oder minimalen Dehnungen fragen. Der Abstand der Punkte der Kugeloberfläche vom Zentrum war vor der Deformation 1, nach der Deformation ist der Abstand derselben Massenpunkte ein anderer, etwa gleich $1 + s$. Dann haben wir unter Beachtung des Umstandes, daß s, ξ, η, ζ infinitesimal sind:

$$(1+s)^2 = 1 + 2s = (a+\xi)^2 + (b+\eta)^2 + (c+\zeta)^2 ,$$

oder:

(41) $$s = a\xi + b\eta + c\zeta ;$$

in (41) setzen wir nun für ξ, η, ζ die Werte aus (30) ein; es folgt dann

$$s = fa^2 + gb^2 + hc^2 + 2nab + 2lbc + 2mca ;$$

s, d. h. die Dilatation der Längeneinheit, nimmt ihren Maximal- oder Minimalwert an, wenn die Variation δs verschwindet, wobei zu beachten ist, daß stets $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ sein muß, oder, in variierter Form:

(42) $$a\delta a + b\delta b + c\delta c = 0 .$$

Wir erhalten also:

$$\delta s = 0 = fa\delta a + fb\,\delta b + fc\delta c + na\delta b + nb\delta a + lbdc + lc\delta b + mc\delta a + ma\delta c ,$$

oder:

(43) $$0 = (fa + nb + mc)\delta a + (na + gl + lc)\delta b + (ma + lb + hc)\delta c .$$

Da die Gleichungen (42) und (43) zusammen befriedigt werden müssen, so können sich die Koeffizienten von δa, δb, δc in beiden nur durch einen konstanten Faktor unterscheiden. Wir erhalten also, wenn dieser Faktor mit τ bezeichnet wird:

$$\frac{fa + nb + mc}{a} = \frac{na + gb + lc}{b} = \frac{ma + lb + hc}{c} = \tau$$

oder

$$(44)\qquad \begin{cases} fa+nb+mc=\tau a, \\ na+gb+lc=\tau b, \\ ma+lb+hc=\tau c. \end{cases}$$

Die diesen Gleichungen (44) genügenden Werte a, b, c bestimmen zusammen mit dem Anfangspunkte Richtungen, in denen die Dilatationen ihre Grenzwerte annehmen. Die Behandlung der Gleichungen (44) können wir uns aber ersparen; denn sie sind mit den Gleichungen (32) identisch, welche uns die drei senkrechten Richtungen lieferten, in denen reine Dehnungen auftraten. Wir sehen also daraus, daß die Werte $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, die eben diesen Richtungen zukommen, die Grenzwerte der Dilatationen darstellen. Damit ist die Bezeichnung als Hauptdilatationen gerechtfertigt.

101. Synthese der allgemeinen linearen infinitesimalen Deformation aus Drehung und Dehnung; Divergenz und Rotation (Curl).

Wir wollen jetzt zwei Deformationen nach den Regeln der Gleichungen (16) zusammensetzen, nämlich eine Rotation (I) und eine Dehnung (II). Die Formeln (19) und (30) lauten:

I. II.

$$(19)\qquad \begin{cases} \xi_1= 0a-rb+qc, \\ \eta_1= ra+0b-pc, \\ \zeta_1=-qa+pb+0c. \end{cases} \qquad (30)\qquad \begin{cases} \xi_2=fa+nb+mc, \\ \eta_2=na+gb+lc, \\ \zeta_2=ma+lb+hc. \end{cases}$$

Dann erhalten wir für die resultierende Deformation (I + II):

$$(45)\qquad \begin{cases} \xi=fa+(n-r)b+(m+q)c, \\ \eta=(n+r)a+gb+(l-p)c, \\ \zeta=(m-q)a+(l+p)b+hc. \end{cases}$$

Die Gleichungen (19), (30) und (45) lehren nun folgendes: Die beiden primären Deformationen sind spezielle, wie aus dem Koeffizientenschema derselben hervorgeht: Die erste hat die Diagonalglieder Null und ist antisymmetrisch (3 Koeffizienten), die zweite ist symmetrisch mit 6 Koeffizienten. Dagegen hat die Deformation (I + II) 9 Koeffizienten, ohne irgendwelche Symmetrieeigenschaften oder Beschränkungen; (I + II) ist also eine ganz allgemeine lineare infinitesimale Deformation, wie sie in Gleichung (11a) formuliert ist.

Daraus folgt: „**Jede lineare infinitesimale Deformation kann als zusammengesetzt betrachtet werden aus einer Drehung und aus einer Dehnung nach drei zueinander senkrechten**

Achsen[1])", oder, vektoriell gesprochen, in allgemeiner Fassung: „Jede lineare homogene Vektorfunktion kann in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Teil gespalten werden."

Damit (45) und (11a) die nämliche Deformation darstellen, muß sein:

$$(46)\qquad \begin{cases} k_{11}=f; & k_{12}=n-r; & k_{13}=m+q; \\ k_{21}=n+r; & k_{22}=g; & k_{23}=l-p; \\ k_{31}=m-q; & k_{32}=l+p; & k_{33}=h\,. \end{cases}$$

Ist uns, wie hier, die Aufgabe gestellt, eine allgemeine Deformation (11a) in eine Drehung und eine Dehnung zu zerlegen, so haben wir aus den Gleichungen (46) die drei Koeffizienten p, q, r der Rotation und die 6 Koeffizienten f, g, h, l, m, n der Dehnung zu bestimmen. Da die Gleichungen (46) linear sind, so ist dies stets und nur auf eine Weise möglich. Wir erhalten zunächst für die drei Koeffizienten der Drehung:

$$(47)\qquad p=\tfrac{1}{2}(k_{32}-k_{23}); \quad q=\tfrac{1}{2}(k_{13}-k_{31}); \quad r=\tfrac{1}{2}(k_{21}-k_{12})\,.$$

Ebenso ergeben sich die 6 Koeffizienten der Dehnung:

$$(48)\qquad \begin{cases} f=k_{11}; & g=k_{22}; & h=k_{33}; \\ l=\tfrac{1}{2}(k_{32}+k_{23}); & m=\tfrac{1}{2}(k_{13}+k_{31}); & n=\tfrac{1}{2}(k_{21}+k_{12})\,. \end{cases}$$

Diesen Gleichungen kann man noch eine andere Gestalt geben, wenn man auf die Bedeutung der Koeffizienten k_{11} bis k_{33} nach Gleichung (10) zurückgreift.

Dabei wollen wir gleichzeitig berücksichtigen, daß wir es nur mit infinitesimalen Deformationen zu tun haben. Dies bedingt in folgender Weise eine Vereinfachung: Die Größen k_{11}, k_{12}, ... k_{33} haben wir, ebenso wie ξ, η, ζ, als Funktionen der Anfangswerte a, b, c, betrachtet. Als Funktionen von a, b, c sind auch die augenblicklichen Koordinaten $x=a+\xi$, $y=b+\eta$, $z=c+\zeta$ zu betrachten, die sich übrigens von ihnen nur um infinitesimale Beträge unterscheiden. Umgekehrt natürlich kann man a, b, c als Funktionen von x, y, z betrachten und daher auch ξ, η, ζ und die Koeffizienten k_{11}, k_{12} ... k_{33} als Funktionen der augenblicklichen Koordinaten x, y, z. Wir haben nun für eine infinitesimale Größe f:

$$f(x,y,z)=f(a+\xi,b+\eta,c+\zeta)=f(a,b,c)+\frac{\partial f}{\partial x}\xi+\frac{\partial f}{\partial y}\eta+\frac{\partial f}{\partial z}\zeta+ \text{ usw.},$$

d. h. aber, wenn $\frac{df}{dx}, \ldots, \xi, \ldots$ infinitesimale Größen erster Ordnung sind, daß bis auf Größen zweiter Ordnung gesetzt werden darf:

$$f(x,y,z)=f(a,b,c)\,.$$

[1]) Damit soll nicht gesagt sein, daß die obige Zerlegung die einzig mögliche ist; da aber bei der oben vorgenommenen Zerlegung die Hauptdilatationsachsen zueinander senkrecht sind, so ist sie die wichtigste.

Dasselbe gilt für die Ableitungen dieser Größe f; man kann die partiellen Ableitungen nach a, b, c mit demselben Grade von Genauigkeit ersetzen durch diejenigen nach x, y, z. Denn man hat:

$$\frac{\partial f(a\,b\,c)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial x},$$

und da:

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\partial(x-\xi)}{\partial x} = 1 - \frac{\partial \xi}{\partial x}, \qquad \frac{\partial b}{\partial x} = \frac{\partial(y-\eta)}{\partial x} = -\frac{\partial \eta}{\partial x},$$

$$\frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial(z-\zeta)}{\partial x} = -\frac{\partial \zeta}{\partial x},$$

so ist weiter:

$$\frac{\partial f(a\,b\,c)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial a} - \left\{\frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial b}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial c}\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right\},$$

und darin ist die Klammer unendlich klein von der zweiten Ordnung, wenn f und $\frac{\partial f}{\partial a}, \ldots, \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdots$ unendlich klein von der ersten Ordnung sind. Also hat man unter den bisher benutzten Vernachlässigungen:

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad \frac{\partial f}{\partial b} = \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad \frac{\partial f}{\partial c} = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Wenn man dies berücksichtigt, so erhält man nach (10) und (47) die Formeln:

$$(49) \quad p = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z}\right), \qquad q = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right), \qquad r = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y}\right),$$

und ferner nach (10) und (48):

$$(50) \quad \begin{cases} f = \frac{\partial \xi}{\partial x}, & g = \frac{\partial \eta}{\partial y}, & h = \frac{\partial \zeta}{\partial z}, \\ l = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial z}\right), & m = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right), & n = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\right). \end{cases}$$

Da aus (29) und (40a) folgt, daß

$$f + g + h = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \Sigma$$

ist, so erhält man schließlich für die räumliche Dilatation:

$$(51) \quad \Sigma = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}.$$

In den Gleichungen (49) und (51) sind zwei Ausdrücke enthalten, die in der Vektoranalysis eine große Rolle spielen. Führen wir statt ξ, η, ζ die Bezeichnung $\mathfrak{S}_x, \mathfrak{S}_y, \mathfrak{S}_z$ ein, um anzudeuten, daß ξ, η, ζ die Komponenten des Verschiebungsvektors $\mathfrak{S}$ sind, so lassen sich die genannten Gleichungen schreiben:

$$(49a) \quad p = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathfrak{S}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{S}_y}{\partial z}\right), \qquad q = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathfrak{S}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{S}_z}{\partial x}\right), \qquad r = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathfrak{S}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{S}_x}{\partial y}\right);$$

$$(51a) \quad \Sigma = \frac{\partial \mathfrak{S}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{S}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{S}_z}{\partial z}.$$

Aus der physikalischen Bedeutung von Σ folgt sofort, daß die rechte Seite ein **Skalar** ist, der in einer bestimmten, aus (51a) erkennbaren

Weise aus dem Vektor $\mathfrak{s}$ abgeleitet ist; ferner ist Σ offenbar unabhängig vom Koordinatensystem, denn die räumliche Dilatation als physikalische Realität kann nicht von einer mathematischen Zwischenkonstruktion abhängen. Um diese Unabhängigkeit zum Ausdruck zu bringen, hat die Vektoranalysis eine besondere Bezeichnung und ein besonderes Symbol für einen so gebildeten Skalar eingeführt. Sie nennt, wenn $\mathfrak{A}$ ein beliebiger Vektor ist, den Ausdruck $\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial z}$ die „Divergenz" des Vektors $\mathfrak{A}$ und schreibt „div $\mathfrak{A}$"; also ist:

(51b) $$\Sigma = \operatorname{div} \mathfrak{s}\,.$$

Woher der Name „Divergenz" stammt, kann erst in der Hydrodynamik gesagt werden. Anderseits sind p, q, r die Komponenten des Vektors der Rotation; also stellen auch die Ausdrücke $\frac{\partial \mathfrak{s}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{s}_y}{\partial z}, \ldots$ Komponenten eines Vektors dar, der in einer ganz bestimmten, aus (49a) erkennbaren Weise aus dem Vektor $\mathfrak{s}$ abgeleitet ist. Die Vektoranalysis nennt diesen abgeleiteten Vektor die „Rotation" oder den „Curl" („Quirl") des ersten Vektors und bezeichnet ihn durch das Symbol „rot" oder „curl". Es wird dann also (49a), wenn wir den als Vektor aufgefaßten infinitesimalen Rotationswinkel durch $\mathfrak{d}$ bezeichnen:

(49b) $$\mathfrak{d} = \tfrac{1}{2} \operatorname{rot} \mathfrak{s} = \tfrac{1}{2} \operatorname{curl} \mathfrak{s}\,.$$

Differenziert man diese Gleichungen nach t, so ist $\frac{d\mathfrak{d}}{dt}$ offenbar der Vektor der Rotationsgeschwindigkeit, den wir früher durch $\mathfrak{u}$ bezeichneten; ferner ist $\frac{d\mathfrak{s}}{dt}$ gleich der Translationsgeschwindigkeit $\mathfrak{c}$; also erhält man die (49b) äquivalente Formel:

(49c) $$\mathfrak{u} = \tfrac{1}{2} \operatorname{rot} \mathfrak{c} = \tfrac{1}{2} \operatorname{curl} \mathfrak{c}\,.$$

Die Begriffe „Divergenz" und „Rotation" werden uns im folgenden immer wieder begegnen.

Daß wir jetzt alle Größen als Funktionen der Raumkoordinaten x, y, z haben, ist insofern ein Vorteil, als wir in dem nächsten Kapitel gewisse mit den Deformationsgrößen in innigem Zusammenhange stehende Größen betrachten werden, die als Funktionen der Raumkoordinaten x, y, z gegeben sind. Dann haben wir es in unseren Gleichungen nur mit Funktionen von x, y, z zu tun.

102. Definitive Bezeichnungen; die drei Hauptdilatationen als Tensortripel.

Da wir uns im folgenden fast ausschließlich mit der reinen Dehnung zu befassen haben, wollen wir nun die in der Elastizitätslehre übliche Bezeichnung einführen. Man schreibt:

$$(52)\quad \begin{cases} f = \dfrac{\partial \xi}{\partial x} = x_x, \quad g = \dfrac{\partial \eta}{\partial y} = y_y, \quad h = \dfrac{\partial \zeta}{\partial z} = z_z, \\ 2l = \dfrac{\partial \zeta}{\partial y} + \dfrac{\partial \eta}{\partial z} = z_y = y_z, \quad 2m = \dfrac{\partial \xi}{\partial z} + \dfrac{\partial \zeta}{\partial x} = x_z = z_x, \\ \qquad 2n = \dfrac{\partial \eta}{\partial x} + \dfrac{\partial \xi}{\partial y} = y_x = x_y. \end{cases}$$

Die drei Größen x_x, y_y, z_z nennt man die „Dehnungen", die sechs Größen $x_y = y_x$, $y_z = z_y$, $z_x = x_z$ die „Gleitungen" oder „Scheerungen".

Durch die Gleichungen (52) sind neun Koeffizienten definiert, von denen diejenigen, deren Index mit dem Buchstaben nicht übereinstimmt, paarweise gleich sind. Sie sind also äquivalent sechs unabhängigen Koeffizienten, wie es für die reine Dehnung ja auch sein muß.

Mit diesen Bezeichnungen lassen sich die Gleichungen (30) der reinen Dehnung folgendermaßen schreiben:

Zunächst hat man:

$$\xi = x_x a + \tfrac{1}{2} x_y b + \tfrac{1}{2} x_z c;$$

dafür kann man setzen:

$$\xi = x_x(x - \xi) + \tfrac{1}{2} x_y (y - \eta) + \tfrac{1}{2} x_z (z - \zeta).$$

Vernachlässigt man hier ξ, η, ζ gegen x, y, z, da erstere infinitesimale Funktionen sind, so hat man endgültig in sehr eleganter Form:

$$(53)\quad \begin{cases} \xi = x_x \cdot x + \tfrac{1}{2} x_y \cdot y + \tfrac{1}{2} x_z \cdot z, \\ \eta = \tfrac{1}{2} y_x \cdot x + y_y \cdot y + \tfrac{1}{2} y_z \cdot z, \\ \zeta = \tfrac{1}{2} z_x \cdot x + \tfrac{1}{2} z_y \cdot y + z_z \cdot z. \end{cases}$$

Definiert man eine Funktion Φ durch die Gleichung:

$$(54)\quad 2\Phi = x_x \cdot x^2 + y_y \cdot y^2 + z_z \cdot z^2 + x_y \cdot xy + y_z \cdot yz + z_x \cdot zx,$$

so erkennt man, daß man nach (53) und (54) schreiben kann:

$$(55)\quad \xi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \eta = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \zeta = \frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

oder, vektoriell geschrieben unter Benutzung des auf pag. 434 ein- Begriffs „Gradient":

$$(55\text{b})\quad \mathfrak{s} = \operatorname{grad} \Phi.$$

Der Funktion Φ kommen also die Eigenschaften eines Potentials zu, das wir etwa „Deformationspotential" nennen können.

Die sechs Größen x_x, y_y, z_z, y_z, z_x, x_y treten in den Gleichungen (53) als die Koeffizienten einer linearen homogenen symmetrischen Vektorfunktion auf, wie wir schon öfters hervorgehoben haben. Daraus folgt nach den allgemeinen Untersuchungen der Nr. 75, daß diese sechs Größen als Komponenten erster Art (x_x, y_y, z_z) und zweiter Art (y_z, z_x, x_y) eines Tensortripels aufgefaßt werden müssen. Die Tensoren T_1, T_2, T_3 dieses Tripels sind nichts anderes als die Hauptdilatationen, die wir durch σ_1, σ_2, σ_3 bezeichnet haben. Auch die zugehörige

Tensorfläche ist leicht ableitbar; ihre Gleichung ist nach Gl. (65) des VII. Kap. auf pag. 360 unter Berücksichtigung von Formel (53) einfach:

$$\pm 1 = (x_x \cdot x + \tfrac{1}{2} x_y \cdot y + \tfrac{1}{2} x_z \cdot z)x + (\tfrac{1}{2} y_x \cdot x + y_y \cdot y + \tfrac{1}{2} y_z \cdot z)y + (\tfrac{1}{2} z_x \cdot x + \tfrac{1}{2} z_y \cdot y + z_z \cdot z)z$$

oder

$$(56) \qquad \pm 1 = x_x \cdot x^2 + y_y \cdot y^2 + z_z \cdot z^2 + y_z \cdot yz + z_x \cdot zx + x_y \cdot xy.$$

Da Dehnungen im Gegensatz zu den bisher allein als Tensoren erkannten Trägheitsmomenten auch negativ sein können (Verkürzungen), so ist hier die in Nr. 75 erwähnte Möglichkeit gegeben, daß (56) zwei konjugierte Hyperboloide darstellen kann. Die Tensorfläche (56) ist natürlich nicht zu verwechseln mit der in (39) oder (40) definierten „Deformationsfläche", welch letztere ja stets ein dreiachsiges Ellipsoid darstellt.

103. Rechenregeln mit den Operationen Divergenz, Rotation, Gradient.

Zum Schlusse dieses Kapitels wird es zweckmäßig sein, die wichtigsten Rechenoperationen mit den Begriffen Divergenz, Rotation, Gradient hier zusammenzustellen, da im folgenden häufig davon Gebrauch gemacht werden wird. Man muß sich vorher klar machen, daß die Operationen „Divergenz" und „Rotation" ihrer Definition gemäß nur auf Vektoren angewendet werden können, während die Operation „Gradient" nur auf einen Skalar wirken kann. Deswegen hat zum Beispiel die doppelte Operation div (rot $\mathfrak{A}$) einen Sinn, da rot $\mathfrak{A}$ wieder ein Vektor ist, dagegen würde z. B. rot (div $\mathfrak{A}$) sinnlos sein, da div $\mathfrak{A}$ kein Vektor ist. Wir untersuchen folgende Ausdrücke:

1. div grad Φ, 2. rot grad Φ, 3. rot rot $\mathfrak{A}$, 4. div rot $\mathfrak{A}$.

Wir erhalten zunächst für die Operation div grad Φ, gemäß der Bedeutung der Divergenz und des Gradienten, offenbar:

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}\Phi) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right),$$

oder nach Ausrechnung:

$$(57) \qquad \operatorname{div}\operatorname{grad}\Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \equiv \Delta\Phi.$$

Offenbar ist div grad Φ wieder ein Skalar.

Dagegen ist der zweite der zu untersuchenden Ausdrücke „rot grad Φ" ein Vektor, und wir können uns damit begnügen, die Rechnung für die x-Komponente auszuführen und das Resultat nachher vektoriell zu verallgemeinern. Die x-Komponente der Rotation eines Vektors $\mathfrak{A}$ ist:

$$\operatorname{rot}_x \mathfrak{A} = \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial z}.$$

Setzen wir $\mathfrak{A} = \operatorname{grad}\Phi$, d. h. machen wir

$$\mathfrak{A}_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad \mathfrak{A}_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y},$$

so folgt aus der letzten Gleichung:

$$\mathrm{rot}_x (\mathrm{grad}\,\Phi) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) = 0.$$

Ebenso für die y- und z-Komponenten; also schließlich:

(58) $$\mathrm{rot\,grad}\,\Phi = 0.$$

Der dritte der zu untersuchenden Ausdrücke „rot rot $\mathfrak{A}$" ist ebenfalls ein Vektor, und wir beschränken uns daher wieder auf die Ableitung der x-Komponente, die nachher vektoriell verallgemeinert wird. Setzen wir für einen Moment den Vektor rot $\mathfrak{A}$ gleich $\mathfrak{B}$, so ist:

$$\mathrm{rot}_x \mathfrak{B} = \frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial z};$$

wird nun für $\mathfrak{B}$ sein Wert rot $\mathfrak{A}$, d. h. wird

$$\mathfrak{B}_z = \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial y}, \quad \mathfrak{B}_y = \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial x}$$

gesetzt, so folgt für die x-Komponenten des gesuchten Vektors rot rot $\mathfrak{A}$:

$$\mathrm{rot}_x (\mathrm{rot}\,\mathfrak{A}) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial x}\right),$$

was ausgerechnet ergibt:

$$\mathrm{rot}_x \mathrm{rot}\,\mathfrak{A} = -\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{A}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_x}{\partial z^2}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial z}\right).$$

Die Klammer des letzten Gliedes ist gleich div $\mathfrak{A}$, so daß geschrieben werden kann:

$$\mathrm{rot}_x (\mathrm{rot}\,\mathfrak{A}) = -\Delta \mathfrak{A}_x + \frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{div}\,\mathfrak{A}) = -\Delta \mathfrak{A}_x + \mathrm{grad}_x (\mathrm{div}\,\mathfrak{A});$$

ebenso für die y- und z-Komponenten. Die vektorielle Zusammenfassung der letzten drei Gleichungen liefert also das Resultat:

(59) $$\mathrm{rot\ rot}\,\mathfrak{A} = -\Delta \mathfrak{A} + \mathrm{grad\ div}\,\mathfrak{A}.$$

Die Doppeloperation „div rot $\mathfrak{A}$" endlich ist wieder ein Skalar; führt man die beiden Schritte aus, so folgt:

$$\mathrm{div\,rot}\,\mathfrak{A} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial y}\right),$$

und darin heben sich die Glieder der rechten Seite paarweise fort, so daß bleibt:

(60) $$\mathrm{div\ rot}\,\mathfrak{A} = 0.$$

Zehntes Kapitel.

Allgemeine Dynamik eines Kontinuums: Analyse des Spannungszustandes.

104. Verschiedene Arten der wirkenden Kräfte; innere Spannungen.

Die im neunten Kapitel betrachteten Verzerrungen treten an einem Körper stets zusammen mit gewissen Kräften auf, die auf ihn wirken. Beide Erscheinungen, die Kräfte einerseits und die Verzerrungen anderseits, gehören untrennbar zusammen; sie bilden gewissermaßen zwei Seiten eines und desselben physikalischen Vorganges. In der Sprache des gewöhnlichen Lebens pflegt man diesen Zusammenhang, entsprechend dem Kausalitätsbedürfnis des Menschen, dadurch auszudrücken, daß man die Kräfte als die Ursachen der Deformation oder diese als die Wirkung der Kräfte ansieht.

Die auf ein elastisches Medium wirkenden Kräfte pflegt man im allgemeinen in zwei Klassen zu teilen, die sogenannten Massen- oder Fernkräfte und die Oberflächen- oder Nahekräfte. Die Namen Fern- und Nahekräfte werden wir im folgenden vermeiden, da sie an dieser Stelle einer exakten Definition kaum fähig sind, während die an erster Stelle genannten Namen verwendet werden sollen.

Unter den Massenkräften verstehen wir, wie schon der Name sagt, solche, die auf die Masse des Körpers wirken, deren Betrag also der Masse proportional ist. Teilen wir den Körper in kleine Volumelemente $d\tau = dx\,dy\,dz$, so ist die unendlich kleine Masse eines solchen $dm = \varepsilon d\tau$, wo die Dichte ε als gegebene Funktion der Koordinaten x, y, z zu betrachten ist. Nennen wir die Kraft pro Masseneinheit (d. h. das, was wir in der gewöhnlichen Mechanik Beschleunigung nennen würden) $\mathfrak{K}$, so ist die Kraft, die auf ein Volumelement wirkt, gleich $\mathfrak{K}\varepsilon d\tau$, und die auf den ganzen Körper wirkende erhält man durch eine Integration über das gesamte Volumen des Körpers zu:

$$\int \mathfrak{K}\varepsilon d\tau .$$

Diese Integration ist natürlich vektoriell zu verstehen, da die Ausdrücke $\mathfrak{K}\varepsilon d\tau$ Vektoren sind und daher vektoriell addiert werden müssen. Das typische Beispiel für derartige Kräfte ist die Schwerkraft.

Nennen wir, wie gewöhnlich, die Kraft pro Masseneinheit $g\left(=981\,\frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}\right)$, so ist die Gesamtkraft:

$$g\int \varepsilon\, d\tau = gM,$$

wenn M die Masse des Körpers bedeutet, in Übereinstimmung mit dem Ansatz der gewöhnlichen Mechanik.

Nennen wir die Komponenten der Massenkraft X, Y, Z, so haben wir für die Komponenten der Gesamtkraft:

$$\int X\varepsilon\, d\tau, \quad \int Y\varepsilon\, d\tau, \quad \int Z\varepsilon\, d\tau. \tag{1}$$

Die zweite Art von Kräften, die „Oberflächenkräfte", wirken nur durch Vermittlung der Oberfläche auf den Körper. Teilen wir die Oberfläche eines Körpers in Flächenelemente $d\sigma$, so ist die Kraft auf ein solches proportional der Größe des Elementes selbst.

Wir führen hier folgende Bezeichnung ein. Auf dem Oberflächenelement $d\sigma$ des Körpers errichten wir die Normalen, deren positive Richtung wir so annehmen, daß sie in das Innere des Körpers weist, dem $d\sigma$ angehört. Die auf ein Oberflächenelement $d\sigma$, dessen Normalenrichtung n ist, wirkende Kraft setzen wir, wie schon eben erwähnt, proportional der Größe von $d\sigma$ und geben außerdem der Kraft als Index die positive Normale des Flächenelementes, also hier den Index n. Die Indizes bedeuten also hier nicht Komponenten, wie in der Vektoranalysis, sondern die Normalenrichtung des Oberflächenelementes, auf das die betrachtete Kraft wirkt. Um einer Verwechselung dieser verschiedenen Indexbezeichnungen vorzubeugen, werden wir in diesem und den nächsten Kapiteln, in denen die neue Bezeichnung angewendet wird, von der Benutzung der Vektorrechnung absehen. Wir setzen den Betrag der Kraft auf das Element $d\sigma$ gleich $K_n\, d\sigma$; K_n bedeutet also den Betrag der Kraft pro Flächeneinheit. Derartige Kräfte pflegt man auch Drucke (die natürlich positiv oder negativ sein können) zu nennen. Die Komponenten dieser Kraft sollen mit X_n, Y_n, Z_n bezeichnet werden. Danach erhalten wir für die Komponenten der gesamten Druckkraft:

$$\int X_n\, d\sigma, \quad \int Y_n\, d\sigma, \quad \int Z_n\, d\sigma. \tag{2}$$

Haben wir also ein in der y, z-Ebene liegendes Flächenelement, dessen Normale die positive x-Richtung ist, so wäre die Oberflächenkraft mit dem Index n zu versehen und ihre Komponenten mit X_x, Y_x, Z_x zu bezeichnen. Ganz entsprechende Bedeutung haben die Symbole

$$\begin{matrix} X_y, & Y_y, & Z_y, \\ X_z, & Y_z, & Z_z. \end{matrix}$$

Die ersten drei sind die Komponenten der Druckkraft auf ein parallel der $x z$-Ebene orientiertes, die letzten drei auf ein parallel der $x y$-Ebene orientiertes Flächenelement.

Das typische Beispiel für derartige Oberflächenkräfte ist der Druck, den ein in ein Gefäß eingeschlossenes Gas erleidet.

Man erkennt leicht folgendes: Die Kräfte X_x, Y_y, Z_z stehen offenbar normal zu dem Flächenstück, auf das sie wirken, während die Größen X_y, Y_x, Y_z, Z_y, X_z, Z_x tangential liegen. Man bezeichnet daher die drei ersteren als die „Normaldrucke", die sechs letzteren als die „Schubspannungen" oder „Tangentialspannungen".

Es könnte nach dem Vorhergehenden scheinen, als ob die Bedeutung der Symbole X_x bis Z_z auf die Oberfläche beschränkt sei. Allein eine einfache Überlegung wird uns zeigen, daß man das Vorhandensein solcher Drucke auch im Innern jedes elastischen Körpers annehmen kann, ja annehmen muß. Denken wir uns nämlich aus einem elastischen Körper, auf den Kräfte wirken, und der unter dem Einfluß dieser Kräfte im Gleichgewicht ist, einen Teil, z. B. eine Kugel vom Radius R, herausgeschnitten (Fig. 142). Dann wird, wenn der schraffierte Teil plötzlich fortgenommen wird, der übrigbleibende Körper nicht mehr im Gleichgewicht sein, sondern, wie die Erfahrung lehrt, eine neue Gleichgewichtslage aufsuchen, bei der die Gestalt und das Volumen des entstandenen Hohlraumes sich ändern. Der herausgeschnittene Teil des Körpers hatte offenbar, solange er noch an Ort und Stelle war, Kräfte auf den umgebenden Körper ausgeübt. Soll der Körper nun auch nach Fortnahme eines Stückes im nämlichen Gleichgewichtszustande bleiben, so müssen an Stelle des fortgenommenen Teiles geeignete Kräfte auf der Oberfläche des Hohlraumes angebracht werden. Auch der herausgenommene Teil kann nicht in seinem ursprünglichen Gleichgewichtszustande verharren, aus dem nämlichen Grunde: Der umgebende Körper übte auch auf ihn Kräfte aus, die wir nach Entfernung des Stückes wieder durch geeignete Oberflächenkräfte ersetzen müssen, wenn wir den Gleichgewichtszustand unverändert erhalten wollen. Es sind also in jedem Punkte der elastischen Substanz Kräfte wirkend zu denken, wenn äußere Kräfte den Körper angreifen, und zwar sind die inneren Kräfte nach dem Vorhergehenden offenbar ihrem Charakter nach Oberflächenkräfte. Denn wenn wir durch eine gedachte Fläche einen Teil des Körpers gegen einen anderen abgrenzen, so üben beide Teile aufeinander durch die Trennungsfläche hindurch Kräfte aufeinander aus. Diese Kräfte gehorchen natürlich dem Reaktionsprinzip, d. h.

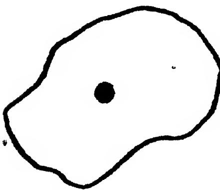


Fig. 142.

$$\mathfrak{K}_{12} = -\mathfrak{K}_{21}.$$

Sie heben sich daher in ihrer Wirkung nach außen auf: durch sie kann der Schwerpunkt des Körpers keine Veränderung seiner Bewegung erleiden. Sie scheinen deshalb bei oberflächlicher Betrachtung nicht vorhanden zu sein. In Wirklichkeit sind jedoch diese inneren Spannungen stets wirkend und verlangen eine eingehende Untersuchung, da sie gewissermaßen die nächste Ursache der Deformation sind. Man kann sich ja den Vorgang einer elastischen Beanspruchung etwa so denken: die auf den Körper wirkenden äußeren Kräfte (Massen- und Oberflächenkräfte) rufen zunächst im Innern die Spannungen hervor, diese wiederum die Verzerrung. Aus diesem Grunde bedürfen wir einer eingehenden Analyse des Spannungszustandes, der mancherlei Parallelen mit dem Verzerrungszustande aufweist. Die Größe der Spannung wird zunächst eine Funktion des Ortes im Körper sein. Wenn wir uns nun einen bestimmten Punkt im Körper herausgreifen, so können durch denselben unendlich viele Ebenen gelegt werden. Für alle diese Ebenen wird im allgemeinen der Spannungszustand ein verschiedener sein, so daß zur vollständigen Charakterisierung der Spannung in einem Punkte die Kenntnis der Spannung (des Druckes) in den unendlich vielen durch ihn gelegten Ebenen gehört. Diese Aufgabe wird lösbar durch die im folgenden bewiesenen Sätze, die zunächst zeigen, daß man dazu **neun** Größen, nämlich die Größen X_x, Y_y, Z_z, X_y, Y_x, Y_z, Z_y, X_z, Z_x, die man die Komponenten der „Spannung" nennt, kennen muß. Diese Zahl läßt sich nach einem zweiten Satze jedoch noch auf sechs reduzieren. Sind diese sechs Größen als Funktionen der äußeren Kräfte bekannt, so ist der Spannungszustand der elastischen Körper bestimmt. Diese sechs Größen lassen sich, wie man schon hier vermuten kann, als die Komponenten eines Tensortripels auffassen, und man ersieht wieder die Bedeutung, die diesem Begriffe in der Physik zukommt.

105. Beziehungen zwischen den Massenkräften und den Spannungen.

Wir beweisen zunächst einen Satz, der die Komponenten der wirkenden Massenkräfte in Beziehung setzt zu den neun Spannungskomponenten. Dieser Zusammenhang wird natürlich ein anderer im Gleichgewichtszustande, ein anderer im Falle der beschleunigten Bewegung sein. Doch wird es grundsätzlich genügen, den ersten Fall ausführlich zu behandeln, da nach dem d'Alembertschen Prinzip jedes Bewegungsproblem auf ein Gleichgewichtsproblem zurückgeführt werden kann.

Die Bedingung dafür, daß der elastische Körper im Gleichgewicht sei, ist die, daß erstens sein Schwerpunkt im Zustand der Ruhe bleibt und zweitens der Körper keine Drehung ausführt. Dies sind zunächst allerdings nur die Bedingungen für das Gleichgewicht eines starren Körpers. Aber wenn ein deformierter Körper zur Ruhe kommt, so kann das Gleichgewicht nicht da-

durch gestört werden, daß man ihn sich erstarrt denkt. Daher stammt die Berechtigung, dieselben Bedingungen für das Gleichgewicht eines elastischen Körpers zu benutzen.

Um den Schwerpunkt in Ruhe zu halten, müssen die Komponenten der wirkenden Kräfte in toto gleich Null werden. Also muß sein:

$$(3) \qquad \begin{cases} \int \varepsilon X\, d\tau + \int X_n\, d\sigma = 0, \\ \int \varepsilon Y\, d\tau + \int Y_n\, d\sigma = 0, \\ \int \varepsilon Z\, d\tau + \int Z_n\, d\sigma = 0. \end{cases}$$

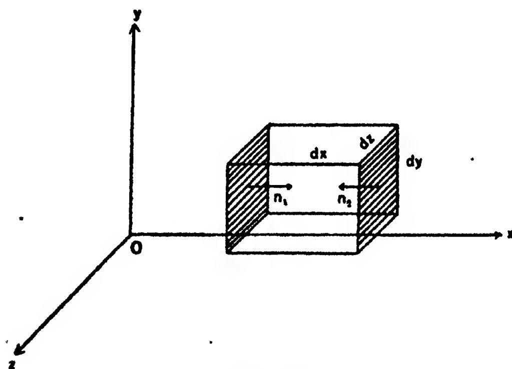


Fig. 143.

Ferner müssen, damit keine Rotation eintritt, die Drehungsmomente der Kräfte um die Koordinatenachsen verschwinden. Dies liefert die folgenden Gleichungen:

$$(4) \qquad \begin{cases} \int \varepsilon (yZ - zY)\, d\tau + \int (yZ_n - zY_n)\, d\sigma = 0, \\ \int \varepsilon (zX - xZ)\, d\tau + \int (zX_n - xZ_n)\, d\sigma = 0, \\ \int \varepsilon (xY - yX)\, d\tau + \int (xY_n - yX_n)\, d\sigma = 0. \end{cases}$$

Wir wollen uns zunächst nur mit dem Tripel (3) beschäftigen, das uns den gewünschten Zusammenhang liefern wird.

Da jedes Volumelement des Körpers im Gleichgewicht sich befinden muß, so müssen die Gleichungen (3) und (4) für jedes derartige Element gelten. Dabei bedeuten die Größen X_n, Y_n, Z_n die Oberflächenkräfte, die von dem umgebenden Körper her auf dies Element einwirken, ganz in Übereinstimmung mit den Betrachtungen der vorhergehenden Nummer. Wir wenden also (3) an auf ein unendlich kleines Parallelepiped, dessen Kanten resp. die Längen dx, dy, dz haben und parallel den Koordinatenachsen orientiert sind (Fig. 143).

Das erste Glied der ersten Gleichung von (3) wird dann einfach:

(5a) $$\varepsilon X\,dx\,dy\,dz\,.$$

Eine genauere Betrachtung verlangt das zweite Glied. Das Integral ist über die sechs Flächen des Würfels zu erstrecken, die paarweise in den unendlich kleinen Abständen dx, dy, dz einander gegenüberliegen.

Nehmen wir zunächst die beiden Seiten parallel der yz-Ebene, die in Fig. 143 schraffiert sind. Die Normalenrichtung n_1 der ersten stimmt überein mit der positiven x-Richtung, die Normalenrichtung n_2 der gegenüberliegenden ist entgegengesetzt gerichtet. Wir erhalten also für diese beiden Flächen aus der ersten Gleichung (3):

$$(X_x)_x\,dy\,dz + (X_{-x})_{x+dx}\,dy\,dz\,,$$

oder da $X_{-x} = -X_x$ ist:

$$[(X_x)_x - (X_x)_{x+dx}]\,dy\,dz\,.$$

Nun entwickeln wir $(X_x)_{x+dx}$ nach dem Taylorschen Satze, wobei wir hinter dem linearen Gliede abbrechen; also:

$$(X_x)_{x+dx} = (X_x)_x + \frac{\partial X_x}{\partial x}\,dx\,.$$

Damit wird die obige Differenz:

(5b) $$-\frac{\partial X_x}{\partial x}\,dx\,dy\,dz\,.$$

Ebenso ergibt die Berechnung für die anderen Flächenpaare resp. die Werte:

(5c) $$-\frac{\partial X_y}{\partial y}\,dx\,dy\,dz \quad \text{und} \quad -\frac{\partial X_z}{\partial z}\,dx\,dy\,dz\,.$$

Setzt man diese Größen aus (5a) bis (5c) in (3) ein, so erhält man die erste der folgenden Gleichungen (6), und durch analoge Behandlung der zweiten und dritten Gleichung (3) erzielt man schließlich folgendes Gleichungssystem:

(6) $$\begin{cases} \varepsilon X - \left(\dfrac{\partial X_x}{\partial x} + \dfrac{\partial X_y}{\partial y} + \dfrac{\partial X_z}{\partial z}\right) = 0\,, \\ \varepsilon Y - \left(\dfrac{\partial Y_x}{\partial x} + \dfrac{\partial Y_y}{\partial y} + \dfrac{\partial Y_z}{\partial z}\right) = 0\,, \\ \varepsilon Z - \left(\dfrac{\partial Z_x}{\partial x} + \dfrac{\partial Z_y}{\partial y} + \dfrac{\partial Z_z}{\partial z}\right) = 0\,. \end{cases}$$

Dies ist bereits die gewünschte Beziehung zwischen den Massenkräften und Spannungskomponenten für den Fall des Gleichgewichtes.

Für den Fall der beschleunigten Bewegung sagt das d'Alembertsche Prinzip aus, daß man zu den wirkenden Kräften X, Y, Z noch die Trägheitskräfte $-\varepsilon\dfrac{Du}{Dt}$, $-\varepsilon\dfrac{Dv}{Dt}$, $-\varepsilon\dfrac{Dw}{Dt}$ hinzuzufügen hat, um wieder Gleichgewicht zu erzielen. Dabei bedeuten u, v, w die Kom-

ponenten der Geschwindigkeit und das Zeichen D ist, wie früher auseinandergesetzt, gewählt, um anzudeuten, daß es sich stets um ein und dasselbe Teilchen handelt, d. h. daß die Anfangswerte der Koordinaten a, b, c konstant gehalten werden. Nun sind u, v, w bei festem a, b, c natürlich noch als Funktionen von x, y, z, t zu betrachten. Dann ist nach den Regeln der Differentialrechnung:

$$\frac{Du}{Dt} = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{xyz} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{yzt} \frac{Dx}{Dt} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{zxt} \frac{Dy}{Dt} + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{xyt} \frac{Dz}{Dt},$$

wobei die Indizes die Variabeln angeben, die bei der Differentiation konstant gehalten werden. Also ist einfacher geschrieben:

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}.$$

Für sehr kleine Geschwindigkeiten u, v, w können die letzten drei Glieder vernachlässigt werden und man erhält einfacher:

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t}; \quad \frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t}; \quad \frac{Dw}{Dt} = \frac{\partial w}{\partial t}.$$

Ferner ist offenbar $u = \frac{Dx}{Dt} = \frac{D\xi}{Dt} = \frac{\partial \xi}{\partial t}$, usw., so daß man schließlich erhält:

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \quad \frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}, \quad \frac{Dw}{Dt} = \frac{\partial^2 \zeta}{d t^2}.$$

Diese Vereinfachungen sind in der Elastizitätstheorie auf Grund der Erfahrung unbedenklich, sie würden aber zum Beispiel in der Hydrodynamik, wo endliche Deformationen und Geschwindigkeiten in Frage kommen, im allgemeinen nicht mehr zulässig sein. Hier ergibt sich also für den Fall der Bewegung mit hinreichender Genauigkeit:

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} \varepsilon\left(X - \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}\right) - \left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right) &= 0, \\ \varepsilon\left(Y - \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}\right) - \left(\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z}\right) &= 0, \\ \varepsilon\left(Z - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}\right) - \left(\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}\right) &= 0. \end{aligned} \right.$$

Sind also die Spannungskomponenten gegeben, so kann man nach (6) resp. (7) die äußeren Kräfte inklusive Trägheitskräfte berechnen. Dazu sind nur Differentiationen, d. h. immer mögliche Operationen, auszuführen. In Wirklichkeit liegt meist die umgekehrte Aufgabe vor, deren Lösung natürlich viel schwieriger ist.

106. Reduktion auf sechs Spannungskomponenten.

Wir wollen jetzt die zweite der Gleichgewichtsbedingungen etwas näher ins Auge fassen, die aussagt, daß keine Rotation um irgend eine Achse eintreten soll. Das muß natürlich auch für jedes Volumelement

einzeln gelten, und auf ein solches wollen wir nun die Gleichungen (4) anwenden. Wir beschränken uns bei der Behandlung auf die erste derselben, die aussagt, daß keine Rotation um die x-Achse eintreten kann.

Wir legen die Bezeichnungen der Fig. 144 zugrunde.

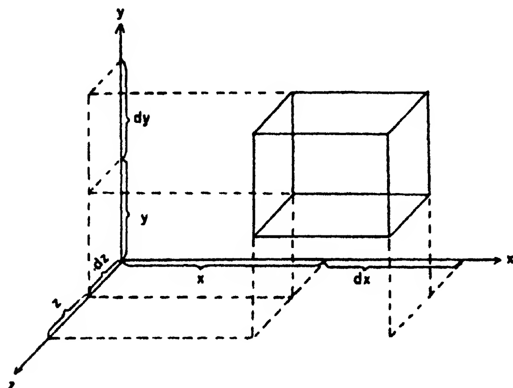


Fig. 144.

Das erste Glied von (4) wird dann einfach:

$$\varepsilon (y Z - z Y) \, d\tau ,$$

oder, wenn wir für Y und Z die Werte aus (6) einsetzen:

$$\text{(8a)} \qquad \left[y \left(\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} \right) - z \left(\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} \right) \right] d\tau .$$

Etwas komplizierter gestaltet sich die Berechnung des zweiten Teiles. Wir haben sechs Flächen, die einander paarweise parallel sind; die Normalenrichtungen sind für diese sechs Flächen resp. x, $-x$, y, $-y$, z, $-z$; wir wollen die Flächen für das Folgende in dieser Reihenfolge mit 1 bis 6 numerieren. Man erhält dann für den Ausdruck $y\, Z n\, d\sigma$ folgenden Wert:

$$\text{(8b)} \qquad \left\{ \begin{aligned} & y (Z_y)_y \, dx \, dz + (y + dy)(Z_{-y})_{y+dy} \, dx \, dz \\ & + y (Z_z)_z \, dx \, dy + y (Z_{-z})_{z+dz} \, dx \, dy \\ & + y (Z_x)_x \, dy \, dz + y (Z_{-x})_{x+dx} \, dy \, dz . \end{aligned} \right.$$

Ebenso erhält man für den zweiten Term $-z\, Y n\, d\sigma$ folgenden Ausdruck:

$$\text{(8c)} \qquad \left\{ \begin{aligned} & - z (Y_y)_y \, dx \, dz - z (Y_{-y})_{y+dy} \, dx \, dz \\ & - z (Y_z)_z \, dx \, dy - (z + dz)(Y_{-z})_{z+dz} \, dx \, dy \\ & - z (Y_x)_x \, dy \, dz - z (Y_{-x})_{x-dx} \, dy \, dz . \end{aligned} \right.$$

Berücksichtigt man hier, daß z. B. $Z_{-y} = -Z_y$, und entwickelt man Ausdrücke von der Form $(Z_y)_{y+dy}$ in eine nach dem linearen Gliede abbrechende **Taylorsche** Reihe:

$$(Z_y)_{y+dy} = (Z_y)_y + \frac{\partial Z_y}{\partial y} dy,$$

so erhält man in der Zusammenziehung der Gleichungen (8a) bis (8c) nach (4) das Resultat:

$$\begin{aligned} & y Z_y dx dz - y Z_y dx dz - Z_y d\tau - y \frac{\partial Z_y}{\partial y} d\tau - \frac{\partial Z_y}{\partial y} dy\, d\tau \\ & - y \frac{\partial Z_z}{\partial z} d\tau - y \frac{\partial Z_x}{\partial x} d\tau + y \frac{\partial Z_x}{\partial x} d\tau + y \frac{\partial Z_y}{\partial y} d\tau + y \frac{\partial Z_z}{\partial z} d\tau \\ & - z Y_z dx dy + z Y_z dx dy + Y_z d\tau + z \frac{\partial Y_z}{\partial z} d\tau + \frac{\partial Y_z}{\partial z} dz\, d\tau \\ & + z \frac{\partial Y_y}{\partial y} d\tau + z \frac{\partial Y_x}{\partial x} d\tau - z \frac{\partial Y_x}{\partial x} d\tau - z \frac{\partial Y_y}{\partial y} d\tau - z \frac{\partial Y_z}{\partial z} d\tau . \end{aligned}$$

Darin sind die Glieder $-\frac{dZ_y}{dy} dy \cdot d\tau$ und $\frac{dY_z}{dz} dz \cdot d\tau$ zu vernachlässigen, da sie von der vierten Ordnung unendlich klein sind. Die übrigen heben sich bis auf zwei gegenseitig fort und es bleibt nur übrig:

$$(-Z_y + Y_z)\, d\tau = 0 .$$

Durch Anwendung desselben Gedankenganges auf die zweite und dritte der Gleichungen (4) erhält man zwei ähnliche Gleichungen, die aus der eben abgeleiteten durch zyklische Vertauschung hervorgehen und hat schließlich folgende Bedingungen:

$$(9) \qquad \begin{cases} Z_y = Y_z, \\ X_z = Z_x, \\ Y_x = X_y, \end{cases}$$

wodurch, wenigstens für den Fall des Gleichgewichts, die neun Spannungskomponenten auf sechs reduziert werden.

Wie ist es nun damit im Falle der beschleunigten Bewegung? Dann sind nach dem d'Alembertschen Prinzip die Gleichungen (4) noch zu ergänzen durch die von den Trägheitskräften herrührenden Drehungsmomente. Man erhält dann statt (4) das folgende Tripel:

$$(4a) \quad \begin{cases} \int \varepsilon \left(z \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - y \frac{\partial^2 \zeta}{d t^2} \right) d\tau + \int \varepsilon (y Z - z Y)\, d\tau + \int (y Z_n - z Y_n)\, d\sigma = 0 \\ \text{und zwei analoge.} \end{cases}$$

Führt man jetzt denselben Gedankengang wie oben durch, indem man nun natürlich die für den Fall der beschleunigten Bewegung geltenden Gleichungen (7) für X, Y, Z benutzt, so erhält man, wie eine ganz analoge Rechnung zeigt, genau wieder das nämliche Resultat, die Gleichungen (9).

Die neun Spannungskomponenten sind somit allgemein auf sechs reduziert. Wir haben somit drei Normaldrucke und drei Schubspannungen. Dennoch wird man der Symmetrie halber in den Gleichungen alle neun Symbole beibehalten.

107. Abhängigkeit der Spannung von der Richtung; Oberflächenbedingungen.

Wir wollen nunmehr untersuchen, wie die Spannung auf eine beliebige durch den betrachteten Punkt gelegte Ebene mit den sechs Spannungskomponenten zusammenhängt. Zu dem Zwecke wenden wir Gleichung (3) auf ein geeignet konstruiertes unendlich kleines Tetraeder an (Fig. 145). Gleichung (3) gilt allerdings nur für den Fall des Gleichgewichtes, doch werden wir gleich erkennen, daß in dem jetzt zu erledigenden Falle das Resultat allgemeine Gültigkeit beansprucht.

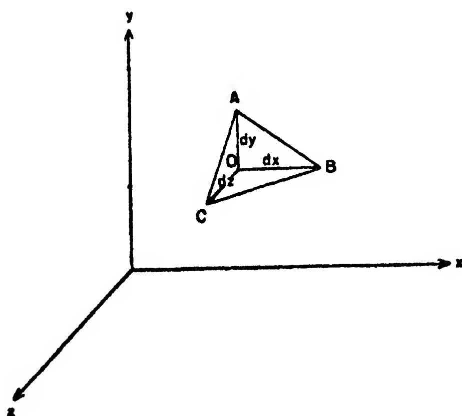


Fig. 145.

Wir betrachten folgendes Tetraeder: Wir grenzen auf einem System von drei zueinander senkrechten Achsen, die parallel den Koordinatenachsen sind, von ihrem Schnittpunkt O aus drei Stücke von der respektiven Länge dx, dy, dz ab. Durch die so gewonnenen Punkte A, B, C legen wir eine Ebene, die zusammen mit den drei durch die Achse gelegten ein unendlich kleines Tetraeder abgrenzt.

Die innere Normale auf der Ebene ABC werde mit n bezeichnet, das Volumen des Tetraeders mit $d\tau$, die Fläche ABC mit $d\sigma$. Dann ergibt die erste Gleichung (3) folgendes Resultat, wenn man sie auf vier Flächen OAB, OBC, OCA, ABC anwendet, denen resp. die Normalen z, y, x, n zukommen:

$$\varepsilon X\, d\tau + \tfrac{1}{2} X_x\, dy\, dz + \tfrac{1}{2} X_y\, dz\, dx + \tfrac{1}{2} X_z\, dx\, dy + X_n\, d\sigma = 0\,.$$

Darin ist nun zunächst das erste Glied zu streichen, weil es von der dritten Ordnung unendlich klein ist. Ferner ist offenbar:

$$\tfrac{1}{2}\, dy\, dz = -\, d\sigma \cdot \cos(nx); \quad \tfrac{1}{2}\, dz\, dx = -\, d\sigma \cos(ny);$$
$$\tfrac{1}{2}\, dx\, dy = -\, d\sigma \cos(nz).$$

Das Minuszeichen kommt daher, weil die Winkel alle stumpf, ihre Kosinusse also negativ sind, wenn n nach innen gerichtet ist, wie wir es stets annehmen; da die linken Seiten (als Flächeninhalte) stets positiv sind, müssen es auch die rechten sein. Wir erhalten also auf diese Weise:

$$(10)\qquad \begin{cases} X_n = X_x \cos(nx) + X_y \cos(ny) + X_z \cos(nz), \\ Y_n = Y_x \cos(nx) + Y_y \cos(ny) + Y_z \cos(nz), \\ Z_n = Z_x \cos(nx) + Z_y \cos(ny) + Z_z \cos(nz). \end{cases}$$

Dies einfache Resultat beruht wesentlich darauf, daß die Massenkräfte in unserem Falle unendlich klein gegen die Flächenkräfte sind.

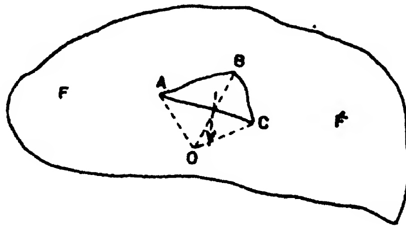


Fig. 146.

Da nun die d'Alembertschen Trägheitskräfte auch Massenkräfte sind, so gelten die Beziehungen (10) auch für den Fall der beschleunigten Bewegung, d. h. ganz allgemein.

Wenn also in einem Punkte die sechs Spannungskomponenten $X_x, Y_y, Z_z, X_y, Y_z, Z_x$ bekannt sind, so ist der Spannungszustand für jede Ebene durch diesen Punkt nach (10) bestimmt.

Bisher haben wir stillschweigend das Tetraeder ganz im Innern des Körpers liegend angenommen. Es läßt sich jedoch die ganze Argumentation genau ebenso durchführen, wenn die Tetraederfläche mit der Normalen n der Oberfläche des Körpers angehört. Fig. 146 zeigt diese Konstruktion; die Oberfläche des Körpers ist durch FF gekennzeichnet. Man erhält also auch hier wieder die Gleichungen (10), die in diesem Falle den Zusammenhang zwischen den Oberflächenkräften und den an der Oberfläche existierenden Spannungskomponenten angeben.

108. Hauptspannungen und Hauptspannungsrichtungen.

Nach den Auseinandersetzungen der vorigen Nummer, insbesondere den Gleichungen (10), hängt die Spannung in einem Punkte von der Richtung ab. Im allgemeinen wird die resultierende Spannung vom Betrage

$$P = +\sqrt{X_n^2 + Y_n^2 + Z_n^2},$$

die auf eine Ebene mit der Normalenrichtung n wirkt, **nicht senkrecht auf** dieser Ebene stehen. Wir wollen uns nun aber fragen, ob es gewisse Ebenen — oder was dasselbe ist, gewisse Richtungen — gibt, für die dies der Fall ist. Die Bedingung dafür ist die, daß, während im allgemeinen:

$$X_n = P\cos(P, x)\,,\quad Y_n = P\cos(P, y)\,,\quad Z_n = P\cos(P, z)$$

ist, hier diese Gleichungen übergehen in:

$$\text{(11)}\qquad \begin{cases} X_n = P\cos(nx). \\ Y_n = P\cos(ny), \\ Z_n = P\cos(nz). \end{cases}$$

Diese Gleichungen sagen offenbar aus, daß Ebenennormalen und Druckrichtung zusammenfallen.

Um nun die ausgezeichneten Richtungen n zu bestimmen, und den zugehörigen Wert von P, haben wir (11) in (10) einzusetzen und erhalten dann:

$$\text{(12)}\qquad \begin{cases} (X_x - P)\cos(nx) + X_y\cos(ny) + X_z\cos(nz) = 0\,, \\ Y_x\cos(nx) + (Y_y - P)\cos(ny) + Y_z\cos(nz) = 0\,, \\ Z_x\cos(nx) + Z_y\cos(ny) + (Z_z - P)\cos(nz) = 0\,. \end{cases}$$

Diese Gleichungen können als Bedingungsgleichungen für die drei Größen $\cos(nx)$, $\cos(ny)$, $\cos(nz)$ aufgefaßt werden. Sie sind aber genau wie die entsprechenden Gleichungen (32) des Kapitels IX auf pag. 466 nur dann lösbar, wenn die Determinante des Systems verschwindet, also wenn

$$\text{(13)}\qquad \begin{vmatrix} X_x - P & X_y & X_z \\ Y_x & Y_y - P & Y_z \\ Z_x & Z_y & Z_z - P \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Bedingung stellt eine kubische Gleichung für P dar; die drei gemäß (13) bestimmten Werte von P, die wir P_1, P_2, P_3 nennen wollen, machen die Gleichungen (12) lösbar und liefern drei Werte n (n_1, n_2, n_3), für die der Druck senkrecht auf die betreffende Ebene wirkt.

Die Auflösung der Determinante ergibt folgendes:

$$\text{(14)}\qquad \begin{cases} P^3 - P^2(X_x + Y_y + Z_z) + P(X_x Y_y + Y_y Z_z \\ \qquad\qquad + Z_z X_x - X_y^2 - Y_z^2 - Z_x^2) \\ \quad - (X_x Y_y Z_z + X_y Y_z Z_x + X_z Z_y Y_x \\ \qquad\qquad - X_x Y_z^2 - Y_y Z_x^2 - Z_z X_y^2) = 0\,. \end{cases}$$

Die Werte von P, die sich aus dieser Gleichung ergeben, sind sämtlich reell, wie sich leicht zeigen läßt, und die ihnen entsprechenden Richtungen n_1, n_2, n_3 stehen im allgemeinen aufeinander senkrecht.

Denken wir uns P_1, P_2, P_3 ausgerechnet — wir setzen sie vorläufig als reell und voneinander verschieden voraus —, so können wir die Richtungen n_1, n_2, n_3 erhalten, indem wir P_1, P_2, P_3 der Reihe nach in (12) einsetzen. Die Gleichungen (12) sind dann ja lösbar und werden durch die Werte

$$\cos(n_1 x), \ldots; \quad \cos(n_2 x), \ldots; \quad \cos(n_3 x), \ldots;$$

identisch befriedigt.

So ist z. B.

$$(15)\quad \begin{cases} P_1 \cos(n_1 x) \equiv X_x \cos(n_1 x) + X_y \cos(n_1 y) + X_z \cos(n_1 z), \\ P_1 \cos(n_1 y) \equiv Y_x \cos(n_1 x) + Y_y \cos(n_1 y) + Y_z \cos(n_1 z), \\ P_1 \cos(n_1 z) \equiv Z_x \cos(n_1 x) + Z_y \cos(n_1 y) + Z_z \cos(n_1 z). \end{cases}$$

Erweitern wir (15) der Reihe nach mit $\cos(n_2 x)$, $\cos(n_2 y)$, $\cos(n_2 z)$ und addieren, so folgt:

$$(16)\quad \begin{cases} P_1 [\cos(n_1 x)\cos(n_2 x) + \cos(n_1 y)\cos(n_2 y) + \cos(n_1 z)\cos(n_2 z)] \\ \quad \equiv X_x \cos(n_1 x)\cos(n_2 x) + X_y \cos(n_1 y)\cos(n_2 x) \\ \quad + X_z \cos(n_1 z)\cos(n_2 x) + Y_x \cos(n_1 x)\cos(n_2 y) \\ \quad + Y_y \cos(n_1 y)\cos(n_2 y) + Y_z \cos(n_1 z)\cos(n_2 y) \\ \quad + Z_x \cos(n_1 x)\cos(n_2 z) + Z_y \cos(n_1 y)\cos(n_2 z) \\ \quad + Z_z \cos(n_1 z)\cos(n_2 z). \end{cases}$$

Ebenso erhält man mit den Werten P_2, $\cos(n_2 x)$, $\cos(n_2 y)$, $\cos(n_2 z)$ das identisch befriedigte System:

$$(17)\quad \begin{cases} P_2 \cos(n_2 x) \equiv X_x \cos(n_2 x) + X_y \cos(n_2 y) + X_z \cos(n_2 z), \\ P_2 \cos(n_2 y) \equiv Y_x \cos(n_2 x) + Y_y \cos(n_2 y) + Y_z \cos(n_2 z), \\ P_2 \cos(n_2 z) \equiv Z_x \cos(n_2 x) + Z_y \cos(n_2 y) + Z_z \cos(n_2 z), \end{cases}$$

woraus nach Erweiterung mit resp. $\cos(n_1 x)$, $\cos(n_1 y)$, $\cos(n_1 z)$ und Addition folgt:

$$(18)\quad \begin{cases} P_2 [\cos(n_1 x)\cos(n_2 x) + \cos(n_1 y)\cos(n_2 y) + \cos(n_1 z)\cos(n_2 z)] \\ \quad \equiv X_x \cos(n_2 x)\cos(n_1 x) + X_y \cos(n_2 y)\cos(n_1 x) \\ \quad + X_z \cos(n_2 z)\cos(n_1 x) + Y_x \cos(n_2 x)\cos(n_1 y) \\ \quad + Y_y \cos(n_2 y)\cos(n_1 y) + Y_z \cos(n_2 z)\cos(n_1 y) \\ \quad + Z_x \cos(n_2 x)\cos(n_1 z) + Z_y \cos(n_2 y)\cos(n_1 z) \\ \quad + Z_z \cos(n_2 z)\cdot\cos(n_1 z). \end{cases}$$

Die rechten Seiten von (16) und (18) sind aber identisch, folglich auch die linken. Durch Subtraktion folgt also:

$$(19)\quad \begin{cases} (P_1 - P_2)[\cos(n_1 x)\cos(n_2 x) + \cos(n_1 y)\cos(n_2 y) \\ \qquad\qquad + \cos(n_1 z)\cos(n_2 z)] \equiv 0. \end{cases}$$

Da nach Voraussetzung $P_1 \neq P_2$, so muß die eckige Klammer verschwinden. Das ist aber die Bedingung der Orthogonalität, d. h. $n_1 \perp n_2$. Ebenso verläuft natürlich der Beweis für die anderen Richtungen.

Er setzt voraus, daß $P_1 \neq P_2 \neq P_3$. Wenn jedoch z. B. P_1 gleich P_2 wird, aber von P_3 verschieden bleibt, so stehen die Richtungen n_1 und n_2 immer noch auf n_3 senkrecht, aber die Orthogonalität von n_1 und n_2 läßt sich nicht mehr beweisen. In der zu n_3 senkrechten Ebene sind daher alle Richtungen gleichberechtigt und keine mehr vor den anderen ausgezeichnet. Ist endlich $P_1 = P_2 = P_3$, so sind alle Ebenen, die durch einen Punkt gelegt werden können, gleich berechtigt, die Spannung ist dann stets normal auf allen durch diesen Punkt gelegten Ebenen.

Man erkennt den vollständigen Parallelismus dieser Erwägungen mit den analogen des IX. Kapitels. Genau ebenso wie dort würde sich auch hier der Beweis für die Reellität der drei Größen P_1, P_2, P_3 gestalten, den wir deshalb hier unterdrücken können.

Man nennt die drei ausgezeichneten Richtungen, d. h. die Normalen der drei Ebenen, auf die der Druck senkrecht wirkt, „Hauptspannungsrichtungen", und die Druckwerte P_1, P_2, P_3 selbst die „Hauptspannungen".

Es liegt natürlich nahe, diese drei ausgezeichneten aufeinander senkrechten Richtungen als neues Koordinatensystem $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ einzuführen; zwischen den alten und den neuen Koordinaten bestehen dann folgende Relationen:

$$(20) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{x} &= \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z , \\ \mathfrak{y} &= \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z , \\ \mathfrak{z} &= \gamma_1 x + \gamma_2 y + \beta_3 z , \end{aligned} \right.$$

wobei die Größen α, β, γ folgende Bedeutung haben:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \cos(\mathfrak{x}\, x); & \beta_1 &= \cos(\mathfrak{y}\, x); & \gamma_1 &= \cos(\mathfrak{z}\, x); \\ \alpha_2 &= \cos(\mathfrak{x}\, y); & \beta_2 &= \cos(\mathfrak{y}\, y); & \gamma_2 &= \cos(\mathfrak{z}\, y); \\ \alpha_3 &= \cos(\mathfrak{x}\, z); & \beta_3 &= \cos(\mathfrak{y}\, z); & \gamma_3 &= \cos(\mathfrak{z}\, z) . \end{aligned}$$

Bezeichnen wir die Komponenten der Spannungen nach den neuen Koordinaten durch $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$, so haben wir hier die Spannungskomponenten $\mathfrak{X}_\mathfrak{x}$, $\mathfrak{Y}_\mathfrak{y}$, $\mathfrak{Z}_\mathfrak{z}$, $\mathfrak{X}_\mathfrak{y}$, $\mathfrak{Y}_\mathfrak{z}$, $\mathfrak{Z}_\mathfrak{x}$ zu bilden. Da wir es aber hier nur mit Normaldrucken zu tun haben — das ist ja eben die Eigenschaft der neuen Koordinatenebenen —, so ist

$$(21) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{X}_\mathfrak{x} &= P_1 ; & \mathfrak{X}_\mathfrak{y} &= 0; & \mathfrak{X}_\mathfrak{z} &= 0 , \\ \mathfrak{Y}_\mathfrak{x} &= 0; & \mathfrak{Y}_\mathfrak{y} &= P_2; & \mathfrak{Y}_\mathfrak{z} &= 0 , \\ \mathfrak{Z}_\mathfrak{x} &= 0; & \mathfrak{Z}_\mathfrak{y} &= 0; & \mathfrak{Z}_\mathfrak{z} &= P_3 . \end{aligned} \right.$$

Darauf können wir nun die Gleichungen (10) anwenden; wir erhalten dann zunächst:

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{X}_n &= X_\mathfrak{x} \cos(n\,\mathfrak{x}) + X_\mathfrak{y} \cos(n\,\mathfrak{y}) + X_\mathfrak{z} \cos(n\,\mathfrak{z}) = P_1 \cos(n\,\mathfrak{x});\\ \mathfrak{Y}_n &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad = P_2 \cos(n\,\mathfrak{y});\\ \mathfrak{Z}_n &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad = P_3 \cos(n\,\mathfrak{z}),\end{aligned}\right.$$

und daraus, indem wir für n der Reihe nach die alten Koordinatenrichtungen x, y, z nehmen, folgende neun Gleichungen:

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{X}_x &= P_1 \cos(x\,\mathfrak{x}) = P_1 \alpha_1; & \mathfrak{Y}_x &= P_2 \beta_1; & \mathfrak{Z}_x &= P_3 \gamma_1;\\ \mathfrak{X}_y &= P_1 \cos(y\,\mathfrak{x}) = P_1 \alpha_2; & \mathfrak{Y}_y &= P_2 \beta_2; & \mathfrak{Z}_y &= P_3 \gamma_2;\\ \mathfrak{X}_z &= P_1 \cos(z\,\mathfrak{x}) = P_1 \alpha_3; & \mathfrak{Y}_z &= P_2 \beta_3; & \mathfrak{Z}_z &= P_3 \gamma_3.\end{aligned}\right.$$

Die nach (20) geltenden Relationen zwischen den alten und neuen Koordinaten gelten natürlich auch für die Spannungskomponenten parallel den alten und neuen Achsen. Wir erhalten daher weiter:

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}_x &= X_x \alpha_1 + Y_x \alpha_2 + Z_x \alpha_3,\\ \mathfrak{Y}_x &= X_x \beta_1 + Y_x \beta_2 + Z_x \beta_3,\\ \mathfrak{Z}_x &= X_x \gamma_1 + Y_x \gamma_2 + Z_x \gamma_3,\end{aligned}$$

und sechs ähnliche Gleichungen, oder umgekehrt:

$$\begin{aligned} X_x &= \mathfrak{X}_x \alpha_1 + \mathfrak{Y}_x \beta_1 + \mathfrak{Z}_x \gamma_1,\\ Y_x &= \mathfrak{X}_x \alpha_2 + \mathfrak{Y}_x \beta_2 + \mathfrak{Z}_x \gamma_2,\\ Z_x &= \mathfrak{X}_x \alpha_3 + \mathfrak{Y}_x \beta_3 + \mathfrak{Z}_x \gamma_3,\end{aligned}$$

und sechs ähnliche Gleichungen mit dem Index y resp. z.

Setzt man hier die Werte aus (23) ein, so folgt:

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} X_x &= P_1 \alpha_1^2 + P_2 \beta_1^2 + P_3 \gamma_1^2,\\ Y_y &= P_1 \alpha_2^2 + P_2 \beta_2^2 + P_3 \gamma_2^2,\\ Z_z &= P_1 \alpha_3^2 + P_2 \beta_3^2 + P_3 \gamma_3^2,\\ X_y = Y_x &= P_1 \alpha_1 \alpha_2 + P_2 \beta_1 \beta_2 + P_3 \gamma_1 \gamma_2,\\ Y_z = Z_y &= P_1 \alpha_2 \alpha_3 + P_2 \beta_2 \beta_3 + P_3 \gamma_2 \gamma_3,\\ Z_x = X_z &= P_1 \alpha_3 \alpha_1 + P_2 \beta_3 \beta_1 + P_3 \gamma_3 \gamma_1.\end{aligned}\right.$$

Diese wichtigen Gleichungen drücken die Spannungskomponenten aus durch die Hauptspannungen und die Richtungskosinusse der Winkel, welche die Hauptspannungsrichtungen mit den Koordinaten bilden. Sie stellen das vollständige Analogon zu den Gleichungen (29) des Kapitels IX auf pag. 465 dar.

109. Geometrische Darstellung; Spannungsellipsoid.

Die mehrfach hervorgehobenen Analogien zwischen den Spannungs- und Verzerrungskomponenten legen es nahe, ähnlich wie im Kapitel IX eine geometrische Darstellung zu versuchen.

Wir wollen zu diesem Zwecke eine Fläche konstruieren, deren Radienvektoren der Größe und Richtung nach die Drucke darstellen. Wir gehen von den Gleichungen (10) aus. Nennen wir die Koordinaten dieser Oberfläche x, y, z (bezogen auf unser altes Koordinatensystem), so ziehen wir vom Anfangspunkte aus Vektoren, deren Komponenten x, y, z resp. gleich den Größen X_n, Y_n, Z_n sind. Dann ist der Radiusvektor selbst gleich $\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{X_n^2+Y_n^2+Z_n^2}$. Wir erhalten also damit aus (10) die Gleichungen:

$$(25)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= X_x \cos(nx) + X_y \cos(ny) + X_z \cos(nz),\\ y &= Y_x \cos(nx) + Y_y \cos(ny) + Y_z \cos(nz),\\ z &= Z_x \cos(nx) + Z_y \cos(ny) + Z_z \cos(nz).\end{aligned}\right.$$

Wenn wir diese Gleichungen nach $\cos(nx)$, $\cos(ny)$, $\cos(nz)$ auflösen, so folgt, wenn A, B, C, L, M, N leicht berechenbare Konstanten bedeuten:

$$(26)\qquad \left\{\begin{aligned} \cos(nx) &= Ax + Ny + Mz,\\ \cos(ny) &= Nx + By + Lz,\\ \cos(nz) &= Mx + Ly + Cz.\end{aligned}\right.$$

Beachtet man, daß $\cos^2(nx)+\cos^2(ny)+\cos^2(nz)=1$ sein muß, so erhält man für die Fläche von der geforderten Eigenschaft die Gleichung:

$$(27)\qquad (Ax+Ny+Mz)^2 + (Nx+By+Lz)^2 + (Mx+Ly+Cz)^2 = 1.$$

Von dieser Gleichung zweiter Ordnung läßt sich zeigen, daß sie im allgemeinen ein dreiachsiges Ellipsoid darstellt. Man erkennt dies am besten, wenn man die Hauptspannungsrichtungen als Koordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ einführt.

Die Gleichungen (10) gehen in diesem Falle über in die Form (22), die wir hier gleich für unsere Zwecke geeignet nochmals anschreiben:

$$(22\,a)\qquad \left\{\begin{aligned} \cos(n\,\mathfrak{x}) &= \frac{\mathfrak{X}_n}{P_1};\\ \cos(n\,\mathfrak{y}) &= \frac{\mathfrak{Y}_n}{P_2};\\ \cos(n\,\mathfrak{z}) &= \frac{\mathfrak{Z}_n}{P_3}.\end{aligned}\right.$$

Bezeichnen wir hier die Koordinaten der gesuchten Oberfläche mit $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ so muß für die betreffende Oberfläche analog (25) sein:

$$(22\,b)\qquad \mathfrak{x} = \mathfrak{X}_n, \quad \mathfrak{y} = \mathfrak{Y}_n, \quad \mathfrak{z} = \mathfrak{Z}_n.$$

Aus (22a) und (22b) folgt durch Quadrieren und Addieren:

$$(28)\qquad \frac{\mathfrak{x}^2}{P_1^2} + \frac{\mathfrak{y}^2}{P_2^2} + \frac{\mathfrak{z}^2}{P_3^2} = 1.$$

Das ist aber, wie behauptet, die Gleichung eines dreiachsigen Ellipsoides, das wir als „Spannungsellipsoid“ bezeichnen. Die Extremalwerte des Radiusvektors (Maximum, Minimum oder Sattelwert) werden offenbar durch die Halbachsen des Ellipsoides dargestellt. Also sind die ausgezeichneten Druckwerte P_1, P_2, P_3 gleichzeitig die Extremalwerte, wodurch sich der Name „Hauptspannungen“ oder „Hauptdrucke“ für sie rechtfertigt.

Man kann aus (28) auch gleich ersehen — was wir übrigens bereits wissen —, daß im allgemeinen die Druckrichtung nicht zusammenfällt mit der Normalen der betreffenden Ebene. Denn ziehen wir durch das Zentrum des Ellipsoides eine Ebene mit der Normalenrichtung n, so ist deren Richtung charakterisiert durch das Verhältnis der drei Kosinusse:

$$\cos(n\mathfrak{x}) : \cos(n\mathfrak{y}) : \cos(n\mathfrak{z}) .$$

Dagegen ist die Druckrichtung nach (22a) definiert durch:

$$\mathfrak{X}_n : \mathfrak{Y}_n : \mathfrak{Z}_n = P_1 \cos(n\mathfrak{x}) : P_2 \cos(n\mathfrak{y}) : P_3 \cos(n\mathfrak{z}) .$$

Man erkennt sogleich, daß beide Richtungen im allgemeinen nicht zusammenfallen. Wenn wir nun weiter fragen, in welchen speziellen Fällen dies dennoch eintreten kann, so muß dafür offenbar sein:

$$\cos(n\mathfrak{x}) : \cos(n\mathfrak{y}) : \cos(n\mathfrak{z}) = P_1 \cos(n\mathfrak{x}) : P_2 \cos(n\mathfrak{y}) : P_3 \cos(n\mathfrak{z}),$$

oder, wenn k einen Proportionalitätsfaktor bedeutet:

$$\begin{aligned} \cos(n\mathfrak{x}) &= k\,P_1 \cos(n\mathfrak{x}) , \\ \cos(n\mathfrak{y}) &= k\,P_2 \cos(n\mathfrak{y}) , \\ \cos(n\mathfrak{z}) &= k\,P_3 \cos(n\mathfrak{z}) , \end{aligned}$$

wofür man etwas anders schreiben kann:

$$(29) \quad \left\{ \begin{aligned} &\text{a)} \quad \cos(n\mathfrak{x})\,[1 - k\,P_1] = 0, \\ &\text{b)} \quad \cos(n\mathfrak{y})\,[1 - k\,P_2] = 0, \\ &\text{c)} \quad \cos(n\mathfrak{z})\,[1 - k\,P_3] = 0, \end{aligned} \right.$$

die zusammen mit der Gleichung:

$$\cos^2(n\mathfrak{x}) + \cos^2(n\mathfrak{y}) + \cos^2(n\mathfrak{z}) = 1$$

die ausgezeichneten Richtungen bestimmen, in denen der Druck senkrecht auf der betreffenden Ebene steht. Nehmen wir zunächst alle P verschieden an, so kann (29a) dadurch befriedigt werden, daß $1 - k\,P_1 = 0$ genommen wird. Dann sind $1 - k\,P_2$ und $1 - k\,P_3$ von 0 verschieden, also $\cos(n\mathfrak{y}) = \cos(n\mathfrak{z}) = 0$. Daraus folgt:

$$\cos(n\mathfrak{x}) = \pm 1, \quad (n\mathfrak{x}) = 0 \text{ oder } \pi.$$

Das ist aber die $\mathfrak{x}$-Richtung. Nimmt man nämlich $1-k\,P_2=0$, so folgen weiter

$$\cos(n\,\mathfrak{x})=\cos(n\,\mathfrak{z})=0\,,\qquad \cos(n\,\mathfrak{y})=\pm 1\,,\qquad (n\,\mathfrak{y})=0 \text{ oder } \pi\,,$$

d. h. als zweite Richtung folgt die $\mathfrak{y}$-Achse und so fort.

Man erhält also das bereits bekannte Resultat, daß die ausgezeichneten Richtungen die Hauptspannungsrichtungen, d. h. unsere neuen Koordinatenachsen sind.

Sind zwei Größen P einander gleich, z. B. $P_1=P_2 \neq P_3$, so hat man folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}\cos(n\,\mathfrak{x})\,[1-k\,P_1]&=0\,,\\ \cos(n\,\mathfrak{y})\,[1-k\,P_1]&=0\,,\\ \cos(n\,\mathfrak{z})\,[1-k\,P_3]&=0\,.\end{aligned}$$

Diese kann man zunächst erfüllen durch $1-k\,P_3=0$, und

$$\cos(n\,\mathfrak{x})=\cos(n\,y)=0\,.$$

Dann folgt

$$\cos(n\,\mathfrak{z})=\pm 1\,,\qquad \sphericalangle(n\,\mathfrak{z})=0 \text{ oder } \pi\,,$$

d. h. als ausgezeichnete Richtung die $\mathfrak{z}$-Richtung. Oder — das ist die andere Möglichkeit:

$$1-k\,P_1=0\,,\qquad \cos(n\,\mathfrak{z})=0\,.$$

Dann werden jedoch $\cos(n\mathfrak{x})$ und $\cos(n\,\mathfrak{y})$ nicht einzeln bestimmt, d. h. in der $\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}$-Ebene ist dann jede Richtung gleichwertig; das Ellipsoid wird ein Rotationsellipsoid.

Sind endlich alle P einander gleich, so lassen sich die Gleichungen (29) nur dadurch erfüllen, daß

$$1-k\,P=0\,,$$

wobei keine Richtung bestimmt wird: Das Spannungsellipsoid artet hier in eine Kugel aus, der Druck steht auf allen durch den Punkt gelegten Ebenen senkrecht.

Man kann auch hier leicht den Tensorcharakter der Spannung nachweisen. Zu diesem Zwecke betrachten wir die Gleichung (10). Dort sind die Komponenten Y_n, Y_n, Z_n des Kraftvektors ausgedrückt als lineare Funktionen von $\cos(n\,x)$, $\cos(n\,y)$, $\cos(n\,z)$; diese drei Größen aber können als Komponenten eines Vektors vom Betrage 1, eines sogenannten „Einheitsvektors“, aufgefaßt werden, so daß wir in (10) die Kraft auf ein Flächenelement von bestimmter Normalenrichtung als lineare, homogene, symmetrische Vektorfunktion dieses Einheitsvektors dargestellt haben. Die sechs Koeffizienten $X_x \ldots Z_z$ der linearen Vektorfunktion können daher als Komponenten eines Tensortripels betrachtet

werden, dessen Tensoren T_1, T_2, T_3 resp. mit den Hauptspannungen identisch sind. Als Gleichung der Tensorfläche leitet man leicht aus (10), unter Benutzung von Gl. (65) des Kap. VII auf pag. 360ff. ab:

$$\pm 1 = (X_x \cdot x + X_y \cdot y + X_z \cdot z)\, x + (Y_x \cdot x + Y_y \cdot y + Y_z \cdot z)\, y$$
$$+ (Z_x \cdot x + Z_y \cdot y + Z_z)\, z\,,$$

oder:

$$\pm 1 = X_x \cdot x^2 + Y_y \cdot y^2 + Z_z \cdot z^2 + 2\, Y_z \cdot yz + 2\, Z_x \cdot zx + 2\, X_y \cdot xy\,.$$

Diese Tensorfläche, die hier im allgemeinen wieder zwei konjugierte Hyperboloide darstellen wird, da die Spannung in einem Punkte je nach der Richtung positiv oder negativ sein kann, darf natürlich nicht mit der Spannungsfläche (28) verwechselt werden, die stets ein Ellipsoid ist.

Elftes Kapitel.

Allgemeine Dynamik eines Kontinuums: Zusammenhang zwischen Spannung und Deformation.

110. Das allgemeine Hookesche Gesetz.

Im IX. Kapitel wurde der Deformationszustand eines elastischen Mediums untersucht und festgestellt, daß er von sechs Größen x_x, y_y, z_z, y_z, z_x, x_y abhängig ist. Ganz analog wurde im X. Kapitel der Spannungszustand zurückgeführt auf sechs entsprechende Größen X_x, Y_y, Z_z, Y_z, Z_x, X_y und deren Zusammenhang mit den äußeren Kräften festgestellt. Was uns mithin noch fehlt, ist der Zusammenhang zwischen den Spannungskomponenten $X_x \ldots$ einerseits und den Verzerrungskomponenten $x_x \ldots$ anderseits. Denn damit hätten wir die Möglichkeit, durch Elimination der Spannungskomponenten X_x bis Z_z eine direkte Beziehung zwischen den wirkenden Kräften und den durch sie hervorgebrachten Verzerrungen zu gewinnen.

A priori kann man über die Art des Zusammenhanges nichts sagen; die hier vorliegende Aufgabe ist wesentlich experimenteller Natur, obwohl die Spannungen im Innern eines Körpers direkt gar nicht beobachtbar sind und alle Schlüsse auf den gewünschten Zusammenhang ziemlich indirekte sein müssen. In gewissen speziellen Fällen, die wir im XII. Kapitel besprechen wollen, sind derartige Beobachtungen durchgeführt. Sie haben zu dem zuerst von dem Engländer Hooke ausgesprochenen Resultat geführt, daß die Deformationen proportional den wirkenden Kräften seien. Da nun anderseits zwischen den Kräften und Spannungen lineare Beziehungen bestehen, so würde daraus folgen, daß die Spannungen lineare Funktionen der Verzerrungskomponenten sind.

Dieses sehr einfache Resultat stellt jedoch keineswegs das allgemeine Gesetz dieses Zusammenhanges dar; denn wie das Experiment ergibt, gilt das Hookesche Gesetz nur, wenn die Deformationen sehr klein, streng genommen unendlich klein sind. Nun sind allerdings kleine Deformationen für die Elastizitätslehre von großer Wichtigkeit; aus diesem Grunde durften wir uns im neunten Kapitel ja auch auf infinitesimale Deformationen beschränken. Halten wir diese Beschränkung auch fü

die Zukunft aufrecht, so können wir allerdings das Hookesche Gesetz als allgemein gültig akzeptieren.

Wir nehmen also die Spannungskomponenten X_x bis Z_z als lineare Funktionen der Verzerrungskomponenten x_x bis z_z an und bezeichnen dies als das „allgemeine Hookesche Gesetz“.

Es ist bemerkenswert, daß hiernach die Spannungskomponenten an einem Punkte nur abhängen von den Größen $x_x \ldots z_z$ an dem nämlichen Punkte; das ist der Grund, weshalb man die Größen X_x, Y_y, Z_z, Y_z, Z_x, X_y als Nahekräfte bezeichnen kann.

Auch auf einem etwas anderen Wege läßt sich unsere Annahme begründen. Allgemein ist

$$X_x = f(x_x, y_y, z_z, y_z, z_x, x_y),$$

wo f eine experimentell zu bestimmende Funktion ist. Sind jedoch die Deformationen infinitesimal, so liegt es nahe, f in eine Maclaurinsche Reihe zu entwickeln; die nach Potenzen von $x_x \ldots z_z$ fortschreitet. Diese Reihe kann hinter den linearen Gliedern abgebrochen werden. Wir erhalten so:

$$X_x = f(0) + \frac{\partial f}{\partial x_x} x_x + \frac{\partial f}{\partial y_y} y_y + \frac{\partial f}{\partial z_z} z_z + \frac{\partial f}{\partial y_z} y_z + \frac{\partial f}{\partial z_x} z_x + \frac{\partial f}{\partial x_y} x_y.$$

Nun können wir auf Grund der Erfahrung folgendes aussagen: Wenn die Deformationen $x_x \ldots$ alle gleich 0 sind, so kehrt der Körper im allgemeinen in seinen Normalzustand zurück, in dem er spannungsfrei ist, d. h. die $X_x \ldots$ sind dann auch gleich Null. Ein Medium, bei dem dies zutrifft, wollen wir ein im engeren Sinne elastisches nennen und von jetzt ab stets voraussetzen. Wir schließen dadurch von vornherein eine Reihe von Erscheinungen, z. B. Überschreitung der Elastizitätsgrenze usw., aus unserer Theorie aus. Nach der letzten Gleichung ergibt sich, wenn $X_x \ldots$ gleichzeitig mit den $x_x \ldots$ verschwinden soll, daß das konstante Glied $f(0)$ verschwinden muß.

Wir erhalten also folgendes Ergebnis:

$$\begin{aligned}
X_x &= c_{11} x_x + c_{12} y_y + c_{13} z_z + c_{14} y_z + c_{15} z_x + c_{16} x_y,\\
Y_y &= c_{21} x_x + c_{22} y_y + c_{23} z_z + c_{24} y_z + c_{25} z_x + c_{26} x_y,\\
Z_z &= c_{31} x_x + c_{32} y_y + c_{33} z_z + c_{34} y_z + c_{35} z_x + c_{36} x_y,\\
Y_z &= c_{41} x_x + c_{42} y_y + c_{43} z_z + c_{44} y_z + c_{45} z_x + c_{46} x_y,\\
Z_x &= c_{51} x_x + c_{52} y_y + c_{53} z_z + c_{54} y_z + c_{55} z_x + c_{56} x_y,\\
X_y &= c_{61} x_x + c_{62} y_y + c_{63} z_z + c_{64} y_z + c_{65} z_x + c_{66} x_y.
\end{aligned}$$

Darnach ist der allgemeinste elastische Körper durch 6 mal 6 gleich 36 „Elastizitätskonstanten“ c_{11} bis c_{66} charakterisiert.

Mit Hilfe des Energieprinzips läßt sich jedoch, wie zuerst **Green** im Jahre 1839 zeigte, diese Zahl auf 21 reduzieren; aus diesem Gesetz folgt nämlich, daß zwischen den 36 Koeffizienten Relationen bestehen von der Form

$$c_{ab} = c_{ba}.$$

Ferner reduziert sich die Anzahl der Konstanten je nach den Symmetrieverhältnissen des Körpers noch weiter. Z. B. müssen für einen isotropen, d. h. nach allen Richtungen hin gleich beschaffenen Körper — damit allein beschäftigen wir uns im folgenden — die obigen Ausdrücke für die Spannungskomponenten unabhängig vom Koordinatensystem sein. Die Einführung dieser Forderung ergibt für einen isotropen Körper nur noch zwei unabhängige Elastizitätskonstanten.[1])

Bevor wir diese Betrachtungen durchführen können, bedürfen wir einiger mathematischer Hilfsmittel, die wir uns in den nächsten Nummern verschaffen werden.

111. Der erste Greensche Satz.

Gegeben sei eine stetige, eindeutige Funktion der drei Koordinaten, der wir die Form $\frac{\partial}{\partial x} F(xyz)$ geben wollen.

Wir bilden nun das Integral

$$\iiint \frac{\partial F}{\partial x} dx\, dy\, dz = \int \frac{\partial F}{\partial x} d\tau,$$

erstreckt über einen endlichen, von einer Oberfläche σ abgeschlossenen Raum. Das Integral ist so zu verstehen: wir teilen den Raum in unendlich kleine Elemente ein; in jedem derselben hat die Funktion $\frac{\partial F}{\partial x}$ einen bestimmten, von Element zu Element sich ändernden, aber wegen der Kleinheit jedes Elementes innerhalb eines solchen als konstant zu betrachtenden Wert. Wir bilden für alle Elemente das Produkt aus den Volumen des Raumelementes, und dem zugehörigen Funktionswert: $\frac{\partial F}{\partial x} dx\, dy\, dz$ und summieren diesen Ausdruck für sämtliche Volumelemente. Die hier auftretenden Integrationen sind bestimmte, da der betrachtete Raum nach allen Richtungen hin feste endliche Grenzen hat.

Das zu betrachtende Integral kann folgendermaßen umgeformt werden:

[1]) Hier erkennt man deutlich den Nachteil der älteren Molekulartheorien der Elastizität; nach diesen besteht zwischen den zwei Elastizitätskonstanten eines isotropen Körpers noch eine Beziehung, so daß nur eine unabhängige übrig bliebe. Das Experiment hat zugunsten der „Multikonstantentheorie" gegen die „Rarikonstantentheorie" entschieden. Man vergleiche hierzu die Bemerkungen in Nr. 90.

(1) $$\iiint \frac{\partial F}{\partial x} dx\, dy\, dz = \iint dy\, dz \cdot \int \frac{\partial F}{\partial x} dx,$$

und die rechte Seite dieser Gleichung kann geometrisch leicht interpretiert werden.

In Fig. 147 sei durch die Fläche σ der betreffende Raum abgegrenzt.

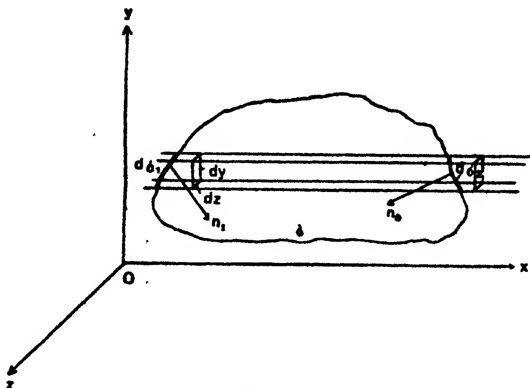


Fig. 147.

Wir zeichnen nun nach Gleichung (1) ein der yz-Ebene paralleles Flächenelement $dy.dz$ und ziehen durch seine vier Ecken Parallelen zur x-Achse. Durch diese Parallelen sind vier Ebenen bestimmt, die innerhalb des betrachteten Raumes einen Balken vom Querschnitt $dy\,dz$ ausschneiden. Dieser Balken interessiert uns natürlich nur insoweit, als er innerhalb des betrachteten Raumes liegt. Er schneidet die Oberfläche des Raumes in der Fig. 147 an zwei Stellen (allgemein in einer geraden Zahl von Stellen); wir wollen die von dem Balken ausgeschnittenen Stücke der Oberfläche σ mit $d\sigma_1$ und $d\sigma_2$ bezeichnen, die zugehörigen inneren Normalenrichtungen mit n_1 und n_2. Nun kann man $dy\,dz$, den Querschnitt des Balkens, auffassen einmal als Projektion von $d\sigma_1$, einmal von $d\sigma_2$ auf die yz-Ebene. Bezeichnen wir den Winekl zwischen den Normalen n_1 resp. n_2 mit der positiven x-Achse durch $(n_1 x)$ resp. $(n_2 x)$, so haben wir also:

(2a) $$d\sigma_1 \cos(n_1 x) = dy\,dz,$$

und

(2b) $$-d\sigma_2 \cos(n_2 x) = dy\,dz.$$

Das Minuszeichen in der Gleichung (2b) hat folgenden Grund: der Winkel $(n_2 x)$ ist stumpf, sein Kosinus also negativ. Da aber $d\sigma_2$ und $dy \cdot dz$ positiv sind, so muß das Minuszeichen zur Kompensation des negativen Kosinus hinzugefügt werden.

Nach diesen Vorbereitungen betrachten wir nun das Integral

$$dy\,dz\cdot\int\frac{\partial F}{\partial x}\,dx.$$

Hier haben wir — innerhalb des herausgeschnittenen Balkens — eine gewöhnliche Integration nach x auszuführen, deren untere Grenze die Eintrittsstelle (1), deren obere die Austrittsstelle (2) des Balkens ist. Wir erhalten also für unser Integral:

$$dy\,dz\int\frac{\partial F}{\partial x}\,dx = dy\,dz\,[F_2 - F_1]. \tag{3}$$

Dabei bedeuten F_2 und F_1 die Werte an der Oberfläche des Raumes, und zwar resp. an der Austrittsstelle (2) und der Eintrittsstelle (1). Die vom Integral (1) geforderte Integration $\int\frac{\partial F}{\partial x}\,d\tau$ über den ganzen Raum ist in Gleichung (3) bereits für einen Teil des Raumes, nämlich den Balken, durchgeführt. Wir brauchen jetzt den Balken nur parallel mit sich selbst zu verschieben, bis er den ganzen Raum bestrichen hat (ohne daß natürlich eine Stelle des Raumes doppelt überstrichen wird): dann ist unsere Aufgabe gelöst. Für sämtliche Balken erhalten wir ein Resultat von der Form (3). Summieren wir diese, so erhalten wir das gewünschte Integral (1). Wir haben also:

$$\iiint\frac{\partial F}{\partial x}\,d\tau = \iint dy\,dz\cdot(F_2 - F_1). \tag{3a}$$

Benutzen wir (2a) und (2b), so kann die letzte Gleichung geschrieben werden:

$$\int\frac{\partial F}{\partial x}\,d\tau = -\int\{F_2\cos(n_2\,x)\,d\sigma_2 + F_1\cos(n_1\,x)\,d\sigma_1\}. \tag{4}$$

Letzteres Integral bedeutet aber folgendes: es soll die ganze Oberfläche σ in Flächenelemente $d\sigma$ geteilt und mit dem zugehörigen Werte der Funktion $F\cos(nx)$ multipliziert werden. Alle diese Werte summieren wir. Man kann also die rechte Seite von (4) einfacher schreiben:

$$-\int F\cos(n\,x)\,d\sigma,$$

und erhält so die als erster Greenscher Satz bezeichnete Integraltransformation:

$$\int\frac{\partial F}{\partial x}\,d\tau = -\int F\cos(n\,x)\,d\sigma. \tag{5}$$

Sie transformiert ein Raumintegral in ein Oberflächenintegral und ist ungemein vielseitiger Verwendung fähig.

112. Der Gausssche Satz; die weiteren Sätze von Green.

Eine dreimalige Anwendung des ersten Greenschen Satzes liefert einen weiteren Satz, der in Deutschland meistens als der Gausssche Satz bezeichnet wird, weil Gauss ihn unabhängig von Green in einer berühmten Abhandlung über Potentialtheorie gefunden hat.

Es seien drei Funktionen F, G, H gegeben von den in Nummer 111 verlangten Eigenschaften; sie seien ferner so beschaffen, daß sie die Komponenten eines Vektors $\mathfrak{A}$ bilden. Wir haben also zunächst:

(6) $$F = \mathfrak{A}_x, \quad G = \mathfrak{A}_y, \quad H = \mathfrak{A}_z.$$

Wenden wir auf diese drei Funktionen den ersten Greenschen Satz an, so folgt:

(7) $$\left\{\begin{aligned} -\int F \cos(n\,x)\,d\sigma &= -\int \mathfrak{A}_x \cdot \cos(n\,x)\,d\sigma = \int \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x}\,d\tau, \\ -\int G \cos(n\,y)\,d\sigma &= -\int \mathfrak{A}_y \cdot \cos(n\,y)\,d\sigma = \int \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial y}\,d\tau, \\ -\int H \cos(n\,z)\,d\sigma &= -\int \mathfrak{A}_z \cdot \cos(n\,z)\,d\sigma = \int \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial z}\,d\tau. \end{aligned}\right.$$

Durch Addition folgt daraus:

(7a) $$\left\{\begin{aligned} &-\int [\mathfrak{A}_x \cos(n\,x) + \mathfrak{A}_y \cos(n\,y) + \mathfrak{A}_z \cos(n\,z)]\,d\sigma \\ &\qquad = \int \left[\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial z}\right] d\tau. \end{aligned}\right.$$

Der auf der linken Seite in der eckigen Klammer stehende Ausdruck ist aber nichts anderes wie $\mathfrak{A}_n$, die parallel der Normalenrichtung genommene Komponente von $\mathfrak{A}$.

Ebenso ist der rechtsstehende Klammerausdruck

$$\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial z},$$

wie aus einem Vergleich mit Gleichung (51a) und (51b) des IX. Kapitels auf pag. 478 hervorgeht, nichts anderes wie die Divergenz von $\mathfrak{A}$.

Mit diesen Bezeichnungen folgt aus (7a):

(8) $$\int \mathfrak{A}_n\,d\sigma = \int \operatorname{div} \mathfrak{A} \cdot d\tau.$$

Dies ist der sogenannte Gausssche Satz; auch er leistet die Umwandlung eines Volumintegrals in ein Oberflächenintegral.

Wenn insbesondere der Vektor $\mathfrak{A}$ sich aus einem Potential φ ableitet, d. h. wenn

$$\mathfrak{A}_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \mathfrak{A}_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \mathfrak{A}_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

ist, so hat man, da $\mathfrak{A}_n = -\frac{\partial \varphi}{\partial n}$, nach dem Gaussschen Satze:

(9)
$$-\int \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, d\sigma = \int \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right) d\tau .$$

Der Klammerausdruck rechts ist gleich $\Delta\varphi$, und man erhält aus (9):

(9a)
$$\int \Delta\varphi \cdot d\tau = -\int \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, d\sigma .$$

Weitere Anwendungen des ersten Greenschen Satzes erhalten wir folgendermaßen: wir nehmen die Funktion $F(x\,y\,z)$ in der Form an:

$$F = u\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \text{resp. } u\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \text{resp. } u\frac{\partial v}{\partial z},$$

wo u, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial z}$ die Eigenschaften der Stetigkeit und Eindeutigkeit besitzen. Wenden wir nun den Greenschen Satz dreimal auf die partiellen Ableitungen von F an, so erhalten wir:

(10)
$$\begin{cases} \int \frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}\right) d\tau = \int \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\, d\tau + \int u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\, d\tau = -\int u \frac{\partial v}{\partial x} \cos(n\,x)\, d\sigma , \\ \int \frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial v}{\partial y}\right) d\tau = \int \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\, d\tau + \int u \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\, d\tau = -\int u \frac{\partial v}{\partial y} \cos(n\,y)\, d\sigma , \\ \int \frac{\partial}{\partial z}\left(u\frac{\partial v}{\partial z}\right) d\tau = \int \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\, d\tau + \int u \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\, d\tau = -\int u \frac{\partial v}{\partial z} \cos(n\,z)\, d\sigma . \end{cases}$$

Durch Addition folgt dann weiter:

(11)
$$\int \left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right] d\tau + \int u\,\Delta v \cdot d\tau = -\int u \frac{\partial v}{\partial n}\, d\sigma .$$

Vertauscht man jetzt in (11) die Bedeutung der Funktionen u und v, so folgt:

(12)
$$\int \left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right] d\tau + \int v\,\Delta u \cdot d\tau = -\int v \frac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma .$$

Und daraus folgt schließlich durch Subtraktion ein weiterer Satz von Green, den wir als den zweiten bezeichnen wollen:

(13)
$$\int (u\,\Delta v - v\,\Delta u)\, d\tau = -\int \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) d\sigma .$$

Der Satz (13) stellt übrigens größere Anforderungen an die beiden Funktionen u und v, als die Sätze (11) und (12). Denn zur Gültigkeit von (13) müssen beide Funktionen stetige erste und zweite Differentialquotienten besitzen, während für die Sätze (11) und (12) dies nur für die eine der beiden Funktionen gefordert wird. In (11) z. B. wird für u nicht einmal verlangt, daß überhaupt zweite Ableitungen existieren, ebensowenig wird dies in (12) von v gefordert. Dies liegt daran, daß in (13) u und v symmetrisch vorkommen, was in (11) und (12) nicht der Fall ist.

113. Das allgemeine elastische Potential.

Wir wollen nun auf ein elastisches System das Energieprinzip anwenden, und zwar zunächst der Einfachheit halber auf unendlich benachbarte Gleichgewichtszustände. Dann ist die kinetische Energie dauernd gleich Null, und wir haben die einfache Aussage, daß die Änderung der potentiellen Energie gleich der von den äußeren Kräften geleisteten Arbeit ist; also wenn wir die von der Deformation herrührende potentielle Energie mit U und die Arbeit mit A bezeichnen, so ist für eine unendlich kleine Verschiebung:

$$dU = dA. \tag{14}$$

Was zunächst die potentielle Energie anlangt, so ist zu bemerken, daß jedes Volumelement Sitz von solcher wird, wenn der Körper deformiert ist. Ist dagegen keine Deformation vorhanden, so ist auch die potentielle Energie gleich Null. Wenn wir daher die Größe der Energie pro Volumeinheit mit f bezeichnen, so ist die Energie eines Volumelementes gleich $f \cdot d\tau$ und die gesamte Energie drückt sich durch ein Raumintegral über den elastischen Körper aus:

$$U = \int f \cdot d\tau \tag{15a}$$

und die Änderung der Energie durch:

$$dU = \int df \cdot d\tau. \tag{15b}$$

f ist dabei lediglich eine Funktion des augenblicklichen Zustandes, also hier der sechs Verzerrungskomponenten x_x, y_y, z_z, y_z, z_x, x_y. Daher kann man schreiben:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_x} dx_x + \frac{\partial f}{\partial y_y} dy_y + \frac{\partial f}{\partial z_z} dz_z + \frac{\partial f}{\partial y_z} dy_z + \frac{\partial f}{\partial z_x} dz_x + \frac{\partial f}{\partial x_y} dx_y.$$

Dadurch geht (15b) über in folgende Gleichung:

$$\left\{\begin{aligned} dU = \int d\tau \Big[& \frac{\partial f}{\partial x_x} dx_x + \frac{\partial f}{\partial y_y} dy_y + \frac{\partial f}{\partial z_z} dz_z \\ & + \frac{\partial f}{\partial y_z} dy_z + \frac{\partial f}{\partial z_x} dz_x + \frac{\partial f}{\partial x_y} dx_y \Big]. \end{aligned}\right. \tag{16}$$

Ferner setzt sich die Arbeit zusammen aus derjenigen der Massenkräfte (dA_1) und derjenigen der Oberflächenkräfte (dA_2).

Bezeichnen wir die unendlich kleinen Verrückungskomponenten mit $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$, so ist die Arbeit dA:

$$\left\{\begin{aligned} dA = dA_1 + dA_2 = & \int s[X\,d\xi + Y\,d\eta + Z\,d\zeta]\,d\tau \\ & + \int [X_n\,d\xi + Y_n\,d\eta + Z_n\,d\zeta]\,d\sigma. \end{aligned}\right. \tag{17}$$

Beide Teilarbeiten können umgeformt werden.

Zunächst setzen wir für εX, εY, εZ die Werte aus Gleichung (6) des X. Kapitels auf pag. 475 ein; dann wird:

$$(18)\left\{\begin{aligned} dA_1 = \int\left[\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right] d\xi \cdot d\tau + \int\left[\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z}\right] d\eta \cdot d\tau \\ + \int\left[\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}\right] d\zeta \cdot d\tau . \end{aligned}\right.$$

Greifen wir einen dieser neun gleichartig gebildeten Ausdrücke heraus, z. B. den ersten

$$\int \frac{\partial X_x}{\partial x} d\xi \cdot d\tau .$$

Wir transformieren den Integranden durch einen Kunstgriff in folgender Weise:

$$(19)\qquad \frac{\partial X_x}{\partial x} d\xi = \frac{\partial}{\partial x}(X_x d\xi) - X_x \frac{\partial d\xi}{\partial x} .$$

Dann gewinnt jeder der neun Ausdrücke in (18) folgende Gestalt:

$$(20)\qquad \int \frac{\partial}{\partial x}(X_x d\xi)\, d\tau - \int X_x \frac{\partial d\xi}{\partial x} d\tau .$$

Auf den ersten Teil von (20) kann man den ersten Greenschen Satz anwenden und erhält, alle neun Terme von (18) zusammengefaßt:

$$(21)\qquad \left\{\begin{aligned} & -\int[X_x \cos(nx) + X_y \cos(ny) + X_z \cos(nz)]\, d\xi \cdot d\sigma \\ & -\int[Y_x \cos(nx) + Y_y \cos(ny) + Y_z \cos(nz)]\, d\eta \cdot d\sigma \\ & -\int[Z_x \cos(nx) + Z_y \cos(ny) + Z_z \cos(nz)]\, d\zeta \cdot d\sigma . \end{aligned}\right.$$

Diese drei Ausdrücke heben sich jedoch fort gegen die Arbeit dA_2 der Oberflächenkräfte, wenn man die Gleichungen (10) des X. Kapitels auf pag. 488 berücksichtigt. Es bleibt also von dA_1 nur der zweite Teil übrig, und das Energieprinzip (14) erhält folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} -dU = \int\Big[& X_x \frac{\partial}{\partial x}(d\xi) + X_y \frac{\partial}{\partial y}(d\xi) + X_z \frac{\partial}{\partial z}(d\xi) \\ & + Y_x \frac{\partial}{\partial x}(d\eta) + Y_y \frac{\partial}{\partial x}(d\eta) + Y_z \frac{\partial}{\partial z}(d\eta) \\ & + Z_x \frac{\partial}{\partial x}(d\zeta) + Z_y \frac{\partial}{\partial y}(d\zeta) + Z_z \frac{\partial}{\partial z}(d\zeta)\Big] d\tau . \end{aligned}$$

Hier kann man nun stets schreiben:

$$\frac{\partial}{\partial x}(d\xi) = d\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right), \quad \text{u.s.w.},$$

oder, unter Benutzung der Gleichungen (52) des IX. Kapitels auf pag. 475.

$$(23)\quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}(d\xi) = dx_x, & \frac{\partial}{\partial y}(d\xi) + \frac{\partial}{\partial x}(d\eta) = dx_y, \\ \frac{\partial}{\partial y}(d\eta) = dy_y, & \frac{\partial}{\partial z}(d\eta) + \frac{\partial}{\partial y}(d\zeta) = dy_z, \\ \frac{\partial}{\partial z}(d\zeta) = dz_z, & \frac{\partial}{\partial x}(d\zeta) + \frac{\partial}{\partial z}(d\xi) = dz_x. \end{cases}$$

Setzt man dies in (22) ein und benutzt Gleichung (16) für dU, so erhält man schließlich:

$$(24)\begin{cases} \int d\tau \Big[\left(\frac{\partial f}{\partial x_x} + X_x\right) dx_x + \left(\frac{\partial f}{\partial y_y} + Y_y\right) dy_y + \left(\frac{\partial f}{\partial z_z} + Z_z\right) dz_z \\ \quad + \left(\frac{\partial f}{\partial y_z} + Y_z\right) dy_z + \left(\frac{\partial f}{\partial z_x} + Z_x\right) dz_x + \left(\frac{\partial f}{\partial x_y} + X_y\right) dx_y\Big] = 0. \end{cases}$$

Gleichung (24) gilt für jeden beliebigen Teil des deformierten Mediums und daher kann sie nur bestehen, indem die Koeffizienten der Deformationskomponenten verschwinden. Wir haben also:

$$(25)\quad \begin{cases} X_x = -\frac{\partial f}{\partial x_x}, & Y_z = -\frac{\partial f}{\partial y_z}, \\ Y_y = -\frac{\partial f}{\partial y_y}, & Z_y = -\frac{\partial f}{\partial z_x}, \\ Z_z = -\frac{\partial f}{\partial z_z}, & Y_y = -\frac{\partial f}{\partial x_y}. \end{cases}$$

Das heißt: die Spannungskomponenten sind sämtlich aus der Funktion f durch Differentiation abzuleiten. f hat also die Eigenschaften eines Potentiales, das wir als „elastisches Potential" bezeichnen.

Die Existenz einer solchen Funktion ist jedoch hier nur unter der speziellen Voraussetzung erwiesen, daß die Verrückung unendlich langsam vor sich geht, so daß keine kinetische Energie auftritt. Wir müssen zeigen, daß unser Beweis sich auch auf diesen Fall ausdehnen läßt.

Bezeichnen wir die kinetische Energie mit L, so ist zunächst:

$$(26)\quad L = \frac{1}{2}\int \varepsilon \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)^2\right] d\tau,$$

und die Änderung derselben:

$$(26a)\quad dL = \int \left[\varepsilon \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} d\xi + \varepsilon \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} d\eta + \varepsilon \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} d\zeta\right] d\tau.$$

Das Energieprinzip ist jetzt in der erweiterten Form zu benutzen:

$$dL + dU = dA,$$

und man kann nun wieder den nämlichen Gedankengang durchführen wie oben. Man kann insbesondere dA zerlegen in zwei Teile: dA_1 von den Massenkräften herrührend, dA_2 von den Oberflächenkräften erzeugt.

Der Ausdruck für dA_2 bleibt auch hier ganz unverändert, dagegen haben wir in dA_1 für X, Y, Z jetzt natürlich die für den Fall der Bewegung geltenden Relationen (7) des X. Kapitels auf pag. 484 zu benutzen; statt (18) erhält man also eine Gleichung, in der noch die Trägheitskräfte

$$-\varepsilon\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}, \quad -\varepsilon\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}, \quad -\varepsilon\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}$$

auftreten. Aber diese Glieder heben sich gegen die drei Terme von dL in (26a) fort, so daß schließlich dasselbe Resultat sich ergibt.

Wir haben ferner stillschweigend die Voraussetzung gemacht, bei Benutzung des Energieprinzips, daß keine Wärme von außen zugeführt oder nach außen abgegeben wird. Einen solchen Prozeß nennt man in der Thermodynamik einen adiabatischen. Für adiabatische Prozesse haben wir also ganz allgemein die Existenz des elastischen Potentials nachgewiesen; dasselbe wäre also genauer als „adiabatisches elastisches Potential" zu charakterisieren.

Im allgemeinen treten bei adiabatischen Prozessen Temperaturveränderungen auf. Geht jedoch der Prozeß hinreichend langsam, so daß die Temperaturänderungen sich in jedem Moment durch Wärmeaufnahme oder -abgabe an die Umgebung ausgleichen können, ist also die Temperatur des elastischen Körpers konstant, so haben wir einen „isothermen" Prozeß.

Auch für einen solchen wollen wir die Existenz des elastischen Potentials beweisen oder wenigstens den Beweisgang andeuten. Bezeichnen wir die zugeführte Wärme mit dQ, die absolute Temperatur mit T, so haben wir für das Energieprinzip (L setzen wir der Einfachheit halber wieder gleich Null):

(14b) $$dU = dA + dQ = dA_1 + dA_2 + dQ.$$

Nun reicht jedoch das Energieprinzip zum Beweise nicht mehr aus, sondern wir müssen den sogenannten zweiten Hauptsatz der Thermodynamik heranziehen. Dieser, der erst im II. Bande ausführlich besprochen werden kann, sagt aus, daß der Ausdruck:

$$\frac{dQ}{T} = \frac{dU - dA}{T}$$

gleich dem totalen Differential einer Funktion S, der sogenannten „Entropie" ist, die lediglich von den Zustandsvariabeln, hier also von $x_x, y_y, z_z, y_z, z_x, x_y$ abhängt. Wir haben also:

(27) $$dA - dU = -T\,dS$$

oder auch, da T für einen isothermen Prozeß konstant ist:

(27a) $$dA = d(U - TS).$$

Schreiben wir, um zum Ausdruck zu bringen, daß Energie und Entropie in den Volumelementen lokalisiert sind:

$$(28)\quad \begin{cases} U = \int \varphi \cdot d\tau, \\ S = \int s \cdot d\tau, \end{cases}$$

so haben wir aus (27a):

$$(27\text{b})\qquad dA = \int d(\varphi - Ts)\,d\tau,$$

und wenn wir $\varphi - Ts$ mit F bezeichnen, so erhalten wir:

$$(27\text{c})\qquad dA = \int dF \cdot d\tau,$$

die in der Form mit (15b) vollkommen übereinstimmt; alle Schlüsse übertragen sich also auch auf den Fall des isothermen Prozesses. Es existiert also auch hier ein elastisches Potential, das wir als „isothermisches, elastisches Potential“ bezeichnen können. Der Beweis läßt sich auch hier für den Fall erweitern, daß kinetische Energie zu berücksichtigen ist.

Ganz allgemein können wir also sagen, daß die Spannungskomponenten durch die Gleichungen (25) darstellbar sind; natürlich sind die Funktionen je nach der Art des Prozesses verschieden.

Nun sind aber anderseits nach dem Hookeschen Gesetz die Spannungskomponenten homogene lineare Funktionen der Verzerrungskomponenten; dann folgt aus (25), daß das elastische Potential eine homogene quadratische Funktion der nämlichen Argumente ist. Wir haben also für f die Darstellung:

$$(29)\quad \begin{aligned} f = a_{11} x_x^2 &+ 2a_{12} x_x y_y + 2a_{13} x_x z_z + 2a_{14} x_x y_z + 2a_{15} x_x z_x + 2a_{16} x_x x_y \\ &+ a_{22} y_y^2 + 2a_{23} y_y z_z + 2a_{24} y_y y_z + 2a_{25} y_y z_x + 2a_{26} y_y x_y \\ &+ a_{33} z_z^2 + 2a_{34} z_z y_z + 2a_{35} z_z z_x + 2a_{36} z_z x_y \\ &+ a_{44} y_z^2 + 2a_{45} y_z z_x + 2a_{46} y_z x_y \\ &+ a_{55} z_x^2 + 2a_{56} z_x x_y \\ &+ a_{66} x_y^2. \end{aligned}$$

Man erkennt daraus, daß das elastische Potential 21 Elastizitätskonstanten besitzt; diese sind natürlich, je nachdem man es mit adiabatischen oder isothermen Vorgängen zu tun hat, verschieden, und werden durch diese Epitheta charakterisiert, wo eine Unterscheidung notwendig ist. Bei festen Körpern sind die Unterschiede kaum merklich, und die Unterscheidung bei diesen daher unnötig.

Es möge hier noch folgendes bemerkt werden: Bei statischen Zuständen wird man es naturgemäß stets mit den isothermen Elastizitätskonstanten zu tun haben, während die adiabatischen nur bei so rasch verlaufenden Bewegungsvorgängen auftreten, daß die auftretenden Temperaturdifferenzen sich nicht ausgleichen können. Dies ist der Fall bei schnellen Schwingungen, z. B. Schallschwingungen in Gasen.

Aus (25) und (29) ergibt sich für die Spannungskomponenten folgende Darstellung:

$$
(30)\left\{\begin{aligned}
-X_x &= \frac{\partial f}{\partial x_x} = 2a_{11}\,x_x + 2a_{12}\,y_y + 2a_{13}\,z_z + 2a_{14}\,y_z + 2a_{15}\,z_x + 2a_{16}\,x_y,\\
-Y_y &= \frac{\partial f}{\partial y_y} = 2a_{12}\,x_x + 2a_{22}\,y_y + 2a_{23}\,z_z + 2a_{24}\,y_z + 2a_{25}\,z_x + 2a_{26}\,x_y,\\
-Z_z &= \frac{\partial f}{\partial z_z} = 2a_{13}\,x_x + 2a_{23}\,y_y + 2a_{33}\,z_z + 2a_{34}\,y_z + 2a_{35}\,z_x + 2a_{36}\,x_y,\\
-Y_z &= \frac{\partial f}{\partial y_z} = 2a_{14}\,x_x + 2a_{24}\,y_y + 2a_{34}\,z_z + 2a_{44}\,y_z + 2a_{45}\,z_x + 2a_{46}\,x_y,\\
-Z_x &= \frac{\partial f}{\partial z_x} = 2a_{15}\,x_x + 2a_{25}\,y_y + 2a_{35}\,z_z + 2a_{45}\,y_z + 2a_{55}\,z_x + 2a_{56}\,x_y,\\
-X_y &= \frac{\partial f}{\partial x_y} = 2a_{16}\,x_x + 2a_{26}\,y_y + 2a_{36}\,z_z + 2a_{46}\,y_z + 2a_{56}\,z_x + 2a_{66}\,x_y.
\end{aligned}\right.
$$

114. Das elastische Potential für einen isotropen Körper.

Wie schon früher bemerkt, reduziert sich die Konstantenzahl sehr bedeutend, wenn der Körper Symmetrien aufweist.

Zunächst ist es wichtig, zu betonen, daß der Ausdruck von f, da er ja die Energie, d. h. eine objektiv physikalisch existierende Größe, darstellt, unabhängig vom Koordinatensystem sein muß. Wir nennen nun z. B. die xy-Ebene eine Symmetrieebene für einen Körper, wenn man bei der Vertauschung der positiven z-Achse mit der negativen den nämlichen Ausdruck von f erhält.

Untersuchen wir nun, welche Form f für einen solchen Körper haben muß.

Vertauschen wir z mit $-z$, so geht ζ in $-\zeta$ über; x, y, ξ, η bleiben ungeändert. Nach (52) des IX. Kapitels haben wir dann, wenn wir alle Größen nach der Vertauschung mit Strichen bezeichnen:

$$
(31)\left\{\begin{aligned}
x'_{x'} &= \frac{\partial \xi}{\partial x'} = \frac{\partial \xi}{\partial x} = x_x, \quad & y'_{z'} &= \frac{\partial \zeta'}{\partial y'} + \frac{\partial \eta'}{\partial z'} = -\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z} = -y_z,\\
y'_{y'} &= \frac{\partial \eta'}{\partial y'} = \frac{\partial \eta}{\partial y} = y_y, \quad & z'_{x'} &= \frac{\partial \zeta'}{\partial x'} + \frac{\partial \xi'}{\partial z'} = -\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial z} = -z_x,\\
z'_{z'} &= \frac{\partial \zeta'}{\partial z'} = \frac{\partial(-\zeta)}{\partial(-z)} = z_z, \quad & x'_{y'} &= \frac{\partial \xi'}{\partial y'} + \frac{\partial \eta'}{\partial y'} = \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} = x_y.
\end{aligned}\right.
$$

Da nach Vertauschung von z in $-z$ der Körper nach Voraussetzung sich in derselben Lage befinden muß wie vorher, so muß der Ausdruck für das Potential derjenige der Gleichungen (29) sein. Anderseits aber haben nach (31) y_z und z_x das Vorzeichen gewechselt. Die Glieder von f also, in denen diese Komponenten in der ersten Potenz auftreten, würden das Zeichen wechseln und man würde ein von (29) verschiedenes Resultat erhalten. Da dies nach Voraussetzung nicht sein kann, müssen die

Koeffizienten der betreffenden Glieder verschwinden. Es ergibt sich demnach für einen Körper, für den die xy-Ebene Symmetrieebene ist:

$$a_{14} = a_{15} = a_{24} = a_{25} = a_{34} = a_{35} = a_{46} = a_{56} = 0.$$

Man erhält für f:

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} f = a_{11} x_x^2 + 2 a_{12} x_x y_y + 2 a_{13} x_x z_z & & + 2 a_{16} x_x x_y \\ + a_{22} y_y^2 + a_{23} y_y z_z & & + 2 a_{26} y_y x_y \\ + a_{33} z_z^2 & & + 2 a_{36} z_z x_y \\ & + a_{44} y_z^2 + 2 a_{45} y_z z_x & \\ & + a_{55} z_x^2 & + a_{66} x_y^2. \end{aligned}\right.$$

Das elastische Potential besitzt also für einen so beschaffenen Körper nur noch 13 Konstanten.

Soll außerdem noch die yz-Ebene Symmetrieebene sein, so muß x mit $-x$ vertauscht werden können. Das bedingt, daß gleichzeitig ξ in $-\xi$ übergeht, und folglich ist, wenn wir die Größen nach der Vertauschung wieder mit Strichen bezeichnen

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned} x'_{x'} &= x_x; & y'_{z'} &= y_z; \\ y'_{y'} &= y_y; & z'_{x'} &= -z_x; \\ z'_{z'} &= z_z; & x'_{y'} &= -x_y. \end{aligned}\right.$$

Durch die nämliche Schlußweise wie oben ergibt sich hieraus:

$$a_{16} = a_{26} = a_{36} = a_{45} = 0.$$

Für einen solchen Körper hat das elastische Potential nur noch neun Koeffizienten und folgenden Ausdruck:

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned} f = a_{11} x_x^2 + 2 a_{12} x_x y_y + 2 a_{13} x_x z_z & \\ + a_{22} y_y^2 + 2 a_{23} y_y z_z & \\ + a_{33} z_z^2 & \\ & + a_{44} y_z^2 \\ & + a_{55} z_x^2 \\ & + a_{66} x_y^2. \end{aligned}\right.$$

Nehmen wir auch noch die dritte Ebene, die xz-Ebene, als Symmetriebene, so werden y und $-y$, η und $-\eta$ miteinander vertauscht. Dann wird:

$$x'_{x'} = x_x;\quad y'_{y'} = y_y;\quad z'_{z'} = z_z;\quad y'_{z'} = -y_z;\quad z'_{x'} = z_x;\quad x'_{y'} = -x_y.$$

Man erkennt, daß jetzt keine weiteren Koeffizienten in Fortfall kommen. Das heißt: Wenn für einen Körper gleichzeitig die xy-Ebene und die yz-Ebene Symmetrieebenen sind, so ist es eo ipso auch die xz-Ebene.

Wir wollen jetzt noch einen Schritt weiter gehen und verlangen, daß (34) bestehen bleibt, wenn man noch die x-Achse mit der y-Achse vertauscht. In einem solchen Falle nennt man die yz-Ebene und die xz-Ebene „gleichwertige Symmetrieebenen". Dann vertauscht sich auch ξ mit η und umgekehrt. Daraus folgt weiter:

$$(35)\quad \begin{cases} x'_{x'} = y_y; & y'_{z'} = x_z = z_x; \\ y'_{y'} = x_x; & z'_{x'} = z_y = y_z; \\ z'_{z'} = z_z; & x'_{y'} = y_x = x_y. \end{cases}$$

Aus (34) ergibt sich:

$$a_{11} = a_{22}; \quad a_{44} = a_{55}; \quad a_{13} = a_{23},$$

und für f erhält man:

$$f = a_{11}(x_x^2 + y_y^2) + 2a_{12}x_x y_y + 2a_{13}(x_x z_z + y_y z_z) + a_{33}z_z^2 + a_{44}(y_z^2 + z_x^2) + a_{66}x_y^2$$

mit sechs Koeffizienten.

Kann endlich noch z mit x vertauscht werden, so ist:

$$(37)\quad \begin{cases} x'_{x'} = y_y = z_z, & y'_{z'} = y_x = x_y, \\ y'_{y'} = x_y = z_z, & z'_{x'} = x_z = z_x, \\ z'_{z'} = x_x = y_y, & x'_{y'} = z_y. \end{cases}$$

Dann ergibt sich aus (36):

$$a_{11} = a_{33}; \quad a_{44} = a_{66}; \quad a_{12} = a_{13},$$

und es folgt für f:

$$(38)\quad f = a_{11}(x_x^2 + y_y^2 + z_z^2) + 2a_{12}(x_x y_y + y_y z_z + z_z x_x) + a_{44}(y_z^2 + z_x^2 + x_y^2),$$

mit nur drei unabhängigen Koeffizienten.

Endlich fordern wir noch, daß der Ausdruck (38) gegen jede Drehung des Koordinatensystems invariant sein soll. Dazu benutzen wir die Formeln (29) und (52) des IX. Kapitels auf pag. 465 und 475. Zunächst geben wir der Bequemlichkeit halber (38) eine etwas geeignetere Form:

$$(38a)\quad \begin{cases} f = (a_{11} - 2a_{44})(x_x + y_y + z_z)^2 + 2a_{44}(x_x^2 + y_y^2 + z_z^2 + \frac{1}{2}y_z^2 \\ \qquad + \frac{1}{2}z_x^2 + \frac{1}{2}x_y^2) + 2(a_{12} - a_{11} + 2a_{44})(x_x y_y + y_y z_z + z_z x_x). \end{cases}$$

Nach den genannten Gleichungen (29) und (52) des IX. Kapitels ist nun:

$$(39)\quad \begin{cases} (x_x + y_y + z_z)^2 = (f + g + h)^2 = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 = \Sigma^2, \\ x_x^2 + y_y^2 + z_z^2 + \frac{1}{2}(y_z^2 + z_x^2 + x_y^2) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2. \end{cases}$$

Diese Ausdrücke sind, da die Größen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ die Hauptdilatationen sind, vom Koordinatensystem unabhängig. f nimmt also folgende Gestalt an:

$$(38b)\quad \begin{cases} f = (a_{11} - 2a_{44})(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 + 2a_{44}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) \\ \qquad + 2(a_{12} - a_{11} + 2a_{44})(x_x y_y + y_y z_z + z_z x_x). \end{cases}$$

Das letzte Glied jedoch ist vom Koordinatensystem abhängig, es muß daher der Koeffizient

(40) $$a_{12} - a_{11} + 2a_{44} = 0$$

werden.

Dadurch reduzieren sich die drei Konstanten auf zwei unabhängige, die dem isotropen Körper zukommen.

Wir schreiben in Anlehnung an die Bezeichnungsweise von Lamé:

(41) $$\begin{cases} a_{11} - 2a_{44} = \frac{1}{2}\lambda, \\ 2a_{44} = \mu. \end{cases}$$

Mit diesen beiden Elastizitätskonstanten läßt sich nunmehr f in definitiver Form schreiben:

(42) $$f = \frac{1}{2}\lambda(x_x + y_y + z_z)^2 + \mu(x_x^2 + y_y^2 + z_z^2 + \frac{1}{2}y_z^2 + \frac{1}{2}z_x^2 + \frac{1}{2}x_y^2).$$

An diese Gestalt knüpfen unsere weiteren Überlegungen an.

Hier möge noch eine wichtige Bemerkung angefügt werden. f ist so bestimmt, daß es im undeformierten Zustande des Mediums ($x_x = y_y = z_z = y_z = z_x = x_y = 0$) selbst Null ist, wie zum Überfluß auch noch aus Gleichung (42) hervorgeht. Diese undeformierte Lage ist nun offenbar eine stabile Gleichgewichtslage; sie entspricht nach den Grundsätzen der allgemeinen Mechanik also einem Minimum der potentiellen Energie. Da nun f in dieser Gleichgewichtslage Null ist, muß es außerhalb derselben stets positiv sein. Da es aber eine quadratische Funktion ist, so müssen die Koeffizienten λ und μ positiv sein.

115. Das Hookesche Gesetz für einen isotropen Körper.

Benutzt man den Ausdruck (42) für das elastische Potential eines isotropen Körpers, so kann man nach Gleichung (30) für die Spannungskomponenten setzen:

(43) $$\begin{cases} -X_x = \lambda(x_x + y_y + z_z) + 2\mu x_x; & -Y_z = \mu y_z; \\ -Y_y = \lambda(x_x + y_y + z_z) + 2\mu y_y; & -Z_x = \mu z_x; \\ -Z_z = \lambda(x_x + y_y + z_z) + 2\mu z_z; & -X_y = \mu x_y. \end{cases}$$

Man erkennt daraus — was wegen der Analogie zwischen Spannungszustand und Deformationszustand eigentlich zu erwarten war —, daß engere Beziehungen zwischen den Normalspannungen X_x, Y_y, Z_z und den Dehnungskomponenten x_x, y_y, z_z einerseits, und zwischen den Tangentialspannungen Y_z, Z_x, X_y und den Gleitungskomponenten y_z, z_x, x_y anderseits existieren.

Die Gleichungen (43) stellen das allgemeine Hookesche Gesetz für einen isotropen Körper dar.

Man kann die Gleichungen auch umgekehrt nach den Deformationskomponenten auflösen und erhält folgende Ausdrücke dafür:

$$(44)\quad \begin{cases} x_x = \dfrac{-2(\lambda+\mu)X_x + \lambda Y_y + \lambda Z_z}{2\mu(3\lambda+2\mu)}, & x_y = -\dfrac{1}{\mu}X_y, \\ y_y = \dfrac{\lambda X_x - 2(\lambda+\mu)Y_y + \lambda Z_z}{2\mu(3\lambda+2\mu)}, & y_z = -\dfrac{1}{u}Y_z, \\ z_z = \dfrac{\lambda X_x + \lambda Y_y - 2(\lambda+\mu)Z_z}{2\mu(3\lambda+2\mu)}, & z_x = -\dfrac{1}{\mu}Z_x. \end{cases}$$

Diese Ausdrücke legen es nahe, zwei neue Elastizitätskonstanten einzuführen, nämlich folgende Aggregate von λ und μ:

$$(45)\qquad \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu} = E, \qquad \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} = \sigma.$$

Wir nennen E den „Elastizitätsmodul" oder nach dem englischen Sprachgebrauch den „Youngschen Modul", μ den „Torsionsmodul" und endlich σ den „Poissonschen Querkontraktionskoeffizienten".

Die drei Größen E, μ, σ sind natürlich nicht unabhängig voneinander, sondern nach (45) besteht zwischen ihnen die Beziehung:

$$(46)\qquad \frac{E}{2\mu} = 1 + \sigma.$$

Nach einer vorhin gemachten Bemerkung über λ und μ sind die Größen E, μ, σ ebenfalls sämtlich positiv.

Mit Hilfe der Bezeichnungen (45) kann man die Gleichungen (44) in folgende Gestalt bringen:

$$(44a)\quad \begin{cases} x_x = -\dfrac{1}{E}\{X_x - \sigma(Y_y + Z_z)\}, & y_z = -\dfrac{2(1+\sigma)}{E}Y_z, \\ y_y = -\dfrac{1}{E}\{Y_y - \sigma(Z_z + X_x)\}, & z_x = -\dfrac{2(1+\sigma)}{E}Z_x, \\ z_z = -\dfrac{1}{E}\{Z_z - \sigma(X_x + Y_y)\}, & x_y = -\dfrac{2(1+\sigma)}{E}X_y. \end{cases}$$

116. Die allgemeinen Gleichungen der Elastizität.

Setzt man die in (43) angegebenen Werte der Spannungskomponenten und die Werte der Verzerrungskomponenten aus Gleichung (52) des IX. Kapitels (pag. 475) in die Gleichungen (7) des X. Kapitels auf pag. 484 ein, die uns den Zusammenhang zwischen Massen- und Trägheitskräften einerseits und den Spannungskomponenten anderseits angeben, so folgt nach elementaren Rechnungen folgendes Gleichungssystem für die kleinen Bewegungen, die ein elastischer Körper ausführen kann:

$$\varepsilon\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \varepsilon X + \mu\Delta\xi + (\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z}\right\},$$

und zwei analoge, wobei $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ ist; bezeichnen wir wie früher $\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z}$ durch Σ, so haben wir:

$$
(47)\quad \begin{cases}
\varepsilon \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \varepsilon X + \mu \Delta \xi + (\lambda + \mu) \dfrac{\partial \Sigma}{\partial x}, \\
\varepsilon \dfrac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \varepsilon Y + \mu \Delta \eta + (\lambda + \mu) \dfrac{\partial \Sigma}{\partial y}, \\
\varepsilon \dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \varepsilon Z + \mu \Delta \zeta + (\lambda + \mu) \dfrac{\partial \Sigma}{\partial z}.
\end{cases}
$$

Diese Gleichungen lassen sich durch Einführung der Rotationskomponenten p, q, r noch in die folgende Form bringen, wie eine einfache Rechnung leicht ergibt:

$$
(47\text{a})\quad \begin{cases}
\varepsilon \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \varepsilon X + (\lambda + 2\mu) \dfrac{\partial \Sigma}{\partial x} - 2\mu \left(\dfrac{\partial r}{\partial y} - \dfrac{\partial q}{\partial z}\right), \\
\varepsilon \dfrac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \varepsilon Y + (\lambda + 2\mu) \dfrac{\partial \Sigma}{\partial y} - 2\mu \left(\dfrac{\partial p}{\partial z} - \dfrac{\partial r}{\partial x}\right), \\
\varepsilon \dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \varepsilon Z + (\lambda + 2\mu) \dfrac{\partial \Sigma}{\partial z} - 2\mu \left(\dfrac{\partial q}{\partial x} - \dfrac{\partial p}{\partial y}\right).
\end{cases}
$$

Indem wir links die Beschleunigungskomponenten gleich 0 nehmen, erhalten wir daraus die Gleichgewichtsbedingungen eines elastischen Körpers:

$$
(48)\quad \begin{cases}
0 = \varepsilon X + \mu \Delta \xi + (\lambda + \mu) \dfrac{\partial \Sigma}{\partial x}, \\
0 = \varepsilon Y + \mu \Delta \eta + (\lambda + \mu) \dfrac{\partial \Sigma}{\partial y}, \\
0 = \varepsilon Z + \mu \Delta \zeta + (\lambda + \mu) \dfrac{\partial \Sigma}{\partial z},
\end{cases}
$$

die man ebenfalls durch Einführung von p, q, r auf eine (47a) entsprechende Gestalt bringen kann.

Im nächsten Kapitel werden wir einige Beispiele des elastischen Gleichgewichtes besprechen, die hauptsächlich darauf abzielen, uns Methoden kennen zu lehren, die Elastizitätsmoduln zu bestimmen.

Wellenbewegung.

gleichungen (47) können wir schreiben, wenn $X = Y = Z = 0$

$$\frac{\epsilon}{\mu}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \Delta \xi + \frac{1}{1-2\sigma}\frac{\partial \Sigma}{\partial x}, \quad \text{etc.}$$

Wir betrachten eine ebene Welle

$$\xi = A \sin 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{\tau}\right); \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0.$$

Dann ist die Gleichung identisch erfüllt falls nur die Bedingungsgleichung

$$\frac{2-2\sigma}{1-2\sigma}\cdot\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{\epsilon}{\mu}\left(\frac{1}{\tau}\right)^2$$

λ und τ müssen notwendig voneinander abhängen und zwar so, dass das Verhältnis $\frac{\lambda}{\tau}$ oder die Fortpflanzungsgeschwindigkeit v unabhängig von der Wellenlänge und nur von den physikalischen Eigenschaften des Stoffes abhängig ist

$$v = \frac{\lambda}{\tau} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}\cdot\frac{2-2\sigma}{1-2\sigma}} = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\epsilon}}.$$

Transversalwelle: Wir setzen

$$\xi = A \sin 2\pi\left(\frac{y}{\lambda} - \frac{t}{\tau}\right); \quad \eta = 0; \quad \zeta = 0.$$

Wir erhalten hier

$$\Sigma = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0$$

als Polarisationsebene wurde nach Fresnel die XZ Ebene, nach Neumann XY Ebene angesehen.

Hier erhalten wir

$$v_t = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}.$$

Wellenbewegung

Gleichungen (4f) können wir erfüllen, wenn $X = Y = Z = 0$

$$\frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \Delta\xi + \frac{1}{1-2\vartheta}\frac{\partial \sigma}{\partial x}\ , \quad \text{etc.}$$

Wir betrachten eine ebene Welle

$$\xi = A \sin 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right); \quad \eta = 0\ , \quad \zeta = 0\ .$$

Dann ist die Gleichung identisch erfüllt falls nur die Bedingungsgleichung

$$\frac{\rho}{\mu}\left(\frac{1}{T}\right)^2 = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 \cdot \frac{2-2\vartheta}{1-2\vartheta}$$

λ und T müssen entsprechend voneinander abhängen, und zwar so, dass das Verhältnis $\frac{\lambda}{T}$ oder die Fortpflanzungsgeschwindigkeit v unabhängig von der Wellenlänge und nur von den physikalischen Eigenschaften des Stoffes abhängig ist.

$$v = \frac{\lambda}{T} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}\cdot\frac{2-2\vartheta}{1-2\vartheta}} = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}\ .$$

<u>Transversalwelle</u>: Wir setzen

$$\xi = A \sin 2\pi\left(\frac{y}{\lambda} - \frac{t}{T}\right); \quad \eta = 0\ ; \quad \zeta = 0\ .$$

Wir erhalten hier

$$\sigma = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0$$

als Polarisationsebene werde nach Fresnel die XZ Ebene, nach Neumann XY Ebene angegeben.

Hier erhalten wir

μ [illegible]

Zwölftes Kapitel.

Spezielle Fälle des elastischen Gleichgewichtes.

117. Eindeutigkeit der Lösungen.

Bevor wir dazu übergehen, die erhaltenen Resultate auf spezielle Fälle anzuwenden, ist es notwendig, sich zu versichern, daß erstens eine Lösung überhaupt existiert, und zweitens, daß, wenn man eine Lösung gefunden hat, die die geforderten Bedingungen erfüllt, keine zweite davon verschiedene existieren kann; mit einem Wort: wir müssen den „Existenzbeweis" und den „Eindeutigkeitsbeweis" für die Lösungen führen.

Der Existenzbeweis kann im allgemeinen nur dadurch geführt werden, daß man die alle geforderten Eigenschaften besitzende Lösung wirklich darstellt; dies werden wir im folgenden auch wirklich tun.

Deshalb interessiert uns hier nur der Eindeutigkeitsbeweis, der uns die Zuversicht gibt, daß die später von uns aufgefundenen Lösungen auch wirklich die einzigen sind.

Es können nun zwei Arten von Problemen überhaupt vorliegen:

I. Es können die Verrückungen ξ, η, ζ als Funktionen von x, y, z gegeben sein; dann besteht die Aufgabe, die Massenkräfte X, Y, Z und die Oberflächenkräfte X_n, Y_n, Z_n daraus zu bestimmen. Zunächst zeigt Gleichung (47) des XI. Kapitels auf pag. 514, daß die Massenkräfte in der Tat eindeutig durch die ξ, η, ζ bestimmt werden; denn es sind dazu ja nur Differentiationen auszuführen; ferner bestimmen nach (43) des vorigen Kapitels (pag. 512) die ξ, η, ζ resp. die $x_x, y_y, z_z, y_z, z_x, x_y$ eindeutig die Spannungskomponenten $X_x, Y_y, Z_z, Y_z, Z_x, X_y$; nimmt man also für die ξ, η, ζ die Werte an der Oberfläche des gegebenen Körpers, so erhält man die Spannungskomponenten an der Oberfläche der Substanz. Dann aber folgen, wiederum eindeutig, nach Gleichung (10) des X. Kapitels auf pag. 488 die Werte X_n, Y_n, Z_n der Oberflächenkräfte. Dieses Problem besitzt also nur eine Lösung. Aber es liegt meistens das umgekehrte Problem vor:

II. Es sind gegeben die Massenkräfte X, Y, Z und die Oberflächenkräfte X_n, Y_n, Z_n. Es wird gefragt, ob dadurch die Verrückungen ξ, η, ζ eindeutig bestimmt sind.

Den Beweis, daß dies wirklich so ist, hat zuerst Gustav Kirchhoff erbracht, dem wir uns hier anschließen. Diese Art von Beweisen

ist in der ganzen theoretischen Physik typisch und vor allen Dingen geeignet, die große Bedeutung der Greenschen Sätze ins hellste Licht zu stellen.

Wir nehmen zunächst einmal an, es seien zwei Lösungen gefunden: ξ', η', ζ' und ξ'', η'', ζ''. Dann haben wir auch zwei Systeme von Verzerrungskomponenten:

$$(1)\quad \begin{cases} x_x' = \dfrac{\partial \xi'}{\partial x}, \; y_y', \; z_z', \; y_z', \; z_x', \; x_y' \quad \text{und:} \\ x_x'', \; y_y'', \; z_z'', \; y_z'', \; z_x'', \; x_y''. \end{cases}$$

Jedes dieser Systeme von Verzerrungskomponenten bestimmt nach Gleichung (43) des XI. Kapitels ein System von Spannungskomponenten; wir erhalten also:

$$(2)\quad \begin{cases} X_x', \; Y_y', \; Z_z', \; Y_z', \; Z_x', \; X_y', \quad \text{und:} \\ X_x'', \; Y_y'', \; Z_z'', \; Y_z'', \; Z_x'', \; X_y''. \end{cases}$$

Jedes dieser Systeme (2) erfüllt an der Oberfläche des betr. Körpers nach Voraussetzung die allgemeinen Gleichungen (10) des X. Kapitels: nämlich, wenn X_n, Y_n, Z_n die gegebenen Oberflächenkräfte sind, so muß sein:

$$(3a)\quad \begin{cases} X_n = X_x' \cos(nx) + X_y' \cos(ny) + X_z' \cos(nz), \\ Y_n = Y_x' \cos(nx) + Y_y' \cos(ny) + Y_z' \cos(nz), \\ Z_n = Z_x' \cos(nx) + Z_y' \cos(ny) + Z_z' \cos(nz), \end{cases}$$

und ebenso:

$$(3b)\quad \begin{cases} X_n = X_x'' \cos(nx) + X_y'' \cos(ny) + X_z'' \cos(nz), \\ Y_n = Y_x'' \cos(nx) + Y_y'' \cos(ny) + Y_z'' \cos(nz), \\ Z_n = Z_x'' \cos(nx) + Z_y'' \cos(ny) + Z_z'' \cos(nz). \end{cases}$$

Beschränken wir uns ferner auf den Fall des Gleichgewichtes, so gelten ebenso im Innern des Körpers die folgenden Gleichungen, wo X, Y, Z die gegebenen Massenkräfte sind:

$$(4a)\quad \begin{cases} \varepsilon X = \dfrac{\partial X_x'}{\partial x} + \dfrac{\partial X_y'}{\partial y} + \dfrac{\partial X_z'}{\partial z}, \\ \varepsilon Y = \dfrac{\partial Y_x'}{\partial x} + \dfrac{\partial Y_y'}{\partial y} + \dfrac{\partial Y_z'}{\partial z}, \\ \varepsilon Z = \dfrac{\partial Z_x'}{\partial x} + \dfrac{\partial Z_y'}{\partial y} + \dfrac{\partial Z_z'}{\partial z}, \end{cases}$$

und ebenso:

$$(4b)\quad \begin{cases} \varepsilon X = \dfrac{\partial X_x''}{\partial x} + \dfrac{\partial X_y''}{\partial y} + \dfrac{\partial X_z''}{\partial z}, \\ \varepsilon Y = \dfrac{\partial Y_x''}{\partial x} + \dfrac{\partial Y_y''}{\partial y} + \dfrac{\partial Y_z''}{\partial z}, \\ \varepsilon Z = \dfrac{\partial Z_x''}{\partial x} + \dfrac{\partial Z_y''}{\partial y} + \dfrac{\partial Z_z''}{\partial z}. \end{cases}$$

Wir wollen nun folgende Bezeichnungen einführen:

$$(5)\quad \begin{cases} \xi' - \xi'' = \xi_0; & x'_x - x_x'' = x_x^0; \quad X_x' - X_x'' = X_x^0, \\ \eta' - \eta'' = \eta_0; & \text{usw.} \qquad\qquad \text{usw.} \\ \zeta' - \zeta'' = \zeta_0; & \end{cases}$$

Wenn wir nun die Gleichungen (3a) und (3b) und ebenso (4a) und (4b) paarweise voneinander subtrahieren, so erhalten wir:

$$(6)\quad \begin{cases} 0 = X_x^0 \cos(nx) + X_y^0 \cos(ny) + X_z^0 \cos(nz)\,, \\ 0 = Y_x^0 \cos(nx) + Y_y^0 \cos(ny) + Y_z^0 \cos(nz)\,, \\ 0 = Z_x^0 \cos(nx) + Z_y^0 \cos(ny) + Z_z^0 \cos(nz)\,. \end{cases}$$

$$(7)\quad \begin{cases} 0 = \dfrac{\partial X_x^0}{\partial x} + \dfrac{\partial X_y^0}{\partial y} + \dfrac{\partial X_z^0}{\partial z}, \\ 0 = \dfrac{\partial Y_x^0}{\partial x} + \dfrac{\partial Y_y^0}{\partial y} + \dfrac{\partial Y_z^0}{\partial z}, \\ 0 = \dfrac{\partial Z_x^0}{\partial x} + \dfrac{\partial Z_y^0}{\partial y} + \dfrac{\partial Z_z^0}{\partial z}. \end{cases}$$

Die Annahme von zwei verschiedenen Lösungen ξ', η', ζ' und und ξ'', η'', ζ'' führt also zu der Folgerung, daß ein Spannungssystem $X_x^0 \ldots Z_z^0$ existiert, das den Gleichungen (6) und (7) gehorcht, d. h. den allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen, in denen aber Massen- und Oberflächenkräfte gleich 0 sind.

Wir wollen sehen, welche Konsequenzen sich daraus ergeben. Wir multiplizieren (7) der Reihe nach mit $\xi_0 d\tau$, $\eta_0 d\tau$, $\zeta_0 d\tau$, addieren und integrieren über das Volumen des Körpers. Dann erhalten wir folgende Gleichung:

$$(8)\quad \begin{cases} \displaystyle\int \Big[\frac{\partial X_x^0}{\partial x}\xi_0 + \frac{\partial X_y^0}{\partial y}\xi_0 + \frac{\partial X_z^0}{\partial z}\xi_0 + \frac{\partial Y_x^0}{\partial x}\eta_0 \\ \qquad + \ldots + \dfrac{\partial Z_x^0}{\partial x}\zeta_0 + \ldots \dfrac{\partial Z_z^0}{\partial z}\zeta_0 \Big] d\tau = 0. \end{cases}$$

Jedes Glied des Integranden von (8) kann nun nach folgendem Schema umgestaltet werden:

$$\frac{\partial X_x^0}{\partial x}\xi_0 = \frac{\partial}{\partial x}(X_x^0 \xi_0) - \frac{\partial \xi_0}{\partial x} X_x^0.$$

Setzen wir dies ein und bezeichnen das Integral über die neun ersten Glieder durch J_1, so haben wir:

$$(9)\quad \begin{cases} J_1 = \displaystyle\int \Big[\frac{\partial}{\partial x}(X_x^0 \xi_0) + \frac{\partial}{\partial y}(X_y^0 \xi_0) + \frac{\partial}{\partial z}(X_z^0 \xi_0) + \frac{\partial}{\partial x}(Y_x^0 \eta_0) \\ \qquad + \ldots + \dfrac{\partial}{\partial z}(Z_z^0 \zeta_0) \ldots \Big] d\tau. \end{cases}$$

Es bleiben noch weitere neun Glieder übrig, deren Summe wir J_2 nennen wollen:

$$(10)\quad J_2 = -\int \Big[X_x^0 \frac{\partial \xi_0}{\partial x} + X_y^0 \frac{\partial \xi_0}{\partial y} + X_z^0 \frac{\partial \xi_0}{\partial z} + Y_x^0 \frac{\partial \eta_0}{\partial x} + \ldots Z_z^0 \frac{\partial \zeta_0}{\partial z} \Big] d\tau.$$

Auf jedes Glied von (9) wenden wir nun den ersten Greenschen Satz an und erhalten:

$$J_1 = -\int\Big[\Big\{X_x{}^0\cos(nx) + X_y{}^0\cos(ny) + X_z{}^0\cos(nz)\Big\}\xi_0 + \Big\{Y_x{}^0\cos(nx) + Y_y{}^0\cos(ny) + Y_z{}^0\cos(nz)\Big\}\eta_0 + \Big\{Z_x{}^0\cos(nx) + Z_y{}^0\cos(ny) + Z_z{}^0\cos(nz)\Big\}\zeta_0\Big]\,d\sigma.$$

Dieses Integral ist aber gleich 0 infolge der Gleichungen (6); also muß J_2 für sich verschwinden. Benutzt man nun, daß $\frac{\partial \xi_0}{\partial x} = x_x{}^0$ ist, usw., so folgt aus (10):

(11) $$\int\Big[X_x{}^0 x_x{}^0 + Y_y{}^0 y_y{}^0 + Z_z{}^0 z_z{}^0 + Y_z{}^0 y_z{}^0 + Z_x{}^0 z_x{}^0 + X_y{}^0 x_y{}^0\Big]\,d\tau = 0.$$

Hierin drücken wir die Spannungskomponenten durch das elastische Potential aus und erhalten:

(11a) $$\int\Big[\frac{\partial f}{\partial x_x{}^0}x_x{}^0 + \frac{\partial f}{\partial y_y{}^0}y_y{}^0 + \frac{\partial f}{\partial z_z{}^0}z_z{}^0 + \dots \frac{\partial f}{\partial x_y{}^0}x_y{}^0\Big]\,d\tau = 0.$$

Nun ist aber f eine homogene quadratische Funktion der Verzerrungskomponenten; nach dem Eulerschen Theorem ist also der Integrand von (11a) einfach gleich $2f_0$; also folgt aus (11a):

(11b) $$\int f_0\,d\tau = 0.$$

Da aber f_0 nach Gleichung (42) des vorigen Kapitels (pag. 512) aus lauter positiven Gliedern besteht, da λ und μ auch positiv sind, so müssen die Glieder einzeln verschwinden, d. h.

(12) $$x_x{}^0 = y_y{}^0 = z_z{}^0 = y_z{}^0 = z_x{}^0 = x_y{}^0 = 0,$$

oder, wenn wir die Werte für die Verzerrungskomponenten einsetzen:

(13) $$\left\{\begin{aligned} x_x{}^0 &= \frac{\partial \xi_0}{\partial x} = 0; \quad \text{d. h. } \xi_0 \text{ ist nur Funktion von } y \text{ und } z;\\ y_y{}^0 &= \frac{\partial \eta_0}{\partial y} = 0; \quad \text{d. h. } \eta_0 \text{ ist nur Funktion von } z \text{ und } x;\\ z_z{}^0 &= \frac{\partial \zeta_0}{\partial z} = 0; \quad \text{d. h. } \zeta_0 \text{ ist nur Funktion von } x \text{ und } y;\\ y_z{}^0 &= \frac{\partial \eta_0}{\partial z} + \frac{\partial \zeta_0}{\partial y} = 0;\\ z_x{}^0 &= \frac{\partial \zeta_0}{\partial x} + \frac{\partial \xi_0}{\partial z} = 0;\\ x_y{}^0 &= \frac{\partial \xi_0}{\partial y} + \frac{\partial \eta_0}{\partial x} = 0. \end{aligned}\right.$$

Differenziert man jede dieser Gleichungen je einmal nach x, y, z, so erhält man unmittelbar das Resultat, daß die sämtlichen zweiten Differentialquotienten von ξ_0, η_0, ζ_0 nach x, y, z verschwinden, d. h. daß ξ_0, η_0, ζ_0 lineare Funktionen von x, y, z sind. Man hat also:

$$(14)\quad \begin{cases} \xi_0 = \xi_0(0) + \frac{\partial \xi_0}{\partial x}\cdot x + \frac{\partial \xi_0}{\partial y}\cdot y + \frac{\partial \xi_0}{\partial z}\cdot z, \\ \eta_0 = \eta_0(0) + \frac{\partial \eta_0}{\partial x}\cdot x + \frac{\partial \eta_0}{\partial y}\cdot y + \frac{\partial \eta_0}{\partial z}\cdot z, \\ \zeta_0 = \zeta_0(0) + \frac{\partial \zeta_0}{\partial x}\cdot x + \frac{\partial \zeta_0}{\partial y}\cdot y + \frac{\partial \zeta_0}{\partial z}\cdot z. \end{cases}$$

Nach den drei ersten der Gleichungen (13) fallen nun die Glieder $\frac{\partial \xi_0}{\partial x}$, $\frac{\partial \eta_0}{\partial y}$, $\frac{\partial \zeta_0}{\partial z}$ fort; bezeichnen wir ferner für einen Augenblick:

$$(15\text{a})\qquad \frac{\partial \xi_0}{\partial y} \text{ mit } -r, \qquad \frac{\partial \xi_0}{\partial z} \text{ mit } +q, \qquad \frac{\partial \eta_0}{\partial z} \text{ mit } -p,$$

so folgt aus den letzten drei Gleichungen (13), daß:

$$(15\text{b})\qquad \frac{\partial \eta_0}{\partial x} = +r; \qquad \frac{\partial \zeta_0}{\partial x} = -q; \qquad \frac{\partial \zeta_0}{\partial y} = +p.$$

Mit diesen Bezeichnungen wird aus (14):

$$(16)\quad \begin{cases} \xi_0 = \xi_0(0) + 0\,x - r\,y + qz, \\ \eta_0 = \eta_0(0) + rx + 0\,y - pz, \\ \zeta_0 = \zeta_0(0) - qx + py + 0\,z. \end{cases}$$

Dies ist eine lineare infinitesimale Deformation, und zwar eine uneigentliche; denn die Ausdrücke $\xi_0(0)$, $\eta_0(0)$, $\zeta_0(0)$ stellen eine gemeinsame Translation und die übrigen Glieder eine Rotation dar, wobei der Körper sich als starr verhält. Die Größen ξ_0, η_0, ζ_0 sind also keine elastischen Deformationen im engeren Sinne, die wir ja allein ins Auge fassen. Die zweite Lösung ξ'', η'', ζ'' unterscheidet sich also nur dadurch von der ersten ξ', η', ζ', daß der Körper außer der Deformation ξ', η', ζ' auch noch eine Translation und eine Rotation erlitten hat, daß man ihn sich also an einer anderen Stelle des Raumes und anders orientiert denken muß. Das interessiert uns aber nicht. Somit stellen ξ'', η'', ζ'' und ξ', η', ζ' dieselbe elastische Deformation dar, und daher sind die Gleichungen (16) gleichbedeutend mit der Aussage, daß bei gegebenen Massen- und Oberflächenkräften die elastischen Deformationen eindeutig bestimmt sind.

Der hier gelieferte Beweis läßt sich ohne Schwierigkeiten auch für den Fall der beschleunigten Bewegungen ausführen, was hier unterbleiben soll, da die Rechnung ganz analog ist.

118. Allseitiger gleichmäßiger Druck.

Auf einen Körper soll nun zunächst von außen her ein zur Oberfläche normaler, konstanter Druck P einwirken; Massenkräfte sollen nicht vorhanden sein (Fig. 148). Da der Druck normal zur Oberfläche sein soll, so muß, wenn man die innere Normale an einem Punkte derselben mit n bezeichnet, da Druck- und Normalenrichtung zusammenfallen, sein:

$$
(17)\qquad \begin{cases} X_n = P\cos(nx), \\ Y_n = P\cos(ny), \\ Z_n = P\cos(nz). \end{cases}
$$

Diese Werte sind in die Oberflächengleichungen einzusetzen:

$$
(18)\qquad \begin{cases} P\cos(nx) = X_x\cos(nx) + X_y\cos(ny) + X_z\cos(nz), \\ P\cos(ny) = Y_x\cos(nx) + Y_y\cos(ny) + Y_z\cos(nz), \\ P\cos(nz) = Z_x\cos(nx) + Z_y\cos(ny) + Z_z\cos(nz). \end{cases}
$$

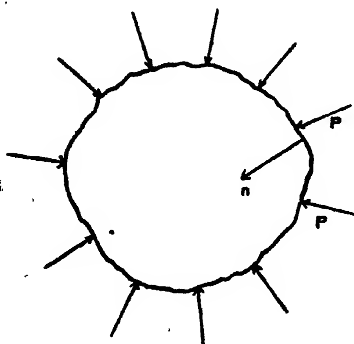


Fig. 148.

Da Massenkräfte fehlen, so gelten in jedem Punkte des Innern die Gleichungen:

$$
(19)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial X_x}{\partial x} + \dfrac{\partial X_y}{\partial y} + \dfrac{\partial X_z}{\partial z} = 0, \\ \dfrac{\partial Y_x}{\partial x} + \dfrac{\partial Y_y}{\partial y} + \dfrac{\partial Y_z}{\partial z} = 0, \\ \dfrac{\partial Z_x}{\partial x} + \dfrac{\partial Z_y}{\partial y} + \dfrac{\partial Z_z}{\partial z} = 0, \end{cases}
$$

die wir kurz als „innere Gleichungen" bezeichnen wollen.

Wir hatten schon früher Gleichungen von der Form (18) ausführlich behandelt. Deshalb ist es wichtig, hier zu bemerken, daß diese jetzt etwas ganz anderes aussagen wie damals. Früher (z. B. in Nr. 108) waren die Richtungen n und die Drucke P gesucht, für die die Gleichungen (18) bestehen konnten. Es ergaben sich drei Werte P und drei Richtungen n.

Hier dagegen ist P vorgeschrieben und ferner sollen alle Richtungen n der Körperoberfläche die Eigenschaft haben, daß Gleichung (18) erfüllt ist. Das ist nur möglich, wenn die Koeffizienten von $\cos(nx)$, $\cos(ny)$, $\cos(nz)$ für sich verschwinden. Also folgt zunächst für die Oberfläche:

$$
(20)\qquad \begin{cases} X_x = P; & X_y = 0; & X_z = 0; \\ Y_x = 0; & Y_y = P; & Y_z = 0; \\ Z_x = 0; & Z_y = 0; & Z_z = P. \end{cases}
$$

Lassen wir die Werte für X_y, Y_z, Z_x zunächst probeweise auch im Innern gelten, so reduzieren sich die inneren Gleichungen auf:

$$
\frac{\partial X_x}{\partial x} = \frac{\partial Y_y}{\partial y} = \frac{\partial Z_z}{\partial z} = 0.
$$

Auch diese sind durch die angenommenen Werte $X_x = Y_y = Z_z = P$ erfüllt, da der Druck P konstant sein soll. Aus (20) folgt also in Verbindung mit (48) des XI. Kapitels auf pag. 512:

$$
(21)\quad \begin{cases} X_x = P = -\lambda\Sigma - 2\mu x_x, \\ Y_y = P = -\lambda\Sigma - 2\mu y_y, \\ Z_z = P = -\lambda\Sigma - 2\mu z_z, \\ Y_z = 0 = -\mu y_z; \quad Z_x = 0 = -\mu z_x; \quad X_y = 0 = -\mu x_y. \end{cases}
$$

Zunächst folgt aus den drei ersten Gleichungen (21) mit Benutzung von (51) des IX. Kapitels (pag. 473):

$$
(22)\quad x_x = y_y = z_z = \frac{\Sigma}{3},
$$

wo Σ die kubische Dilatation bedeutet. Ferner folgt durch Addition derselben Gleichungen:

$$
3P = -(3\lambda + 2\mu)\Sigma,
$$

oder

$$
(23)\quad P = -\frac{3\lambda + 2\mu}{3}\Sigma,
$$

oder endlich

$$
(24)\quad \Sigma = -\frac{3P}{3\lambda + 2\mu}.
$$

Man nennt nun $-\Sigma$ die „kubische Kompression" und den Quotienten $\frac{-\Sigma}{P}$, d. h. die Kompression pro Druckeinheit, die „kubische Kompressibilität". Dafür erhält man aus (24):

$$
(24a)\quad -\frac{\Sigma}{P} = \frac{3}{3\lambda + 2\mu}.
$$

Der reziproke Wert $-\frac{P}{\Sigma} = \frac{3\lambda + 2\mu}{3}$ wird als „Kompressionsmodul" bezeichnet; man benutzt dafür häufig den Buchstaben K.

Da nach (21) keine Schubspannungen vorhanden sind, so ist

$$
(25)\quad \begin{cases} y_z = \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0, \\ z_x = \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z} = 0, \\ x_y = \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0. \end{cases}
$$

Da ferner die ξ, η, ζ lineare Funktionen von x, y, z sein müssen, so ergibt sich mit Berücksichtigung von (22) dafür folgender Ansatz:

$$
(26)\quad \begin{cases} \xi = \frac{\Sigma}{3}\cdot x + \frac{\partial \xi}{\partial y}\cdot y + \frac{\partial \xi}{\partial z}\cdot z + \xi(0), \\ \eta = \frac{\partial \eta}{\partial x}\cdot x + \frac{\Sigma}{3}\cdot y + \frac{\partial \eta}{\partial z}\cdot z + \eta(0), \\ \zeta = \frac{\partial \zeta}{\partial x}\cdot x + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\cdot y + \frac{\Sigma}{3}\cdot z + \zeta(0). \end{cases}
$$

Benutzen wir die Bezeichnungen von Gleichung (15a), so folgt aus (25):

$$
(27) \quad \begin{cases} \xi = \frac{\Sigma}{3} x - r y + q z + \xi(0), \\ \eta = \frac{\Sigma}{3} y + r y - p z + \eta(0), \\ \zeta = \frac{\Sigma}{3} z - q x + p y + \zeta(0). \end{cases}
$$

Darin bedeuten in Übereinstimmung mit der allgemeinen Auseinandersetzung der vorigen Nummer $\xi(0)$, $\eta(0)$, $\zeta(0)$ eine Translation, die mit p, q, r behafteten Glieder eine Rotation, von denen beiden wir absehen können. Also bleibt übrig:

$$
(28) \quad \begin{cases} \xi = \frac{\Sigma}{3} x, \\ \eta = \frac{\Sigma}{3} y, \\ \zeta = \frac{\Sigma}{3} z, \end{cases}
$$

d. h. eine reine Dehnung — die in unserem Falle nach (24) negativ ist — nach drei zueinander senkrechten Richtungen. Da außerdem der Koeffizient der Dehnung in allen Richtungen der nämliche ist, so ist das Deformationsellipsoid sowohl als auch das Spannungsellipsoid hier in eine Kugel ausgeartet.

Was die experimentelle Realisierung eines solchen Vorganges angeht, so sei bemerkt, daß man den betreffenden Körper in ein Gefäß mit Flüssigkeit eintaucht und auf die Flüssigkeit durch einen Stempel einen Druck P ausübt.

Nach den Gesetzen der Hydrostatik, die wir später ausführlich besprechen werden, herrscht dieser Druck dann an allen Punkten und in allen Richtungen der Flüssigkeit, also auch an der Oberfläche des eingetauchten Körpers. Übrigens sind quantitative Versuche sehr schwer, weil derselbe Druck ja auch auf die innere Oberfläche des umhüllenden Gefäßes ausgeübt wird und dieses sich deformiert. Grundsätzlich wäre ja die Deformation berechenbar, doch sind die wirklichen Verhältnisse recht häufig mit den idealen Voraussetzungen der Theorie nicht in Übereinstimmung.

119. Einseitiger Druck.

Die Achse eines geraden Zylinders von der Länge l möge mit der positiven x-Achse zusammenfallen (Fig. 149). Auf die Grundflächen vom Querschnitte q soll eine Kraft vom Betrage K, auf die Flächeneinheit also ein Druck $P = \frac{K}{q}$ wirken. Der Mantel dagegen soll druckfrei sein, ebenso sollen keine Massenkräfte wirken. Zu bestimmen ist die eintretende Deformation.

Die Oberflächengleichungen sind für den Mantel und die Grundflächen getrennt zu behandeln.

a) Für den Mantel sind sie besonders einfach, da er kräftefrei ist, ferner ist wegen der Lage des Zylinders $\cos(nx) = 0$.

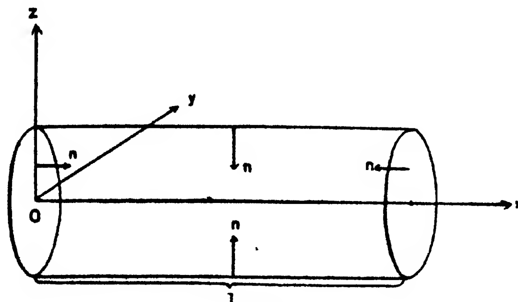


Fig. 149.

Also nehmen die Oberflächengleichungen die einfache Gestalt an:

$$(29) \qquad \begin{cases} 0 = X_y \cos(ny) + X_z \cos(nz)\,, \\ 0 = Y_y \cos(ny) + Y_z \cos(nz)\,, \\ 0 = Z_y \cos(ny) + Z_z \cos(nz)\,. \end{cases}$$

Da diese Gleichungen für alle Richtungen n gelten müssen, so müssen die Koeffizienten der Kosinusse verschwinden. Also:

$$(30) \qquad \begin{cases} Y_y = Z_z = 0\,, \\ X_y = X_z = Y_z = 0\,. \end{cases}$$

Allein X_x bleibt durch (29) noch unbestimmt.

b) Dazu dienen nun die Oberflächengleichungen für die Grundflächen. Für die rechte Grundfläche ist, da die Normalenrichtung n die negative x-Richtung ist:

$$\cos(nx) = \cos\pi = -1\,,$$
$$\cos(ny) = \cos(nz) = 0;$$

daher sind die Kräfte:

$$(31) \qquad \begin{cases} X_n = X_{-x} = -X_x\,, \\ Y_n = -Y_x = 0\,, \\ Z_n = -Z_x = 0\,. \end{cases}$$

Die beiden letzteren sind Null gemäß (30); auf die Grundfläche wirkt der Druck $P = \frac{K}{q}$, und zwar normal, also muß nach den allgemeinen Gleichungen

$$X_n = \frac{K}{q} \cos(nx)$$

sein. Es ist also hier

(32) $$X_x = \frac{K}{q} = P\,.$$

Durch diese Ausdrücke für die Spannungskomponenten werden auch die inneren Gleichungen befriedigt.

Nach Gleichung (48) des XI. Kapitels auf pag. 512 folgt:

(33) $$\left\{\begin{aligned} X_x &= \frac{K}{q} = -\lambda\Sigma - 2\mu x_x\,,\\ Y_y &= 0 = -\lambda\Sigma - 2\mu y_y\,,\\ Z_z &= 0 = -\lambda\Sigma - 2\mu z_z\,,\\ Y_z &= 0 = -\mu y_z\,,\\ Z_x &= 0 = -\mu z_x\,,\\ X_y &= 0 = -\mu x_y\,. \end{aligned}\right.$$

Die drei letzten Gleichungen (33) liefern wieder die Gleichungen (25). Man würde also wieder eine Translation und eine Rotation über die eigentliche elastische Deformation herübergelagert erhalten. Streichen wir diese fort, so bleibt folgendes übrig:

(34) $$\left\{\begin{aligned} \xi &= \text{functio lin.}\,(x) = f_1(x),\\ \eta &= \quad\text{,,}\quad\text{,,}\quad (y) = f_2(y),\\ \zeta &= \quad\text{,,}\quad\text{,,}\quad (z) = f_3(z). \end{aligned}\right.$$

Diese Funktionen müssen nun näher bestimmt werden. Addieren wir zunächst die drei ersten Gleichungen (33), so folgt:

$$P = \frac{K}{q} = -(3\lambda + 2\mu)\Sigma\,.$$

Daraus ergibt sich zunächst der Wert für Σ:

$$\Sigma = -\frac{K}{q}\,\frac{1}{3\lambda + 2\mu}\,,$$

oder unter Einführung des Druckes $\frac{K}{q} = P$:

(35) $$-\Sigma = P\,\frac{1}{3\lambda + 2\mu}\,.$$

Vergleicht man diesen Wert mit dem von (24a) für allseitigen Druck, so erkennt man, daß die Volumkontraktion der Volumeinheit dort dreimal so groß ist, als hier bei einseitigem Druck.

Nachdem wir den Wert von Σ haben, können wir nun auch an die Bestimmung der Funktionen ξ, η, ζ herangehen, denn wir haben die Gleichungen (33):

$$-\lambda\Sigma - P = 2\mu x_x\,,$$

oder unter Einführung des Wertes von Σ aus

$$2\mu x_x = -\frac{2(\lambda+\mu)P}{3\lambda+2\mu}.$$

Daraus folgt für x_x:

$$x_x = \frac{\partial \xi}{\partial x} = -P\frac{(\lambda+\mu)}{\mu(3\lambda+2\mu)} = -\frac{K}{q}\,\frac{\lambda+\mu}{\mu(3\lambda+2\mu)},$$

oder mit Einführung des Elastizitätsmoduls E nach (45) des XI. Kapitels auf pag. 513:

(36) $$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{K}{q}\,\frac{1}{E},$$

die integriert liefert:

(37) $$\xi = -\frac{K}{q}\,\frac{x}{E},$$

da eine Integrationskonstante nicht hinzuzufügen ist.

Wenden wir Gleichung (37) auf Anfangs- und Endquerschnitt des Zylinders an, d. h. auf die Werte $x=0$ und $x=l$, so erhalten wir

$$\xi_0 = 0; \quad \xi_l = -\frac{K}{q}\,\frac{l}{E}.$$

Die Differenz $\xi_l - \xi_0$ ist aber nichts anderes als die (positive oder negative) Verlängerung des Zylinders, die wir mit δl bezeichnen wollen. Da wir die Drucke positiv rechnen, so ist bei uns δl negativ; also erhalten wir:

(38) $$\delta l = -\frac{K}{q}\cdot\frac{l}{E};$$

in Worten: Die Verlängerung δl ist proportional der wirkenden Kraft K und der ursprünglichen Länge l, umgekehrt proportional dem Querschnitt q und dem Elastizitätsmodul E.

Diese Gleichung wird häufig dazu benutzt, E zu bestimmen. Gewöhnlich wendet man allerdings negative Drucke, „Züge", an, indem man an einen Draht ein Gewicht anhängt, unter dessen Einfluß eine Verlängerung eintritt. Die Formel (38) tritt auch gewöhnlich mit positivem Vorzeichen auf, weil im allgemeinen die Züge positiv gerechnet werden. Gleichung (38) ist eine der einfachen Formen des Hookeschen Gesetzes, die sich experimentell leicht darbieten. Die Gültigkeit desselben zeigt sich daraus, daß der Elastizitätsmodulus E eine Konstante sein muß. Beobachtet man eine Variation von E, so heißt das, daß die Grenzen des Hookeschen Gesetzes überschritten sind. Ähnlich erhalten wir aus der zweiten und dritten Gleichung (33) unter Zuhilfenahme von (35):

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = -\frac{\lambda}{2\mu}\Sigma = +\frac{\lambda}{(3\lambda+2\mu)2\mu}\,\frac{K}{q},$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial z} = +\frac{\lambda}{(3\lambda+2\mu)2\mu}\,\frac{K}{q},$$

und daraus durch Integration:

(37 a) $$\eta = \frac{\lambda\frac{K}{q}}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\,y, \qquad \zeta = \frac{\lambda\frac{K}{q}}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\,z.$$

Diese Gleichungen kann man nach Einführung des Elastizitätsmoduls E und der Poissonschen Konstanten σ nach (45) des XI. Kapitels (pag. 513) schreiben:

$$
(39) \qquad \begin{cases} \xi = -\dfrac{K}{q}\dfrac{x}{E}, \\ \eta = +\dfrac{K}{q}\dfrac{y}{E}\sigma, \\ \zeta = +\dfrac{K}{q}\dfrac{z}{E}\sigma. \end{cases}
$$

Daraus geht hervor, daß bei Verkürzung der Längsrichtung durch Druck gegen die Endflächen eine Vergrößerung der Querdimensionen erfolgt, resp. bei Verlängerung der Längsdimension durch Zug eine Kontraktion der Querdimensionen. Die Querkontraktion ist im Verhältnis σ größer als die Verlängerung; daher rechtfertigt sich für σ der Name „Querkontraktionskoeffizient". σ ist stets ein echter Bruch, und zwar zwischen 0 und $^1/_2$ liegend, wie die Erfahrung ergeben hat. Um dies einzusehen, wenden wir (39) auf einen Würfel von 1 cm Kantenlänge an, d. h. wir setzen $x=y=z=1$; sein ursprüngliches Volumen V_0 ist also 1; sein späteres V_1 unter Berücksichtigung des Umstandes, daß ξ, η, ζ infinitesimale Größen sind:

$$V_1=(1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta)=1+\xi+\eta+\zeta.$$

Also ist die durch Druck eintretende Volumänderung der Volumeinheit:

$$(40) \qquad \frac{V_1-V_0}{V_0}=\xi+\eta+\zeta=\frac{K}{qE}\left\{2\sigma-1\right\}.$$

Nun wird nach Ausweis des Experiments bei Druck auf die Endflächen die Volumänderung negativ, jedenfalls nicht größer als 0. Das ist aber nach (40) nur möglich, falls

$$(41) \qquad 0 \leqq \sigma \leqq \tfrac{1}{2}.$$

Weitere Aussagen über σ kann man allgemein nicht machen; σ kann von Körper zu Körper innerhalb der durch (41) vorgezeichneten Grenzen variieren.

Die älteren Molekulartheorien der Elastizität forderten allerdings auf Grund zu enger Ansätze, daß σ für alle Körper gleich, und zwar gleich $^1/_4$ sein müsse. Das Experiment hat dies widerlegt und der modernen Theorie Recht gegeben.

Die Gleichungen (33) und (39) gestatten endlich noch die Bestimmung des Deformations- und des Spannungsellipsoides. Wir beginnen mit dem ersteren. Durch die Deformation (39) geht der Punkt (x, y, z) in den benachbarten Wert

$$(x'=x+\xi, \; y'=y+\eta, \; z'=z+\zeta)$$

über.

Betrachten wir — der allgemeinen Theorie des Deformationsellipsoides entsprechend — die Punkte, die vor der Deformation eine Kugeloberfläche vom Radius R erfüllen, so haben wir:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 .$$

Nach der Deformation können wir x, y, z nach (39) folgendermaßen durch x', y', z' ausdrücken:

$$x = \frac{x'}{1 - \frac{K}{qE}}, \quad y = \frac{y'}{1 + \frac{K\sigma}{qE}}, \quad z = \frac{z'}{1 + \frac{K\sigma}{qE}} .$$

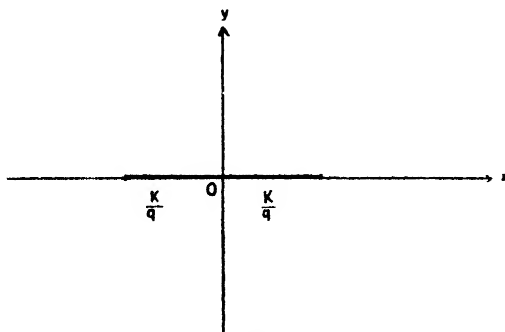


Fig. 150.

Diese Ausdrücke, in die Kugelgleichung eingesetzt, liefern

(42) $$\frac{x'^2}{\left(1 - \frac{K}{qE}\right)^2} + \frac{y_1'^2 + z'^2}{\left(1 + \frac{K\sigma}{qE}\right)^2} = R^2$$

als die Gleichung des Deformationsellipsoides, das hier offenbar ein **Rotationsellipsoid** ist.

Eine Besonderheit bietet das Spannungsellipsoid dar, weil nach (33) von den drei Normaldrucken zwei und alle Tangentialspannungen verschwinden. Setzen wir dies in die Gleichungen (25) des X. Kapitels auf pag. 493 ein, die zur Bestimmung des Spannungsellipsoides führen, so folgt, wenn wir durch (x, y, z) einen Punkt der Oberfläche des Spannungsellipsoides bezeichnen:

(43) $$x = X_x \cos(n\,x) = \frac{K}{q} \cos(n\,x), \quad y = z = 0 .$$

Diese drei Gleichungen (43) stellen nun, da der Kosinus von -1 bis $+1$ variieren kann, eine Strecke auf der x-Achse dar, die von $x = -\frac{K}{q}$ bis $x = +\frac{K}{q}$ reicht (Fig. 150). Diese Strecke stellt hier das Spannungs-

ellipsoid dar. Man erkennt aus (43), daß es unendlich viele Richtungen gibt, in denen der nämliche Druck wirkt, nämlich in allen Richtungen, die mit der x-Achse denselben Winkel bilden. In der zur x-Achse senkrechten Richtung ist der Druck gleich Null.

120. Torsion eines Kreiszylinders.

Wir wollen jetzt eine Art von Deformation betrachten, bei der die Verrückungen nicht mehr lineare Funktionen in x, y, z sind. Wir nehmen einen Zylinder von der Länge l, dessen Querschnitt wir späterhin aus besonderen Gründen kreisförmig annehmen werden, für jetzt

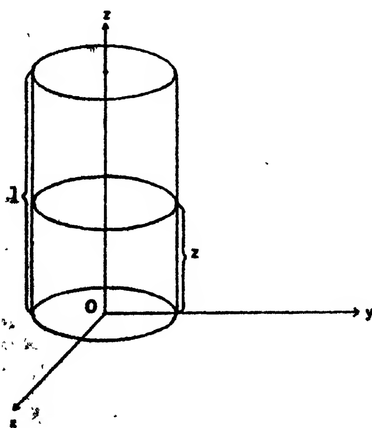


Fig. 151.

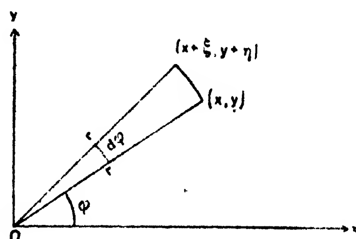


Fig. 152.

aber noch unbestimmt lassen. Gemäß Fig. 151 sei die Achse des Zylinders mit der z-Achse als zusammenfallend angenommen, die Grundfläche liege in der $x\,y$-Ebene. Nun halten wir den unteren Querschnitt fest und drehen den oberen um die z-Achse um den infinitesimalen Winkel ψ. Dabei soll der Abstand r jedes Querschnittpunktes von der Achse ungeändert bleiben.

An dieser Drehung nehmen alle Querschnitte teil, und zwar in einem ihrem Abstande z von der Grundfläche proportionalen Betrage. Außerdem ist die Drehung natürlich proportional dem Winkel ψ, um welchen der obere Endquerschnitt gedreht ist. Nennen wir den Proportionalitätsfaktor k, so ist für $z = l$ nach unserer Voraussetzung:

$$k\,l\,\psi = \psi; \quad \text{also } k = \frac{1}{l}.$$

Für einen beliebigen Querschnitt im Abstande z ist also die Drehung $\delta\varphi$:

$$\delta\varphi = k\,\psi\,z = \frac{z\,\psi}{l}. \tag{44}$$

Eine solche Deformation nennen wir eine „reine Torsion" oder „Drillung".

Wir haben nun die Verrückungskomponenten ξ, η, ζ zu bestimmen; ζ ist offenbar nach den Bedingungen der Aufgabe gleich 0. Zur Bestimmung von ξ, η führen wir Polarkoordinaten (r, φ) in der Ebene des betreffenden Querschnittes ein (Fig. 152).

Vor der Deformation sind die Koordinaten eines Punktes:

$$\text{(45)} \qquad \begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$

Nach der Deformation:

$$\text{(46)} \qquad \begin{cases} x + \xi = r\cos(\varphi + \delta\varphi) = r\cos\left(\varphi + \frac{z\psi}{l}\right), \\ y + \eta = r\sin(\varphi + \delta\varphi) = r\sin\left(\varphi + \frac{z\psi}{l}\right). \end{cases}$$

Die Ausrechnung ergibt:

$$x + \xi = r\cos\varphi\cos\frac{z\psi}{l} - r\sin\varphi\sin\frac{z\psi}{l},$$

$$x + \eta = r\sin\varphi\cos\frac{z\psi}{l} + r\cos\varphi\sin\frac{z\psi}{l},$$

oder unter Beachtung des Umstandes, daß $\frac{z\psi}{l}$ infinitesimal ist, also $\sin\frac{z\psi}{l} \cong \frac{z\psi}{l}$, $\cos\frac{z\psi}{l} \cong 1$ ist:

$$x + \xi = x - y\frac{z\psi}{l}; \qquad y + \eta = y + x\frac{z\psi}{l},$$

oder endlich:

$$\text{(47)} \qquad \begin{cases} \xi = -y\frac{z\psi}{l}, \\ \eta = +x\frac{z\psi}{l}, \\ \zeta = 0. \end{cases}$$

Man erkennt, daß die Deformation (47) nicht linear, sondern quadratisch ist. Dies liegt daran, daß wir hier und in allen ähnlichen Fällen die Betrachtung nicht auf einen „kleinen" Bereich beschränkt haben. Im Zusammenhange damit wird sich herausstellen, daß die Spannungskomponenten linear veränderlich sind, während sie in den bisher behandelten Beispielen konstant waren. Das Problem ist hier überhaupt umgekehrt gestellt, insofern, als hier die Deformationen gegeben sind und die Spannungskomponenten und Kräfte gesucht werden, die sie hervorrufen.

Zunächst bilden wir die Deformationskomponenten $x_x, y_y, z_z, y_z, z_x, x_y$. Nach (47) erhält man für die „Dehnungskomponenten":

$$\text{(48a)} \qquad x_x = y_y = z_z = 0,$$

d. h. die kubische Dilatation ist hier gleich 0. Ebenso ergibt sich für die Komponenten der „Gleitung“:

(48b)
$$\begin{cases} y_z = \dfrac{\partial \eta}{\partial z} + \dfrac{\partial \zeta}{\partial y} = \dfrac{\psi x}{l}, \\ z_x = \dfrac{\partial \zeta}{\partial x} + \dfrac{\partial \xi}{\partial z} = -\dfrac{\psi y}{l}, \\ x_y = \dfrac{\partial \xi}{\partial y} + \dfrac{\partial \eta}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

Dadurch sind nach den Gleichungen (43) des XI. Kapitels auf pag. 512 auch die Spannungskomponenten bestimmt. Wir haben zunächst für die Normaldrucke:

(49a)
$$X_x = Y_y = Z_z = 0,$$

und für die Tangentialspannungen:

(49b)
$$\begin{cases} Y_z = -\mu y_z = -\dfrac{\mu \psi x}{l}, \\ Z_x = -\mu z_x = +\dfrac{\mu \psi y}{l}, \\ X_y \quad\;\; = 0. \end{cases}$$

Die so erhaltenen Werte können wir in die „inneren“ Gleichungen

$$\varepsilon X = \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \text{ usw.}$$

einsetzen.

Da die rechten Seiten nach (49a) und (49b) aber verschwinden, müssen auch die Massenkräfte X, Y, Z gleich 0 werden.

Die Oberflächengleichungen lauten hier, da X_x, Y_y, Z_z, X_y in Fortfall kommen:

(50)
$$\begin{cases} X_n = X_z \cos(nz), \\ Y_n = Y_z \cos(nz), \\ Z_n = Z_x \cos(nx) + Z_y \cos(ny). \end{cases}$$

Wir wollen diese zunächst auf den Mantel des Zylinders anwenden: da dann $\cos(nz) = 0$ wird, weil die Achse parallel der z-Richtung ist, so folgt zunächst:

(51)
$$\begin{cases} X_n = Y_n = 0, \\ Z_n = Z_x \cos(nx) + Z_y \cos(ny). \end{cases}$$

Es ist also im allgemeinen notwendig, um die betrachtete Deformation hervorzurufen, auf dem Mantel Kräfte Z_n anzubringen. Es liegt jedoch die Frage nahe, ob es unter gewissen Umständen (und unter welchen Umständen) möglich ist, daß auch diese letzte Oberflächenkraft auf dem Mantel in Fortfall kommen kann.

Die Bedingung dafür muß sein:

$$Z_x \cos(nx) + Z_y \cos(ny) = 0.$$

oder unter Benutzung der Werte (49b) für die Spannungskomponenten:

$$y \cos(nx) = x \cos(ny),$$

oder:

(52) $$y : x = \cos(ny) : \cos(nx).$$

Nun sind y und x proportional den Richtungskosinussen der Geraden, die den Punkt (x, y) der Zylindermantelfläche mit dem Zentrum des in derselben Ebene liegenden Polarkoordinatensystems verbindet (Fig. 153). Das Verhältnis $y:x$ bestimmt die Richtung der Geraden. Dagegen sind $\cos(nx)$ und $\cos(ny)$ die Kosinusse der Winkel, die die Normale auf dem Mantel im Punkte (x, y) mit der x- und y-Achse bildet.

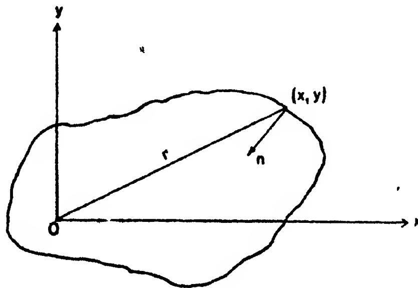


Fig. 153.

Die Bedingung (52) verlangt also, daß Radiusvektor r und Normale n der Berandungskurve des Zylinderquerschnittes zusammenfallen. Das ist aber, wie ein Blick auf die Fig. 153 sofort ergibt, nur möglich für einen kreisförmigen Querschnitt. Diesen wollen wir nun von jetzt ab annehmen, um das Problem so einfach wie möglich zu gestalten, und weil dieser Fall dem Experiment meistens zugrunde liegt. Wir erhalten also für einen Kreiszylinder, dessen Radius R sei:

(51a) $$X_n = Y_n = Z_n = 0$$

für die Mantelkräfte.

Nun bleiben noch die Kräfte auf die obere Endfläche zu untersuchen. Hier ist zu berücksichtigen, daß $\cos(nx) = \cos(ny) = 0$, und da die Normale der z-Richtung entgegengesetzt ist, $\cos(nz) = -1$. Da ferner X_x, Y_y, Z_z, X_y nach (49b) gleich Null sind, so folgt:

(53) $$\begin{cases} X_n = -X_z = -\dfrac{\mu \psi y}{l}, \\ Y_n = -Y_z = +\dfrac{\mu \psi x}{l}, \\ Z_n = 0. \end{cases}$$

Die Oberflächenkräfte auf die Endfläche haben folgende Eigenschaften, die man leicht aus (53) abliest:

1. Die resultierende Kraft pro Flächeneinheit $P_n = \sqrt{X_n^2 + Y_n^2}$ liegt in der Ebene der Endfläche, sie ist also eine Tangentialkraft.

2. Nach (53) besteht die Relation:

$$X_n \cdot x + Y_n \cdot y = 0,$$

d. h. aber, daß die resultierende Kraft P_n senkrecht auf dem Radiusvektor r steht.

3. Daraus folgt, daß auf die obere Fläche ein Drehungsmoment von der Kraft P_n ausgeübt wird, das pro Flächeneinheit die Größe

$$P_n \cdot r = \sqrt{X_n^2 + Y_n^2} \cdot r = \frac{\psi \mu}{l} r^2 \tag{54}$$

hat. Auf das Flächenelement $d\sigma$ wirkt also das Drehmoment $\frac{\mu \psi r^2 d\sigma}{l}$, und das gesamte wirkende Drehmoment D erhalten wir durch eine Integration über die Endfläche. Unter Benutzung von Polarkoordinaten ist

$$d\sigma = r\,dr \cdot d\varphi. \tag{55}$$

Also folgt für das Drehmoment D:

$$D = \int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{\mu \psi}{l} r^3 dr\, d\varphi = \frac{\mu \psi}{l} \frac{\pi}{2} R^4,$$

oder für den Drehungswinkel ψ:

$$\psi = \frac{2}{\pi} \frac{l D}{\mu R^4}. \tag{56}$$

Man nennt in leicht verständlicher Bezeichnung μ den „Torsions-" oder „Schubmodul". Durch Kombination dieser Methode mit einer Methode zur Bestimmung von E kann man den Wert der Poissonschen Konstanten σ erhalten. Derartige Untersuchungen waren früher von großer Wichtigkeit, weil — wie schon erwähnt — die älteren Molekulartheorien zu der Folgerung $\sigma = 1/4$ für alle Körper geführt hatten. Das Experiment hat diese Behauptung nicht bestätigt.

121. Biegung eines Stabes.

Ein Stab von der Länge l, der Breite b und der Höhe h ist an dem einen Ende an einer horizontalen Wand befestigt (Fig. 154), und zwar so, daß die Endfläche unverrückbar festgehalten wird. Den Mittelpunkt O derselben nehmen wir zum Anfangspunkt des in der Figur angedeuteten Koordinatensystems. An dem freien Ende ist ein Hebelarm von der Länge L angebracht, an dessen Enden entgegengesetzt gleiche Kräfte vom Betrage K wirken, die also das Drehmoment KL ausüben. Die übrigen Flächen seien kräftefrei. Das Resultat davon ist, daß die oberen Schichten des Stabes verlängert, die unteren verkürzt werden, während

die Mittelfaser ($z = 0$) ihre ursprüngliche Länge beibehält. Der Endquerschnitt wird also gedreht (Fig. 155). Wir können uns denselben

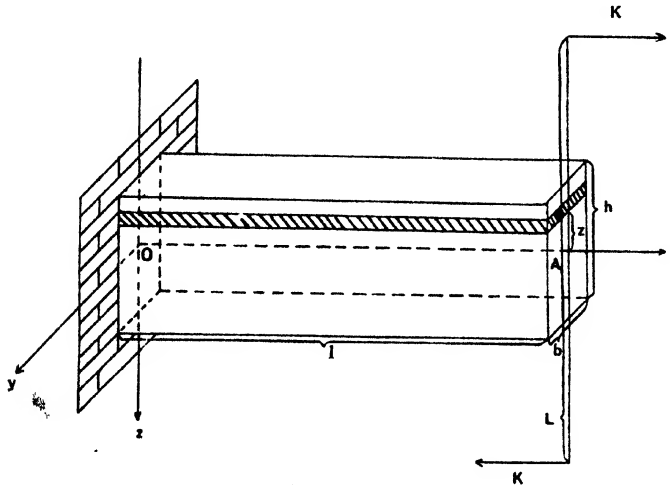


Fig. 154.

Effekt durch geeignet angebrachte Oberflächenkräfte auf die Endflächen hervorgebracht denken.

Dazu benutzen wir die Gleichung (38), die wir auf ein Stabelement vom Querschnitt bdz, das in Fig. 154 schraffiert ist, anwenden. Dieses

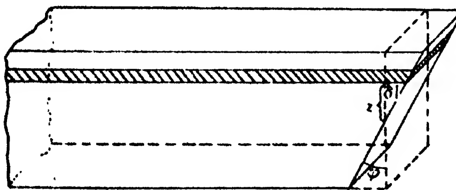


Fig. 155.

Stabelement wird durch den Druck X_x komprimiert; bezeichnen wir die Längenänderung mit δl, so ist nach (38) und (32):

(57) $$\delta l = -\frac{X_x l}{E},$$

oder, wenn wir den Drehungswinkel des Endquerschnittes mit φ bezeichnen, so ist nach Fig. 155:

$$-\delta l = z \cdot \varphi,$$

Also folgt:

(58) $$X_x = \frac{Ez \cdot \varphi}{l}.$$

Alle übrigen Spannungskomponenten sind gleich 0.

Ferner ergibt sich daraus für die Verzerrungskomponente x_x nach Gleichung (44) des XI. Kapitels auf pag. 513:

(59) $$x_x = -\frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} X_x = -\frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \frac{E\varphi z}{l} = -\frac{\varphi z}{l}.$$

Für die übrigen Verzerrungskomponenten hat man nach (43) des XI. Kapitels (pag. 512) die folgenden Gleichungen:

(60) $$\begin{cases} X_x = \frac{Ez}{l}\varphi = -\lambda\Sigma - 2\mu x_x, \\ Y_y = 0 \quad = -\lambda\Sigma - 2\mu y_y, \\ Z_z = 0 \quad = -\lambda\Sigma - 2\mu z_z. \\ Y_z = 0 \quad = \mu y_z, \\ Z_x = 0 \quad = \mu z_x, \\ X_y = 0 \quad = \mu x_y. \end{cases}$$

Durch Addition der drei ersten folgt für Σ:

(61) $$\Sigma = -\frac{E\varphi}{l} z \cdot \frac{1}{3\lambda + 2\mu},$$

und daher, wiederum aus (60):

(62) $$y_y = z_z = \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \frac{E\varphi}{l} z.$$

Mit Einführung der Elastizitätskonstanten E und σ kann man nach (45) des XI. Kapitels auf pag. 513 die Gleichung (62) schreiben:

(62a) $$y_y = z_z = \frac{\sigma\varphi}{l} z.$$

Durch Integration folgt aus (59) und (62a) für ξ, η, ζ:

$$\xi = -\frac{\varphi z x}{l} + f_1(yz),$$

$$\eta = +\frac{\sigma\varphi z y}{l} + f_2(zx),$$

$$\zeta = +\frac{\sigma\varphi z^2}{l} + f_3(xy).$$

Die drei unbestimmt bleibenden Funktionen sind aus den Bedingungen

$$y_z = \frac{\partial\eta}{\partial z} + \frac{\partial\zeta}{\partial y} = 0,$$

$$z_x = \frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial z} = 0,$$

$$x_y = \frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial x} = 0$$

in der bereits bekannten Weise zu bestimmen. Streichen wir die dabei auftretende Translation und Rotation fort, so erhalten wir nach elementaren Rechnungen für die eigentlich elastische Deformation:

$$
(63)\qquad \begin{cases} \xi = -\dfrac{\varphi}{l} z x, \\[2mm] \eta = \dfrac{\sigma\varphi}{l} z y, \\[2mm] \zeta = \dfrac{\varphi}{2l}\left\{x^2 + \sigma(z^2 - y^2)\right\}. \end{cases}
$$

Nun haben wir die Bedingung aufzustellen, daß das wirkende Drehmoment KL durch die wirkende Spannungskomponente X_x kompensiert wird.

Das Moment der Spannung um eine durch den Punkt A gehende der y-Richtung parallele Achse ist:

$$
(64)\qquad \int_0^{\frac{h}{2}} X_x \cdot b\,dz \cdot 2z.
$$

Denn die Kraft ist $X_x \cdot b dz$, da $b dz$ der Querschnitt des betrachteten Balkenelementes ist, und $2z$ die Größe des Hebelarmes. Das gibt die Bedingung:

$$
KL = 2b\int_0^{\frac{h}{2}} X_x z\,dz = \frac{2bE\varphi}{l}\int_0^{\frac{h}{2}} z^2\,dz,
$$

oder:

$$
(65)\qquad KL = \frac{1}{12}\frac{bh^3}{l}\varphi E.
$$

Hier kann man noch, was häufig bequemer ist, den Drehungswinkel φ des Endquerschnittes eliminieren und dafür die Senkung f des Punktes A ausdrücken, der vor der Deformation die Koordinaten $x = l$, $y = z = 0$ hat.

Nach (63) folgt für die Verrückung von A:

$$
(66)\qquad \xi_A = 0, \quad \eta_A = 0, \quad \zeta_A = \frac{\varphi l}{2} = f.
$$

Aus (66) folgt zunächst, daß die neue Lage von A senkrecht unter der alten liegt (natürlich nur bis auf Größen höherer Ordnung). Die Senkung f wird als „Biegungspfeil" bezeichnet. Führt man f ein, so erhält man aus (65):

$$
(65\text{a})\qquad KL = \frac{1}{6}\frac{bh^3}{l^2} f E,
$$

oder für den Elastizitätsmodul:

$$
(67)\qquad E = \frac{6KL \cdot l^2}{bh^3 \cdot f},
$$

die zur direkten experimentellen Bestimmung dieser Größe dienen kann.

Es wird gut sein, an diesem Beispiele zu zeigen, daß auch hier bei Beschränkung auf einen unendlich kleinen Bereich ein Deformations- und Spannungsellipsoid existiert.

Zu diesem Zwecke betrachten wir nur die Punkte (x, y, z) in der Umgebung des Punktes (x_0, y_0, z_0), so daß wir schreiben können:

$$x = x_0 + \alpha, \quad y = y_0 + \beta, \quad z = z_0 + \gamma, \tag{68}$$

wo α, β, γ infinitesimale Größen sind, deren Quadrate in den Deformationsgleichungen vernachlässigt werden dürfen. Dann erhalten wir

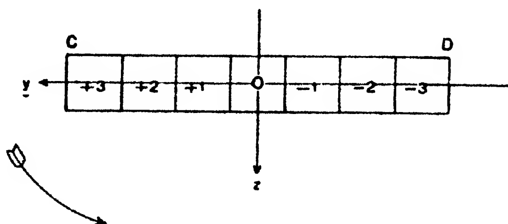


Fig. 156.

aus den Deformationsgleichungen (63), wenn wir die Koordinaten von (x, y, z) nach der Deformation durch x', y', z' bezeichnen:

$$x' = x\left(1 - \frac{\varphi}{l} z\right) = (x_0 + \alpha)\left(1 - \frac{\varphi}{l}(z_0 + \gamma)\right),$$

$$y' = y\left(1 + \frac{\sigma\varphi}{l} z\right) = (y_0 + \beta)\left(1 + \frac{\sigma\varphi}{l}(z_0 + \gamma)\right),$$

$$z' = z_0 + \gamma + \frac{\varphi}{2l}\left\{(x_0 + \alpha)^2 + \sigma[(z_0 + \gamma)^2 - (y_0 + \beta)^2]\right\}.$$

oder, unter Weglassung der infinitesimalen Größen zweiter Ordnung:

$$\left\{\begin{aligned} x' &= \left(1 - \frac{\varphi}{l} z_0\right)\alpha + 0 \cdot \beta - \frac{x_0 \varphi}{l} \cdot \gamma + \left(x_0 - \frac{\varphi x_0 z_0}{l}\right), \\ y' &= 0 \cdot \alpha + \left(1 + \frac{\sigma\varphi}{l} z_0\right)\beta + \frac{\sigma\varphi}{l} y_0 \cdot \gamma + \left(y_0 + \frac{\sigma\varphi}{l} y_0 z_0\right). \\ z' &= \frac{\varphi x_0}{l} \cdot \alpha - \frac{\sigma\varphi y_0}{l} \cdot \beta + \left(1 + \frac{\sigma\varphi}{l} z_0\right) \cdot \gamma \\ &\quad + \left(z_0 + \frac{\varphi}{2l}\sigma x_0^2 + \frac{\varphi}{2l}\sigma z_0^2 - \frac{\varphi}{2l}\sigma y_0^2\right). \end{aligned}\right. \tag{69}$$

Diese Gleichungen sind nun wieder linear in α, β, γ, den neuen Variabeln. Zunächst können wir die konstanten Glieder fortstreichen, da sie nur eine gleichmäßige Translation bedeuten. Dann ergibt weiter ein Blick auf (69), daß das Koeffizientenschema antisymmetrisch um die Diagonale ist. Die nicht der Diagonale angehörenden Glieder stellen also eine Rotation vor, die wir zuerst untersuchen wollen.

Durch Vergleich mit (19) des IX. Kapitels auf pag. 459 folgt für die Rotationskomponenten p, q, r [x, y, z sind hier natürlich durch α, β, γ zu ersetzen]:

$$(70) \qquad p = -\frac{\sigma\varphi y_0}{l}, \quad q = -\frac{\varphi x_0}{l}, \quad r = 0.$$

Diese Rotationskomponenten lehren folgendes:

Betrachten wir eine Reihe von Volumelementen des gebogenen Stabes parallel der yz-Ebene, wie Fig. 156 sie zeigt, und zwar gehöre etwa $\overline{CD}$ der oberen Seitenfläche des Stabes an. Die positive x-Achse

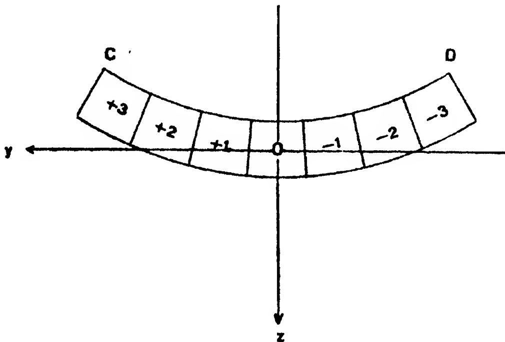


Fig. 157.

weist nach vorne, die Lage der anderen Achsen ist entsprechend Fig. 154 gezeichnet. Jedes der gezeichneten Elemente erfährt eine Rotation um die x-Achse vom Betrage $-\frac{\sigma\varphi_0}{l}y_0$, die also proportional dem Abstande jedes Elementes vom Zentrum ist. Das Volumelement 0 erfährt also gar keine Drehung. Das Volumelement $+1$ ($y_0 = +1$) erfährt eine solche um $-\frac{\sigma\varphi}{l}$. Nun ist eine positive Drehung um die x-Achse eine solche bei der man auf dem kürzesten Wege von der positiven y-Richtung nach der positiven z-Richtung gelangt (Pfeilrichtung in Fig. 156). Da die Drehung aber hier negativ ist, so wird Volumelement $+1$ im umgekehrten Sinne gedreht. In demselben Sinne, jedoch um entsprechend größere Beträge werden die Volumelemente $+2$ und $+3$ gedreht. Ganz analoge Betrachtungen gelten für die Volumelemente -1, -2, -3, so daß man erkennt, daß die oben gezeichnete Reihe von Volumelementen nach der Deformation die Gestalt von Fig. 157 annimmt, die natürlich in starker Übertreibung gezeichnet ist. Ein Schnitt der Staboberfläche mit einer Parallelen zur yz-Ebene gibt also das Bild der Fig. 157: es ist eine nach oben konkave Kurve, deren genauere Natur wir in der nächsten Nummer besprechen werden.

Genau ebenso ergibt sich für die Rotation um die y-Achse folgendes Bild (Fig. 158 und 158a), das wohl ohne Erläuterung verständlich ist. Ein Schnitt der Oberfläche mit einer zur xz-Ebene parallelen Ebene liefert eine nach oben konvexe Kurve.

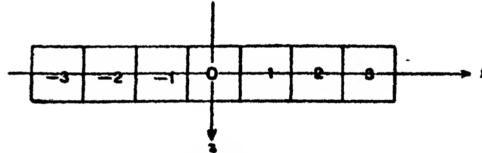


Fig. 158.

Man erkennt daraus, daß die Oberfläche, wie überhaupt jede zu ihr parallele Ebene, nach der Deformation zu einer „Sattelfläche“ gebogen wird.

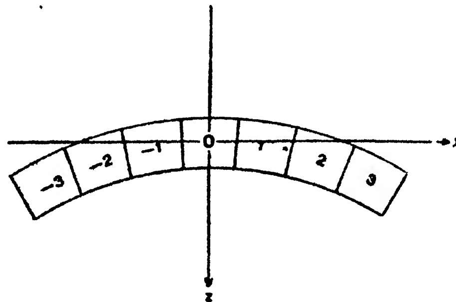


Fig. 158a.

Damit ist die Betrachtung der Rotation erledigt. Nach Absonderung der Drehungs- und Translationskomponenten aus (69) ergibt sich nunmehr folgende „eigentliche“ Deformation:

$$(71)\quad \begin{cases} x' = \left(1 - \frac{\varphi}{l} z_0\right) \alpha, \\ y' = \left(1 + \frac{\sigma \varphi z_0}{l}\right) \beta, \\ z' = \left(1 + \frac{\sigma \varphi z_0}{l}\right) \gamma, \end{cases}$$

die uns eine reine Dehnung nach drei zueinander senkrechten Achsen darstellt, wie ein Vergleich mit Gleichung (25) des IX. Kapitels auf pag. 468 ergibt. Unsere Koordinatenachsen sind übrigens, wie ebenfalls daraus hervorgeht, die Hauptdilatationsachsen. Also folgt nach (40) des IX. Kapitels auf pag. 469 die Gleichung des Deformationsellipsoides:

$$(72)\quad \frac{x'^2}{\left(1 - \frac{\varphi z_0}{l}\right)^2} + \frac{y'^2 + z'^2}{\left(1 + \frac{\sigma \varphi z_0}{l}\right)^2} = \text{Const.}$$

Die durch (72) dargestellte Gleichung ist hier ein Rotationsellipsoid, das aber noch vom Parameter z_0 abhängt. Lassen wir z_0 variieren, so variiert auch die Gleichung des Ellipsoides. Deshalb eben müssen wir uns hier auf kleine Bereiche beschränken. Endlich ergibt ein Blick auf die Gleichung (71), daß die kubische Dilatation den Wert hat:

$$\Sigma = \frac{z_0 \varphi}{l} \left\{ 2\sigma - 1 \right\}. \tag{73}$$

Sie ist gleich 0 für die Mittelfaser $z_0 = 0$ des Stabes, sie ist positiv für negative, negativ für positive Werte von z_0, wie es der Augenschein unmittelbar ergibt.

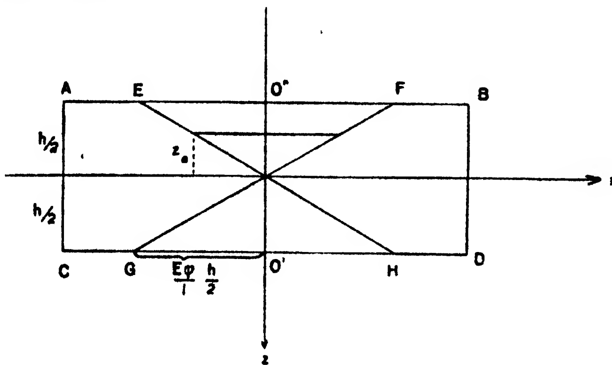


Fig. 159.

Jetzt wollen wir zur Untersuchung des Spannungsellipsoides übergehen.

Da nach (60) alle Tangentialspannungen und zwei Normaldrucke = 0 sind, so haben wir wieder den ausgearteten Fall vor uns, den wir bereits in Nr. 119 behandelt haben. Es ist auch hier die Gleichung des Spannungsellipsoides, gemäß Gleichung (43) und (60), wenn wir hier für einen Augenblick zur Vermeidung von Mißverständnissen die Koordinaten der Oberfläche mit x'', y'', z'' bezeichnen:

$$\left\{ \begin{aligned} x'' &= X_x \cos(n\,x) = \frac{E\,\varphi\,z_0}{l} \cdot \cos(n\,x), \\ y'' &= z'' = 0. \end{aligned} \right. \tag{74}$$

Das ist also eine gerade Linie parallel der x-Achse, deren Länge zu beiden Seiten des Nullpunktes $\frac{E\varphi z_0}{l}$ beträgt. Man erkennt, daß die Länge noch von der Koordinate z_0, d. h. von der Lage im Stabe abhängt. Für $z_0 = 0$, d. h. in der Mittelfaser, ist die Länge $= 0$, um nach beiden Seiten anzuwachsen. Wir erhalten also folgendes Bild (Fig. 159): A, B, C, D sei ein horizontaler Schnitt durch den Balken. Auf $\overline{CD}$ und $\overline{AB}$ tragen wir zu beiden Seiten der Punkte O' resp. O'' die Länge

$\frac{E\varphi}{l}\frac{h}{2}$ ab und verbinden die so erhaltenen vier Punkte E, F, G, H kreuzweise miteinander, wie Fig. 159 zeigt. Für einen beliebigen Wert $z=z_0$ erhalten wir die Größe der für die Spannung charakteristischen Linie, indem wir das Gerade $z=z_0$ ziehen, die FG und EH in zwei Punkten schneidet. Zwischen diesen Schnittpunkten ist die gesuchte Länge abgeschnitten, die für diesen Wert von z_0 das entartete Spannungsellipsoid darstellt.

122. Theorie der Cornuschen Methode zur Bestimmung von σ.

Die Gleichungen der vorhergehenden Nummer erlauben eine interessante Anwendung zur Bestimmung des Querkontraktionskoeffizienten σ, die man Cornu verdankt.

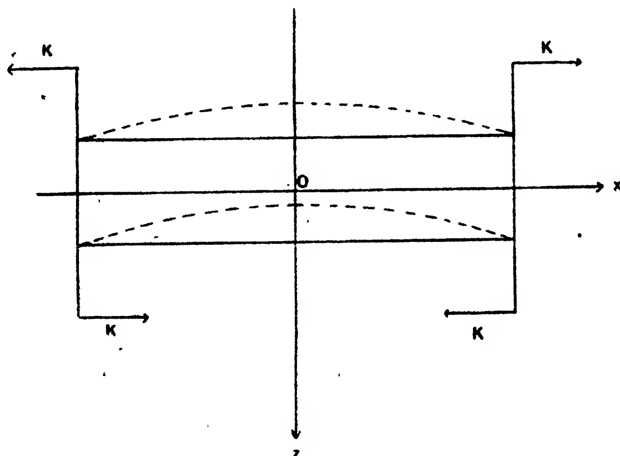


Fig. 160.

Dazu ist zunächst folgende Bemerkung von Wichtigkeit. Denken wir uns die Wand, an welcher der Punkt O des Balkens in Fig. 154 befestigt ist, durch einen Spiegel ersetzt, so erhalten wir folgendes Problem: Ein freier Balken wird durch geeignete Drehmomente an den Endflächen so gebogen, wie es Fig. 160 andeutet.

Im folgenden wollen wir uns auf diesen „vervollständigten" Balken beziehen.

Wir wollen uns fragen, wie die „vervollständigte Oberfläche" des Balkens deformiert wird, eine Frage, die wir qualitativ schon in der vorigen Nummer durch Betrachtung der Deformation gelöst haben. Nach Fig. 154 ist die Gleichung dieser ebenen Fläche vor der Deformation offenbar:

$$z = \frac{h}{2}. \tag{75}$$

Nach der Deformation geht nun z in z' über, was unter Einsetzung des Werts von ζ aus (63) liefert:

(76) $$z' = z + \frac{\varphi}{2l}\left\{x^2 + \sigma(z^2 - y^2)\right\}.$$

Setzt man hier nach (75) $z = \frac{h}{2}$, so erhält man die Gleichung der deformierten Staboberfläche:

$$z' = \frac{h}{2} + \frac{\varphi}{2l}\left\{x^2 + \frac{\sigma h^2}{4} - \sigma y^2\right\},$$

oder:

(77) $$z' = \frac{\varphi}{2l}\left\{x^2 - \sigma y^2\right\} + \frac{\varphi\sigma h^2}{8l} + \frac{h}{2}.$$

Das ist die Gleichung einer Oberfläche zweiter Ordnung, deren speziellen Charakter, soweit er für uns von Interesse ist, wir im folgenden bestimmen wollen.

Dazu wollen wir die Schnittkurven sowohl mit der xz-Ebene, als auch mit der yz-Ebene bestimmen.

Kombinieren wir zunächst die Gleichung der xz Ebene: $y = 0$ mit (77), so folgt:

(78) $$z' = \frac{\varphi}{2l}x^2 + \frac{\varphi h^2\sigma}{8l} + \frac{h}{2};$$

ebenso ergibt sich durch Verbindung mit der Gleichung der yz-Ebene: $x = 0$:

(79) $$z' = -\frac{\varphi\sigma}{2l}y^2 + \frac{\varphi h^2\sigma}{8l} + \frac{h}{2}.$$

Beide Gleichungen stellen genau genommen **Parabeln** dar, die sich jedoch von Kreisbögen kaum unterscheiden. Denn nehmen wir z. B. eine Kreisgleichung in der xz-Ebene: $(x-a)^2 + (z'-b)^2 = R^2$ oder

$$x^2 - 2ax + a^2 + z'^2 - 2bz' + b^2 = R^2,$$

so können wir zunächst, da innerhalb des Balkens z' nur **kleine** Werte annimmt, z'^2 streichen. Ferner muß das Glied mit x fortfallen, um Übereinstimmung der Form mit (76) oder (79) zu erhalten, was nur dadurch möglich ist, daß $a = 0$ genommen wird. Dann folgt:

$$x^2 - 2bz' + b^2 = R^2,$$

oder

(80) $$z' = \frac{x^2}{2b} + \frac{b}{2} - \frac{R^2}{2b}.$$

Diese Gleichung stimmt in der Form mit (78) oder (79) vollkommen überein, und man kann daraus die Größe der Radien und die Lage der Mittelpunkte der durch (78) resp. (79) dargestellten Kreise bestimmen.

Durch Vergleich von (80) zunächst mit (78) folgt:

$$\frac{\varphi}{2l} = \frac{1}{2b_1}, \quad \frac{\varphi h^2\sigma}{8l} + \frac{h}{2} = \frac{b_1}{2} - \frac{R_1^2}{2b_1},$$

woraus für b_1 und R_1 sich ergibt, wenn wir $\frac{\varphi h^2 \sigma}{8l}$ neben $\frac{h}{2}$ vernachlässigen (f ist der auf pag. 535 eingeführte „Biegungspfeil").

(81)
$$\left\{ \begin{aligned} b_1 &= \frac{l}{\varphi} = \frac{l^2}{2f}, \\ R_1{}^2 &= -\frac{l^2 h}{2f} + \frac{l^4}{4f^2}, \end{aligned} \right.$$

in der letzteren Gleichung kann man, da f klein und l groß ist, das erste Glied gegen das letzte streichen und erhält angenähert:

(81a)
$$R_1 = \frac{l^2}{2f}.$$

Ebenso folgt durch Kombination von (80) und (79):

$$\frac{1}{2b_2} = -\frac{\varphi\sigma}{2l}, \quad \frac{\varphi h^2 \sigma}{8l} + \frac{h}{2} = \frac{b_2}{2} - \frac{R_2{}^2}{2b_2},$$

woraus in leichter Rechnung unter den nämlichen Vernachlässigungen wie oben folgt:

(82)
$$\left\{ \begin{aligned} b_2 &= -\frac{l}{\varphi\sigma} = -\frac{l^2}{2f\sigma}, \\ R_2 &= \frac{l^2}{2f\sigma}. \end{aligned} \right.$$

Die Schnittkurve mit der xz-Ebene liefert also einen Kreis, dessen Mittelpunkt auf der positiven Seite der z-Achse im Abstande $\frac{l^2}{2b}$ liegt, der also konvex nach oben ist; dagegen ist der zweite Kreis, nämlich der Schnitt mit der yz-Ebene, da der Mittelpunkt auf der negativen z-Achse im Abstande $\frac{l^2}{2f\sigma}$ liegt, konvex nach unten. Das Verhältnis der Radien $R_1 : R_2$ ist also gleich σ. Die Fläche ist also in der Tat nach der Deformation eine Sattelfläche, wie man experimentell leicht sieht, indem man ein Stück Gummi zwischen den Fingern biegt.

Den Wert von σ kann man nun in eleganter Weise bestimmen, indem man auf die Sattelfläche (77) ein Planglas auflegt und senkrecht von oben mit monochromatischem Licht beleuchtet. Dann entstehen die Newtonschen „Interferenzkurven gleicher Dicke". Bezeichnen wir die Gleichung der Unterfläche des aufgelegten Planglases durch $z'' = \text{Const.}$, so ist die Differenz $(z'' - z')$ nach Gleichung (77) die Dicke D der zwischen beiden Flächen befindlichen Luftschicht; also:

$$z'' - z' = D = \text{Const.} - \frac{\varphi}{2l} x^2 - \frac{\varphi\sigma}{2l} y^2 - \frac{\varphi h^2 \sigma}{8l} - \frac{h}{2}.$$

Bezeichnen wir hier das Aggregat: $\text{Const.} - \frac{\varphi h^2 \sigma}{8l} - \frac{h}{2}$ durch C_1, so ist:

(83)
$$\frac{\varphi}{2l} x^2 - \frac{\varphi\sigma}{2l} y^2 = C_1 - D.$$

Wollen wir nun die Kurven konstanter Dicke erhalten, so haben wir D einen konstanten Wert zu erteilen, etwa D_1. Dadurch wird die rechte Seite konstant, etwa $= B_1$, und dann stellt (83) eine Hyperbel dar.

Läßt man D resp., was auf dasselbe herauskommt, B variieren, so erhält man Scharen von Hyperbeln. Man überzeugt sich leicht, daß man das Bild der Figur 161 erhält.

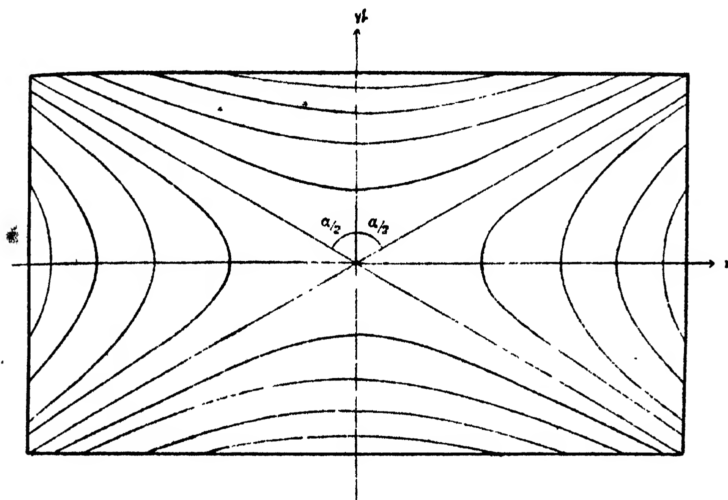


Fig. 161.

Die Asymptoten erhält man, indem man $B_1 = 0$ setzt. Dann folgt aus (83):

$$x^2 = \sigma y^2,$$

oder

(84) $$y = \pm \frac{1}{\sqrt{\sigma}} x.$$

Die Asymptoten bilden also entgegengesetzt gleiche Winkel mit der y-Achse. Bezeichnen wir den absoluten Wert desselben mit $\frac{\alpha}{2}$, d. h. den Asymptotenwinkel mit α, so ist nach (84):

(85) $$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \sigma.$$

Durch Ausmessen des Asymptotenwinkels, z. B. an Photographien des Interferenzbildes, erhält man leicht gute Werte von σ. Die experimentelle Seite der Methode ist neuerdings besonders von Straubel ausgebildet und zur Prüfung zahlreicher Jenenser Glassorten angewendet worden. Dabei konnte gleichzeitig die Isotropie des Materials kontrolliert werden. Auch aus diesen Messungen geht deutlich hervor, daß σ von Körper zu Körper variiert.

123. Deformation eines Stabes durch sein eigenes Gewicht.

In den Nummern 118 und 119 hatten wir linear veränderliche Verrückungen und konstante Spannungen, in den Nummern 120, 121, 122 quadratisch variierende Deformationen und linear veränderliche Spannungen untersucht. In allen Fällen war jedoch noch von Massenkräften abgesehen worden. Nunmehr wollen wir noch ein Beispiel anführen, in dem eine Massenkraft, nämlich die Schwerkraft, wirkt. Ein gerader Zylinder ruhe auf seiner ebenen Grundfläche. Die z-Achse sei vertikal nach unten genommen. Die obere Fläche des Zylinders falle in die xy-Ebene ($z=0$). Wir erhalten das Bild der Fig. 162.

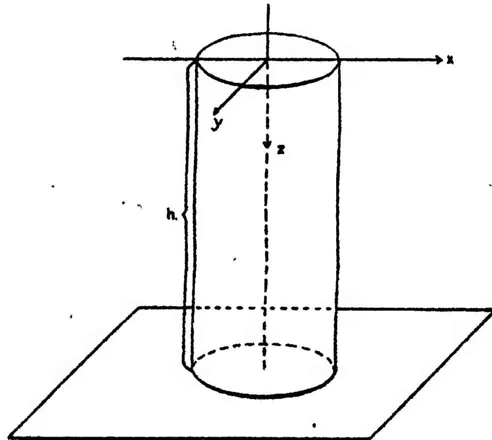


Fig. 162.

Die Höhe des Zylinders sei h. Auf den Zylinder wirke die Schwerkraft; es sind die Komponenten derselben:

$$(86) \qquad \begin{cases} X = Y = 0\,, \\ Z = \varepsilon g\,, \end{cases}$$

wenn ε die Dichte des Zylinders ist.

Was nun die Oberflächenkräfte angeht, so ist für die obere Endfläche, da ihre Normalenrichtung die positive z-Achse ist:

$$(87) \qquad X_z = Y_z = Z_z = 0.$$

Für die untere Grundfläche dagegen ist die positive Normalenrichtung die negative z-Richtung; auf sie wird von der Unterlage eine normale Kraft von der Größe des Zylindergewichtes ausgeübt, das den Wert $\varepsilon gh \cdot F$ hat, wenn F den Flächeninhalt der Grundfläche angibt. Der Druck P auf die Grundfläche ist also εgh.

Da ferner allgemein

$$Z_n = P\cos(nz),$$

so folgt für die Grundfläche:

(88) $$\begin{cases} X_z = Y_z = 0, \\ Z_z = P = \varepsilon g h. \end{cases}$$

Für den Mantel, der kräftefrei ist, folgt aus den allgemeinen Oberflächengleichungen:

$$0 = X_x \cos(nx) + X_y \cos(ny) + X_z \cos(nz),$$
$$0 = Y_x \cos(nx) + Y_y \cos(ny) + Y_z \cos(nz),$$
$$0 = Z_x \cos(nx) + Z_y \cos(ny) + Z_z \cos(nz).$$

Darin sind die Glieder mit $\cos(nz)$ zu streichen, da $\cos(nx)$ für den Mantel $=0$ ist. Also folgt für den Mantel:

(89) $$X_x = X_y = Y_x = Y_y = Z_x = Z_y = 0.$$

Nun sind noch die inneren Gleichungen zu befriedigen, die hier die Gestalt annehmen:

(90) $$\begin{cases} 0 = \dfrac{\partial X_x}{\partial x} + \dfrac{\partial X_y}{\partial y} + \dfrac{\partial X_z}{\partial z}, \\ 0 = \dfrac{\partial Y_x}{\partial x} + \dfrac{\partial Y_y}{\partial y} + \dfrac{\partial Y_z}{\partial z}, \\ Z = \varepsilon g = \dfrac{\partial Z_x}{\partial x} + \dfrac{\partial Z_y}{\partial y} + \dfrac{\partial Z_z}{\partial z}. \end{cases}$$

Die beiden ersteren derselben sind durch (89) identisch befriedigt; für die letzte folgt aus (89):

(90a) $$\varepsilon g = \frac{\partial Z_z}{\partial z},$$

oder:

$$Z_z = \varepsilon g z + f(xy).$$

Dabei ist $f(xy)$ zu bestimmen aus den Werten von Z_z an der oberen oder unteren Endfläche. Nach (87) ist für $z=0: Z_z=0$; daraus folgt in Gleichung (91): $f(xy)=0$.

Man erhält also endgültig:

(91a) $$Z_z = \varepsilon g z.$$

Dann ergeben die Gleichungen (43) des XI. Kapitels auf pag. 512:

(92) $$\begin{cases} X_x = 0 = -\lambda\Sigma - 2\mu x_x, \\ Y_y = 0 = -\lambda\Sigma - 2\mu y_y, \\ Z_z = \varepsilon g z = -\lambda\Sigma - 2\mu z_z, \\ X_y = 0 = -\mu x_y, \\ Y_z = 0 = -\mu y_z, \\ Z_x = 0 = -\mu z_x. \end{cases}$$

Durch Addition der drei ersten folgt zunächst:

$$\varepsilon g z = -(3\lambda + 2\mu)\Sigma,$$

also für die kubische Dilatation:

$$\Sigma = -\frac{\varepsilon g z}{3\lambda + 2\mu}, \tag{93}$$

und durch Einsetzen in (92) folgt für die Dehnungskomponenten:

$$\left\{\begin{aligned} x_x = y_y &= \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}\varepsilon g z, \\ z_z &= -\frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)}\varepsilon g z, \end{aligned}\right. \tag{94}$$

oder, unter Einführung der Elastizitätskonstanten E und σ:

$$\left\{\begin{aligned} x_x = y_y &= \frac{\sigma}{E}\varepsilon g z, \\ z_z &= -\frac{\varepsilon g z}{E}. \end{aligned}\right. \tag{94a}$$

Durch Integration folgt daraus:

$$\left\{\begin{aligned} \xi &= \frac{\sigma}{E}\varepsilon g z x + f_1(y z), \\ \eta &= \frac{\sigma}{E}\varepsilon g z y + f_2(z x), \\ \zeta &= -\frac{\varepsilon g z^2}{2E} + f_3(x y), \end{aligned}\right. \tag{95}$$

wobei die Funktionen f_1 bis f_3 in bekannter Weise aus den drei letzten Gleichungen (92) zu bestimmen sind. Streicht man wieder die hierbei auftretende Rotation und Translation als unwesentlich fort, so folgt schließlich durch elementare Rechnungen:

$$\left\{\begin{aligned} \xi &= \frac{\sigma}{E}\varepsilon g z x, \\ \eta &= \frac{\sigma}{E}\varepsilon g z y, \\ \zeta &= \frac{\varepsilon g}{2E}\{h^2 - z^2 - \sigma(x^2 + y^2)\}. \end{aligned}\right. \tag{96}$$

Durch die Deformation (96) nimmt ein Punkt $(x\,y\,z)$ folgenden Wert $(x'\,y'\,z')$ an:

$$\left\{\begin{aligned} x' &= x + \xi = x\left(1 + \frac{\sigma\varepsilon g z}{E}\right), \\ y' &= y + \eta = y\left(1 + \frac{\sigma\varepsilon g z}{E}\right), \\ z' &= z + \zeta = z + \frac{\varepsilon g}{2E}\left(h^2 - z^2 - \sigma(x^2 + y^2)\right). \end{aligned}\right. \tag{97}$$

Wir können an der Hand dieser Gleichungen die Frage beantworten, wie der vor der Deformation ebene Querschnitt des Zylinders verzerrt

wird. Vor der Deformation haben wir dafür die Gleichungen $z = z_0$; setzt man dies in die dritte der Gleichungen (97) ein, so folgt:

$$z' = z_0 + \frac{\varepsilon g}{2E}\left\{z^2 - z_0^2 - \sigma(x^2 + y^2)\right\},$$

oder:

(98)
$$z' = \text{Const} - \frac{\varepsilon g \sigma}{2E}\left(x^2 + y^2\right),$$

welches die Gleichung eines Rotationsparaboloides ist, mit der negativen z-Achse als Rotationsachse.

Würde man auf eine solche Fläche, ähnlich wie beim Cornuschen Versuche, ein Planglas legen und mit monochromatischem Lichte von oben beleuchten, so würde man als Kurven gleicher Dicke konzentrische Kreise um die z-Achse erhalten.

Greifen wir ferner in einer Ebene $z = z_0$ vor der Deformation einen Kreis heraus: $x^2 + y^2 = R^2$, so geht derselbe nach (97) über in:

(99)
$$x'^2 + y'^2 = R^2\left(1 + \frac{\sigma}{E}\varepsilon g z_0\right)^2,$$

d. h. der Kreis bleibt ein Kreis, aber nunmehr mit einem größeren Radius. Die Vergrößerung des Radius ist um so beträchtlicher, je größer z_0, d. h. je näher der Endfläche wir uns befinden, was ja auch unmittelbar einleuchtet.

Bilden wir endlich die Schnitte der Oberfläche (98) mit der yz- und der xz-Ebene, so erhalten wir die beiden Kurven:

(100)
$$\begin{cases} z' = z_0 + \dfrac{\varepsilon g}{2E}\left(h^2 - z_0^2\right) - \sigma y^2, \\ z' = z_0 + \dfrac{\varepsilon g}{2E}\left(h^2 - z_0^2\right) - \sigma x^2. \end{cases}$$

Beides sind Parabeln, was nach der vorhergehenden Auseinandersetzung selbstverständlich ist. Jedoch können sie angenähert als Kreisbögen aufgefaßt werden, wie ein Blick auf die analoge Gleichung (79) ergibt. Mittelpunkt und Radius sind danach leicht zu bestimmen.

Beschränkt man sich hier wieder auf die Betrachtung eines kleinen Bereiches, so existiert wieder ein Deformationsellipsoid, das von dem bei der Biegung betrachteten keine wesentlichen Abweichungen aufweist. Ein genaueres Eingehen darauf erübrigt sich demgemäß.

Dagegen ist hier ganz interessant das Verhalten des Spannungsellipsoides. Da alle Tangentialspannungen und zwei Normaldrucke verschwinden, artet dasselbe wieder in eine gerade Linie von bestimmter Länge aus; die Größe derselben hängt noch von der Lage im Körper ab. Wenn wir die Koordinaten der Oberfläche des Spannungsellipsoides für einen Augenblick mit x'', y'', z'' bezeichnen, so haben wir nach Gleichung (25) des X. Kapitels auf pag. 498:

(101)
$$x'' = 0, \quad y'' = 0, \quad z'' = Z_z \cos(nz) = \varepsilon g z \cos(nz),$$

Da der Kosinus zwischen -1 und $+1$ schwankt, ist dadurch ein Stück von der Länge $\varepsilon g z$ links und rechts vom Nullpunkte auf der z-Achse abgegrenzt. Man erkennt, daß für $z=h$, d. h. die Grundfläche, diese Linie am größten, für $z=0$, d. h. die obere Endfläche, gleich Null ist. Man erhält daher folgendes Bild (Fig. 163) für die Variation des Spannungsellipsoides im Zylinder: Auf der z-Achse tragen wir links und rechts vom Nullpunkte die Strecke $\varepsilon g h$ auf, wodurch die Punkte A und B bestimmt werden. Im Mittelpunkte errichtet man eine Senkrechte von der Höhe h und verbindet deren Endpunkt C mit den Punkten A und B.

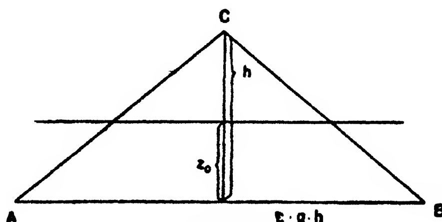


Fig. 163.

Für irgend einen Wert z_0 erhält man die zugehörige Länge der „Spannungslinie", indem man parallel zu AB im Abstande $z=z_0$ die Parallele zieht. Das innerhalb des Dreiecks ABC liegende Stück derselben hat die gewünschte Länge.

124. Experimentelle Ergebnisse.

Den Schluß dieses Kapitels mögen einige quantitative Angaben über die Elastizitätskonstanten E, μ, σ bilden. Die Literatur hierüber ist ungeheuer groß, und wir werden nur die neuesten Untersuchungen berücksichtigen.

Mit sehr subtilen Apparaten hat kürzlich Grüneisen[1]) die Elastizitätsmoduln E und die Torsionsmoduln μ zahlreicher Metalle bestimmt. Seine Werte sind in der folgenden Tabelle angeführt. Dabei bedeuten die in der zweiten Kolumne angeführten Zahlen für E die Werte der Elastizitätsmoduln, wie sie durch die in Nr. 119 auseinandergesetzte Methode einseitigen Zuges an Stäben erhalten werden.

Es wird gut sein, wenn wir uns an Hand der Formel (88) die Dimension von E klar machen. Nach (88) ist (die eckigen Klammern deuten wie üblich die Dimensionen an):

$$[E]=\left[\frac{P}{q}\,\frac{l}{\delta l}\right].$$

Da $\frac{l}{\delta l}$ dimensionslos, $\frac{P}{q}$ die Dimension eines Druckes $=\frac{[\text{Kraft}]}{[\text{Fläche}]}=[ML^{-1}T^{-2}]$ hat, so hat der Elastizitätsmodul E ebenfalls die Dimension

1) Grüneisen, Ann. d. Phys. 22, pag. 801, 1907; 25, pag. 825, 1908.

eines Druckes; im absoluten Maßsystem würde er also in Dynen pro Quadratzentimeter angegeben werden müssen. Da diese Zahlen aber unbequem groß werden, so zieht man es vor, sie in Anlehnung an die in der Technik üblichen Einheiten in „Kilogrammgewicht pro Quadratmillimeter" auszudrücken. Man erhält die in der Tabelle angegebenen Werte von E (und μ, das dieselbe Dimension besitzt), indem man die im absoluten Maße ausgedrückten Werte durch $981 \cdot 10^5$ dividiert.

Der Querkontraktionskoeffizient σ ist dimensionslos.

Material	E in kg/mm²	μ in kg/mm²	σ berechnet	σ beobachtet
Aluminium	7 320	2737	0,337	0,339
Kupfer	12 580	4640	0,356	0,348
Silber	8 050	2940	0,369	0,379
Gold	8 100	2822	0,435	0,420
Nickel	20 540	—	—	—
Kadmium	5 090	—	—	—
Blei	1 650	—	—	—
Zinn	5 540	—	—	—
Platin	17 020	6220	0,368	0,387
Palladium	11 470	5210	0,101	0,393
Rhodium	27 995	—	—	—
Iridium	52 500	—	—	—
Eisen	21 600	—	—	—
Wismut	3 250	—	—	—
Rotguß	8 240	3500	0,177	0,358
Constantan	16 560	6230	0,329	0,325
Manganin	12 600	4740	0,329	0,329

In der dritten Spalte ist der Torsionsmodul μ angegeben, der allerdings von Grüneisen nicht nach der in Nr. 120 auseinandergesetzten statischen Methode, sondern nach einer in Kapitel XV zu besprechenden Schwingungsmethode bestimmt worden ist. Daraus sind die in der vierten Spalte angegebenen Werte des Querkontraktionskoeffizienten σ berechnet. Diese letztere Größe wurde dann auch noch nach einer direkten Methode bestimmt (deren Beschreibung uns hier zu weit führen würde; wir können etwa sagen, um die Ideen zu fixieren, nach der Cornuschen). Diese Werte sind in der fünften Spalte angegeben. Man erkennt, daß von neun Materialien, für die σ beobachtet wurde, sieben mit der Berechnung recht gut übereinstimmende Werte liefern, was als ein Beweis der Richtigkeit der zweiten Gleichung (45) des XI. Kapitels angesehen werden muß. In den beiden Fällen, in denen keine Übereinstimmung herrscht, war das Material, wie eine besondere Prüfung ergab, anisotrop.

Dreizehntes Kapitel.

Gleichgewicht und Bewegung in einem unendlich ausgedehnten Medium.

125. Die Gleichgewichtsgleichungen für die kubische Dilatation und die Rotationskomponenten.

Die elastischen Probleme, sowohl der Bewegung als des Gleichgewichts, werden besonders einfach, wenn man unendlich ausgedehnte Medien voraussetzt. Diese gibt es zwar in Wirklichkeit nicht, doch lassen sich ähnliche Bedingungen durch sehr große Räume, deren Begrenzungsflächen weit von der untersuchten Stelle abliegen, approximieren. Gerade darin beruht es, daß die Probleme einfacher werden: die Oberflächenbedingungen gelangen in Fortfall. Für diesen Fall ist es in der Tat gelungen, wichtige allgemeine Resultate zu erlangen, zu deren Besprechung wir nun übergehen werden.

Zu dem Zwecke gehen wir zunächst auf das Gleichgewicht näher ein, das durch die Gleichungen (48) des XI. Kapitels (pag. 514) beherrscht wird, die wir nochmals, aber mit Benutzung der Vektorsymbolik in eine Gleichung zusammengezogen, anschreiben; Verwechselungen der verschiedenen Indexbezeichnungen sind in diesem Kapitel nicht zu befürchten. Wird die Kraft pro Masseneinheit mit $\mathfrak{K}$ bezeichnet, so haben wir:

(1) $$0 = \varepsilon \mathfrak{K} + \mu \Delta \mathfrak{s} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \Sigma,$$

wo $\Sigma = \operatorname{div} \mathfrak{s}$ ist. Die Kompliziertheit dieser Gleichung besteht darin, daß außer der Verrückung $\mathfrak{s}$ noch $\Sigma = \operatorname{div} \mathfrak{s}$ als unabhängige Variable in ihr auftritt.

Es ist jedoch nicht schwer, daraus einfachere Gleichungen zu erhalten; z. B. für die kubische Dilatation Σ. Zu diesem Zwecke bilden wir in Gleichung (1) die Divergenz und erhalten:

$$0 = \varepsilon \operatorname{div} \mathfrak{K} + \mu \operatorname{div} (\Delta \mathfrak{s}) + (\lambda + \mu) \operatorname{div} \operatorname{grad} \Sigma,$$

oder, da nach Gleichung (57) des IX. Kapitels (pag. 476) $\operatorname{div} \operatorname{grad} \Sigma = \Delta \Sigma$ ist:

(2) $0 = \varepsilon \operatorname{div} \mathfrak{K} + \mu \operatorname{div} \Delta \mathfrak{s} + (\lambda +$ [illegible]

Hier kann man noch im zweiten Gliede die Operationen div und Δ vertauschen, so daß das zweite Glied mit Rücksicht auf die Bedeutung von Σ wird:

(2a) $$\mu \Delta \operatorname{div} \mathfrak{S} = \mu \Delta \Sigma.$$

Setzt man (2a) in (2) ein, so erhält man eine Gleichung, die nur noch Σ als abhängige Variable enthält:

$$\varepsilon \operatorname{div} \mathfrak{K} + (\lambda + 2\mu) \Delta \Sigma = 0,$$

oder:

(3) $$\Delta \Sigma = -\frac{\varepsilon}{\lambda + 2\mu} (\operatorname{div} \mathfrak{K}).$$

Die rechte Seite ist dabei als gegebene Funktion der Koordinaten zu betrachten, da sie ja neben der als bekannt vorausgesetzten Dichte nur eine gewisse Funktion der gegebenen Kraft $\mathfrak{K}$ enthält. Bezeichnen wir die rechte Seite kurz durch den Ausdruck $-4\pi f_0(xyz)$, so hat die Gleichung (3) die Form:

(3a) $$\Delta \Sigma = -4\pi f_0(xyz).$$

Bevor wir näher auf diese Gleichung eingehen, wollen wir noch eine andere Formel mit nur einer abhängigen Variabeln aus der Ausgangsgleichung ableiten.

Bilden wir nämlich in (1) auf beiden Seiten die „Rotation", so folgt sofort:

(4) $$0 = \varepsilon \operatorname{rot} \mathfrak{K} + \mu \operatorname{rot} (\Delta \mathfrak{S}) + (\lambda + \mu) \operatorname{rot} (\operatorname{grad} \Sigma).$$

Hier vertauschen wir wieder im zweiten Gliede die Operationen „rot" und „Δ" und beachten für das dritte Glied, daß nach Gleichung (58) des IX. Kapitels (pag. 477) die Rotation eines Gradienten gleich Null ist; also folgt:

(4a) $$0 = \varepsilon \operatorname{rot} \mathfrak{K} + \mu \Delta (\operatorname{rot} \mathfrak{S}).$$

Nun hängt aber nach Gleichung (49b) des IX. Kapitels auf pag. 474 der Ausdruck rot $\mathfrak{S}$ sehr eng mit dem Rotationswinkel $\mathfrak{d}$ zusammen, dessen Komponenten wir wie früher durch p, q, r bezeichnen. Die betreffende Gleichung lautet nämlich:

(5) $$2\mathfrak{d} = \operatorname{rot} \mathfrak{S}.$$

Führen wir diese Bezeichnungsweise in (4a) ein, so folgt:

(6) $$\Delta \mathfrak{d} = -\frac{\varepsilon}{2\mu} \operatorname{rot} \mathfrak{K},$$

oder in Komponentendarstellung, wenn wir wieder die rechten Seiten, die gegebene Funktionen von x, y, z sind, mit $-4\pi f_1(xyz)$, $-4\pi f_2(xyz)$, $-4\pi f_3(xyz)$ bezeichnen:

(6a) $$\begin{cases} \Delta p = -4\pi f_1, \\ \Delta q = -4\pi f_2, \\ \Delta r = -4\pi f_3. \end{cases}$$

Diese Gleichungen sind also von demselben Typus, wie die Gleichungen (3a) für die kubische Dilatation. Sie sind in der Form identisch mit der Differentialgleichung des Potentials, die wir bereits im zweiten Buche, Nr. 88 auf pag. 440ff., aufgestellt hatten. Dort erhielten wir nämlich, wenn φ das Potential, ε die räumliche Dichte und k die Gravitationskonstante bezeichnet, die als „Poissonsche Differentialgleichung“ bezeichnete Formel:

$$\Delta \varphi = 4\pi k \varepsilon.$$

Auf dieselbe Gleichung werden wir in der Elektrostatik stoßen; bezeichnen wir die Dichte der elektrischen Ladung mit ε, so erhält man als Differentialgleichung des elektrischen Potentials:

(7) $$\Delta \varphi = -4\pi \varepsilon,$$

die wir formal aus der letzten Gleichung erhalten, wenn wir die Gravitationskonstante gleich -1 setzen, was auf eine Änderung des Maßsystems hinausläuft. Wir werden der folgenden Untersuchung die einfache Form der Gleichung (7) zugrunde legen, um keine überflüssigen Faktoren mitzuschleppen. Ihre Integration haben wir im zweiten Buche verschoben; wir müssen das jetzt nachholen.

126. Die Laplacesche Gleichung; partikuläre Integrale derselben.

Bevor wir an die Integration der Gleichungen vom Typus (7) herangehen, wird es gut sein, zunächst einige allgemeine Resultate abzuleiten.

Wir wollen annehmen, es seien zwei Lösungen derselben Gleichung (7) gefunden, die wir φ_1 und φ_2 nennen wollen, so daß folgende Gleichungen identisch erfüllt sind:

(8) $$\begin{cases} \Delta \varphi_1 \equiv -4\pi \varepsilon, \\ \Delta \varphi_2 \equiv -4\pi \varepsilon. \end{cases}$$

Durch Subtraktion folgt daraus:

(9) $$\Delta (\varphi_1 - \varphi_2) \equiv 0.$$

Bezeichnen wir die Differenz der Lösungen φ_1 und φ_2 durch ψ, so gehorcht also die Differenz zweier Lösungen der Poissonschen Gleichung einer neuen Gleichung, die aus (7) hervorgeht, wenn die rechte Seite gleich Null gesetzt wird; also:

(10) $$\Delta \psi \equiv 0.$$

Diese, offenbar ein Spezialfall der Poissonschen, wird bekanntlich als „Laplacesche Gleichung“ bezeichnet [vgl. Nr. 64 (pag. 291) und 88 (pag. 440ff.)]. Daraus ergibt sich nun ein wichtiger Satz. Es ist, nach unserer soeben eingeführten Bezeichnung:

(11) $$\varphi_1 = \varphi_2 + \psi$$

d. h. wenn man zu einem Integral φ_2 der Poissonschen Gleichung ein Integral ψ der Laplaceschen Gleichung zufügt, so ist die Summe der beiden Integrale φ_1 wieder eine Lösung der Poissonschen Gleichung. Diesen Satz kann man dazu benutzen, um aus einfachen speziellen Lösungen φ_2 der Poissonschen Gleichung allgemeinere durch Addition eines oder mehrerer Integrale der Laplaceschen Gleichung zu erhalten.

Die Richtigkeit dieser Überlegung können wir uns an einem einfachen Beispiele leicht klar machen. Es mögen in Gleichung (7) φ und ε nur von einer Koordinate, etwa der x-Koordinate abhängen. Dann vereinfacht sich Gleichung (7) in:

$$(\alpha)\qquad \frac{d^2\varphi_1}{dx^2} = -4\pi\varepsilon(x),$$

die nach einmaliger Integration

$$\frac{d\varphi_1}{dx} = -4\pi\int\varepsilon(x)\,dx + A = F(x) + A,$$

und nach nochmaliger Integration nach x:

$$(\beta)\qquad \varphi_1 = \int F(x)\,dx + Ax + B = G(x) + Ax + B$$

liefert. Die Lösung φ_1 besteht aus zwei Teilen; den letzten derselben $Ax + B$ wollen wir für einen Moment mit ψ bezeichnen; dann sieht man sofort, daß $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$, also ψ der vereinfachten Laplaceschen Gleichung genügt; nennen wir $G(x)$ ebenso φ_2, so ist:

$$(\gamma)\qquad \varphi_2 = -4\pi\int dx\int\varepsilon(x)\,dx,$$

und dies liefert, zweimal differentiiert, den Wert:

$$\frac{d^2\varphi_2}{dx^2} = -4\pi\varepsilon(x),$$

gehorcht also der Poissonschen Gleichung, so daß wir in der Tat φ_1 als Summe eines Integrals der Poissonschen und eines Integrals der Laplaceschen Gleichung dargestellt finden.

Einfache Integrale der Laplaceschen Gleichung sind nun leicht angebbar, z. B. jede lineare Funktion von x, y, z ist offenbar eine Lösung derselben.

Auch quadratische Ausdrücke x, y, z sind zuweilen Lösungen; betrachten wir z. B.:

$$\psi = ax^2 + by^2 + cz^2,$$

so ist

$$\Delta\psi = 2(a + b + c).$$

Ist also

$$a + b + c = 0, \quad \text{z. B.} \quad c = -(a + b),$$

also

$$\psi = ax^2 + by^2 - (a + b)z^2,$$

so ist dieser Wert ψ eine Lösung der Laplaceschen Gleichung, die zur Verallgemeinerung einer Lösung der Poissonschen dienen kann.

Für uns wichtigere Lösungen erhalten wir folgendermaßen: Die Entfernung zweier Punkte (x_0, y_0, z_0), und (x, y, z) sei R, also:

$$R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

Betrachten wir x, y, z als Variabeln, so ist $\psi = \frac{1}{R}$ eine Lösung der Laplaceschen Gleichung; denn man hat:

$$\frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial x} = -\frac{1}{R^2}\frac{\partial R}{\partial x} = -\frac{x}{R^3}; \quad \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial y} = -\frac{y}{R^3}; \quad \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial z} = -\frac{z}{R^3}.$$

Ebenso:

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{R}}{\partial x^2} = -\frac{1}{R^3} + \frac{3x^2}{R^5}; \quad \frac{\partial^2 \frac{1}{R}}{\partial y^2} = -\frac{1}{R^3} + \frac{3y^2}{R^5}; \quad \frac{\partial^2 \frac{1}{R}}{\partial z^2} = -\frac{1}{R^3} + \frac{3z^2}{R^5}.$$

also in der Tat:

(12) $$\Delta\left(\frac{1}{R}\right) = 0.$$

Dies gilt jedoch nur so lange, als R von 0 verschieden ist, d. h. solange der Punkt (x, y, z) nicht in den Punkt (x_0, y_0, z_0) hereinrückt. Namentlich dieses Beispiel wird uns für die allgemeine Integration der Poissonschen Gleichung (7) wertvolle Dienste leisten.

127. Allgemeine Integration der Poissonschen Gleichung.

Nach diesen Vorbemerkungen gehen wir jetzt über zur allgemeinen Integration der Poissonschen Gleichung. Wir gehen zu diesem Zwecke aus von dem Greenschen Satze, Gleichung (13) des XI. Kapitels, den wir nochmals anschreiben:

(13) $$\int (u\,\Delta v - v\,\Delta u)\,d\tau = -\int\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\sigma.$$

Darin bedeuten u und v zwei stetige und eindeutige Funktionen von x, y, z mit ebensolchen ersten und zweiten Differentialquotienten. Wir erwählen nun die Funktionen u und v auf besondere Weise, indem wir setzen:

(14a) $$u = \frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}},$$

wo (x_0, y_0, z_0) ein Punkt im Innern des Integrationsraumes ist, und zwar gerade derjenige, für welchen der Wert von φ bestimmt werden soll; x, y, z ist der variable Aufpunkt. Ferner setzen wir v gleich der gesuchten Lösung φ der Poissonschen Gleichung, so daß also ist:

(14b) $$\Delta v = \Delta\varphi = -4\pi\varepsilon$$ [illegible]

Ist nun diese Bestimmung der Funktionen u und v überhaupt zulässig? $u = \frac{1}{R}$ wird doch an dem Punkte (x_0, y_0, z_0), der innerhalb des Integrationsgebietes liegt, **unendlich groß**, verletzt also die Bedingung der Stetigkeit. In der Tat, hier müssen noch besondere Maßregeln getroffen werden, bevor der Greensche Satz (13) auf diese Funktion angewendet werden darf. Wir schneiden durch eine kleine Kugel vom Radius R_0 um (x_0, y_0, z_0) als Zentrum diesen Punkt aus dem Integrationsraume aus; nur den neu entstandenen Raum, der sowohl von der Fläche σ als von der Kugelfläche k begrenzt wird, betrachten wir als Integrationsgebiet, das wir mit τ^* bezeichnen (Fig. 164).

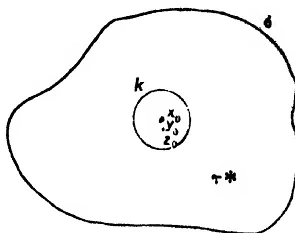


Fig. 164.

Im Raum τ^* ist also auch $\frac{1}{R}$ stets endlich, auf τ^* darf daher die Gleichung (13) mit den Funktionen (14a) und (14b) unbedenklich angewendet werden. Lassen wir nachher die Kugel immer kleiner und kleiner werden, so nähert sich τ^* immer mehr dem Raum τ, über den wir eigentlich integrieren sollen. Zur Oberfläche des Raumes τ^* gehört natürlich auch die Kugelfläche k. So erhalten wir nach (14a) und (14b) aus dem Greenschen Satze (13):

$$(15)\quad \begin{cases} \int \left(\frac{1}{R}\Delta\varphi - \varphi\Delta\left(\frac{1}{R}\right)\right) d\tau^* = -\int\left(\frac{1}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial n}\right)d\sigma \\ \qquad\qquad -\int\left(\frac{1}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial n}\right)dk. \end{cases}$$

An dem ersten Gliede der rechten Seite ist nichts zu ändern; dagegen lassen sich die anderen vereinfachen. Zunächst die linke Seite. Da der Punkt (x_0, y_0, z_0) ausgeschlossen ist, so ist nach (12) $\Delta\frac{1}{R} = 0$, ferner nach (14b) $\Delta\varphi = -4\pi\varepsilon$; also folgt für die linke Seite von (15):

$$(16a)\qquad -4\pi\int\frac{\varepsilon}{R}d\tau^*.$$

Ferner ist für das über die Kugel erstreckte Integral folgendes zu beachten: $\frac{1}{R}$ ist konstant $= \frac{1}{R_0}$, die Normalenrichtung n ist identisch mit der Richtung des Radius R_0. Daraus folgt zunächst:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \frac{\partial\varphi}{\partial R},$$

wobei beide Werte an der Kugeloberfläche zu bilden sind. Ebenso ist

$$\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial n} = \frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial R_0} = -\frac{1}{R^2}.$$

Auch dieser Wert ist für die Oberfläche der Kugel zu bilden, also

$$\frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial u} = -\frac{1}{R_0^2}.$$

Endlich ist, wenn $d\omega$ den räumlichen Winkel bedeutet, unter dem das Kugelflächenelement dk vom Zentrum aus erscheint: $dk = R_0^2\, d\omega$. Setzen wir alles dies ein, so folgt für das Kugelflächenintegral:

$$-\int\left(\frac{1}{R}\frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial n}\right)dk = -\frac{1}{R_0}\int\left(\frac{\partial \varphi}{\partial R}\right)_{R_0} R_0^2\, d\omega - \frac{1}{R_0^2}\int \varphi \cdot R_0^2\, d\omega,$$

oder

$$\text{(16b)}\qquad -\int\left(\frac{1}{R}\frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial n}\right)dk = -R_0\int\left(\frac{\partial \varphi}{\partial R}\right)_{R_0} d\omega - \int \varphi \cdot d\omega.$$

Lassen wir nun die Kugel immer kleiner werden, um von τ^* zu τ zu gelangen, so wird das erste Integral rechts in (16b), da es mit R_0 proportional ist, schließlich verschwinden. Im zweiten Integrale nähert sich φ immer mehr dem Werte $\varphi\,(x_0, y_0, z_0)$, den die Funktion im **Kugelmittelpunkte** annimmt, so daß man schreiben kann:

$$\lim_{R_0=0}\int \varphi\, d\omega = \varphi(x_0, y_0, z_0)\int d\omega = +4\pi\,\varphi(x_0, y_0, z_0).$$

Demnach folgt das Endresultat, wenn wir alles dies in (15) einsetzen:

$$4\pi\int\frac{\varepsilon\, d\tau}{R} = \int\left(\frac{1}{R}\frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial n}\right)d\sigma + 4\pi\,\varphi(x_0, y_0, z_0),$$

oder für den Wert der Funktion φ in **dem beliebigen Punkte** (x_0, y_0, z_0):

$$\text{(17)}\qquad \varphi(x_0, y_0, z_0) = \int\frac{\varepsilon\, d\tau}{R} - \frac{1}{4\pi}\int\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial n}}{R}\, d\sigma + \frac{1}{4\pi}\int \varphi\,\frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial n}\, d\sigma.$$

Diese Gleichung ist, da sie den Wert von φ in jedem beliebigen Punkte im Integrationsgebiet liefert, als das allgemeine Integral der **Poisson**schen Gleichung zu betrachten. Die Bedeutung der einzelnen Integrale in (17) ist leicht verständlich: $\int\frac{\varepsilon\, d\tau}{R}$ stellt das Potential einer im Raume τ mit der Dichtigkeit ε räumlich verteilten Masse dar; ähnlich $\frac{1}{4\pi}\int\frac{\partial \varphi}{\partial n}\frac{1}{R}\, d\sigma$ das Potential von Massen, die mit der Flächendichtigkeit $\eta = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ auf der Oberfläche σ des Raumes angebracht sind, und endlich stellt $\frac{1}{4\pi}\int \varphi\,\frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial n}\, d\sigma$ das Potential einer Doppelschicht vom

Moment $\frac{1}{4\pi}\varphi$ vor, die gleichfalls an der Oberfläche des Raumes sitzt. Die Bedeutung dieser einzelnen Potentiale ist im zweiten Buch, Nr. 87 (pag. 438 ff.), dargelegt worden. Die besondere Schwierigkeit der Probleme besteht nun darin, daß die Werte von φ und $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ an der Oberfläche des Integrationsgebietes im allgemeinen nicht gegeben sind und auch durch allgemeine Methoden nicht gefunden werden können. Wir wollen deshalb versuchsweise einmal die Oberfläche σ ins Unendliche rücken lassen. Wenn dann φ wenigstens abnimmt wie $\frac{1}{R}$, so können, wie man sich leicht überzeugt, beide Oberflächenintegrale fortgelassen werden. Denn dann verhält sich z. B. $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ im Unendlichen wie $\frac{1}{R^2}$, also $\frac{1}{R}\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ wie $\frac{1}{R^3}$. Der Integrand des ersten Oberflächenintegrals nimmt also stärker mit R ab, als die Oberfläche σ, für die wir im Unendlichen eine Kugelfläche nehmen, mit R zunimmt. Ebenso ist es mit dem anderen Oberflächenintegrale. Unter diesen Voraussetzungen, die häufig erfüllt sind, können wir für unendlich ausgedehnte Räume:

$$\varphi(x_0, y_0, z_0) = \int \frac{\varepsilon\, d\tau}{R} \tag{18}$$

als die Lösung der Poissonschen Gleichung betrachten, ein Resultat, das wir für den Spezialfall konstanter Dichte ε schon in Nr. 88, und zwar auf dem umgekehrten Wege, gefunden haben.

Da, wie in Nr. 125 gezeigt wurde, sowohl die kubische Dilatation als auch die Rotationskomponenten p, q, r der Poissonschen Gleichung gehorchen und wir ein unendlich ausgedehntes Medium vorausgesetzt haben, so können durch Gleichung (18) diese vier Größen als bekannt angesehen werden.

Allerdings kommt es nicht gerade auf diese vier Größen an, sondern man will die Verrückung $\mathfrak{s}$ als Funktion des Ortes kennen lernen. Wie man dazu gelangen kann, nachdem man Σ, p, q, r bestimmt hat, werden wir später sehen.

128. Die Wellengleichung für die kubische Dilatation und die Rotation.

Gehen wir nunmehr zu dem Falle der Bewegung über, so haben wir auszugehen von den allgemeinen elastischen Gleichungen [Gleichung (47) des XI. Kapitels], die wir wieder vektoriell zusammenfassen:

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{\partial^2 \mathfrak{s}}{\partial t^2} = \varepsilon \mathfrak{K} + \mu \Delta \mathfrak{s} + (\lambda + \mu)\operatorname{grad} \Sigma, \\ (\Sigma = \operatorname{div} \mathfrak{s}). \end{cases} \tag{19}$$

Von dieser Gleichung ist in bezug auf ihren Bau das nämliche zu sagen, wie von derjenigen (1) des Gleichgewichtes. Man kann daher auch hier auf dieselbe Weise einfachere Formeln für Σ und $\mathfrak{s}$ erhalten, die wir deshalb nur hinzuschreiben brauchen:

$$(20)\qquad \begin{cases} \varepsilon \dfrac{\partial^2 \Sigma}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu)\,\Delta \Sigma + \varepsilon \operatorname{div} \mathfrak{K}, \\ \varepsilon \dfrac{\partial^2 \mathfrak{d}}{\partial t^2} = \mu \cdot \Delta \mathfrak{d} + \dfrac{\varepsilon}{2} \operatorname{rot} \mathfrak{K}. \end{cases}$$

Zerlegt man $\mathfrak{d}$ in seine Komponenten p, q, r, so gilt für diese eine Gleichung von demselben Typus, die unmittelbar hinzuschreiben ist.

Bezeichnen wir durch φ eine der Größen Σ oder $\mathfrak{d}$, so ist die gemeinsame Form der Gleichungen (20):

$$(21)\qquad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \Delta \varphi = f(x\,y\,z\,t).$$

Wir wollen uns im folgenden jedoch nicht mit der Gleichung (21) in ihrer vollen Allgemeinheit, sondern nur mit dem Spezialfalle befassen, daß die rechte Seite gleich Null ist. Das wird nur dann der Fall sein können, wenigstens im allgemeinen, wenn die Kräfte $\mathfrak{K}$ dauernd gleich Null sind. Wie die Bewegung also eingeleitet wird, können wir mit der vereinfachten Gleichung nicht erklären; wir untersuchen vielmehr nur den Verlauf der einmal eingeleiteten Erscheinung. Es sei übrigens bemerkt, daß wir uns mit der allgemeinen Gleichung (21) vor allen Dingen in der Elektrodynamik zu befassen haben werden.

Mit der angegebenen Vereinfachung werden unsere Gleichungen (20):

$$(22)\qquad \begin{cases} \Delta \Sigma = \dfrac{\varepsilon}{\lambda + 2\mu}\dfrac{\partial^2 \Sigma}{\partial t^2}, \\ \Delta \mathfrak{d} = \dfrac{\varepsilon}{\mu}\dfrac{\partial^2 \mathfrak{d}}{\partial t^2}. \end{cases}$$

Man nennt aus bald ersichtlichen Gründen Gleichungen von diesem Typus „Wellengleichungen“. Bevor wir auf die allgemeine Integration der Wellengleichungen eingehen, untersuchen wir zunächst spezielle Fälle davon.

129. Partikuläre Integrale der Wellengleichung.

Wir wollen der Einfachheit halber zuerst annehmen, daß eine der Größen Σ oder $\mathfrak{d}$, die wir wieder mit φ bezeichnen, nur von einer Koordinate, etwa der x-Koordinate, abhänge. Das liefert uns die Gleichung:

$$(23)\qquad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2},$$

mit deren Integration wir uns nun beschäftigen wollen.

Man erkennt leicht, daß jede Funktion des Argumentes $(x \pm ct)$ diese Differentialgleichung befriedigt. Denn sei z. B. $f(x \pm ct)$ eine solche Funktion, so ist, wenn wir Differentiationen nach dem Argument durch Striche bezeichnen:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f'';$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \pm f' \cdot c; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = f'' \cdot c^2.$$

Setzt man diese Werte in die Gleichung (23) ein, so sieht man, daß sie identisch befriedigt wird. Das allgemeine Integral von (23) läßt sich also in der Form schreiben:

(24) $$\varphi = f_1(x - ct) + f_2(x + ct).$$

Es bleibt noch zu untersuchen, welche physikalische Bedeutung den Funktionen f_1 und f_2 zukommt. Wir untersuchen beide gesondert. Zunächst betrachten wir

$$\varphi_1 = f_1(x - ct).$$

Wir wollen darin der Zeit t zunächst den Wert Null erteilen, dann ist $\varphi_{1_{t=0}} = f_1(x)$, d. h. eine beliebige Funktion von x; wir wollen dieselbe graphisch darstellen, indem wir x als Abszisse, φ_1 als Ordinate in einem kartesischen Koordinatensystem auftragen. In Fig. 165 stelle die Kurve

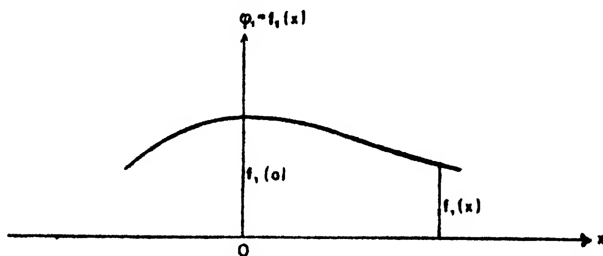


Fig. 165.

den Funktionsverlauf für $t = 0$ dar. Die Frage ist nun: Wie sieht φ_1 aus für andere, von Null verschiedene, Werte der Zeit?

Die Antwort darauf können wir sehr leicht geben. Für $x = 0$ z. B. hat $\varphi_{1_{t=0}}$ den Wert $f_1(0)$, der in der Fig. 165 eingezeichnet ist.

Denselben Wert $f_1(0)$ hat φ_1 immer dann, wenn $x - ct = 0$ ist, d. h. wenn das Argument $x - ct$ nicht durch die speziellen Werte $x = t = 0$ auf den Wert 0 gebracht wird, sondern dadurch, daß x und t der obigen Gleichung genügen. Für alle späteren Zeiten t gibt es also auf der positiven x-Achse je einen Punkt, für den $x = ct$, φ_1 also den nämlichen Wert $f_1(0)$, wie im Anfangspunkte für $t = 0$ hat. Wir können also sagen: Der Wert $f_1(0)$, der zur Zeit $t = 0$ im Anfangspunkte $x = 0$ lag, ist für spätere und immer spätere Zeiten weiter und immer weiter auf der x-Achse fortgerückt. Und zwar braucht $f_1(0)$, um an eine Stelle x zu gelangen, eine Zeit t, die durch die Gleichung bestimmt ist:

$$x = ct, \tag{25}$$

m. a. W.: $\frac{x}{t} = c$ ist die Geschwindigkeit, mit der sich der Funktionswert $f_1(0)$ in der Richtung der positiven x-Achse fortpflanzt.

Was wir für den Funktionswert $f_1(0)$ nachgewiesen haben, gilt für jeden einzelnen Punkt der Kurve $f_1(x)$. Wir wollen z. B. für $t = 0$ den Wert $x = x_0$ ins Auge fassen; für diesen Wert des Arguments hat die Funktion die Größe $f_1(x_0)$. Dieser Wert findet sich zu späteren Zeiten t an solchen Stellen x vor, die der Gleichung gehorchen

$$x - ct = x_0, \quad \text{oder} \quad \frac{x - x_0}{t} = c;$$

d. h. auch dieser Wert pflanzt sich mit der Geschwindigkeit c in der nämlichen Richtung fort.

Wir können nunmehr angeben, wie sich der Vorgang zeitlich abspielt: Zur Zeit $t = 0$ stellt die Kurve in Fig. 165 den Zustand dar; jeder Punkt der Kurve rückt mit wachsendem t mit der nämlichen Geschwindigkeit c nach rechts; d. h. die Kurve verschiebt sich ungeändert und undeformiert mit dieser Geschwindigkeit nach rechts.

Betrachten wir nun $\varphi_2 = f_2(x + ct)$. Hier ist der Verlauf ganz ebenso, nur daß die Geschwindigkeit das negative Vorzeichen hat. Den durch diese Gleichung dargestellten Vorgang erhalten wir also dadurch, daß wir die Kurve der Fig. 165 mit der Geschwindigkeit c nach links verschieben. Im allgemeinen Falle lagern sich diese beiden Prozesse übereinander.

Da der betrachtete Vorgang eine Abweichung vom elastischen Gleichgewichtszustande darstellt, pflegt man ihn, wenn man ihn nur allgemein charakterisieren will, eine elastische „Störung" zu nennen.

Die Gleichungen (22) für Σ und $\mathfrak{d}$ stellen solche Störungen dar, und wir wollen jetzt etwas näher auf den Wert von c eingehen.

In der ersten Gleichung (22) hat die Geschwindigkeit der Störung, wie durch Vergleich mit (23) folgt, offenbar den Wert:

$$c = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\varepsilon}}. \tag{26}$$

Wenn also an irgend einem Punkte des Mediums eine kubische Dilatation erzeugt und dann sich selbst überlassen wird, so schreitet dieselbe mit der obigen Geschwindigkeit fort.

Andere Werte von c ergeben sich dagegen aus der letzten Gleichung (22) für die Rotation $\mathfrak{d}$. Hier folgt aus dem Vergleich mit (23)

$$c = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}, \tag{27}$$

also eine viel kleinere Geschwindigkeit für das Fortschreiten der Störung.

Beide Typen von Störungen sind vollkommen verschieden, wie schon diese Gleichungen erkennen lassen. Die erste derselben nämlich gilt für

die Fortpflanzung einer Dilatation, ohne daß Drehungskomponenten auftreten. Man nennt eine solche Störung eine „rotationsfreie" oder auch „wirbelfreie". Dagegen stellt die andere Gleichung die Fortpflanzung einer „Schiebung" oder „Rotation" dar, wie wir sie z. B. im Falle des tordierten Drahtes in Nr. 120 auf pag. 528ff. kennen gelernt haben. Dabei ist die kubische Dilatation gleich Null, und daher stammt der Name „dilatationsfreie" Störung.

Da beide mit verschiedener Geschwindigkeit fortschreiten, so teilt sich eine Störung, die anfangs aus beiden zusammengesetzt ist, also sowohl mit Dilatation als Rotation verbunden ist, mit der Zeit von selbst in die beiden besprochenen Typen.

Während wir nun bisher für die Funktionen f_1 und f_2 keinerlei einschränkende Annahmen gemacht haben, wollen wir sie jetzt als periodische Funktionen ihrer Argumente wählen. Der Einfachheit halber beschränken wir uns ferner auf die Betrachtung von $f_1(x-ct)$. Wir setzen also etwa

$$\varphi = \cos(x-ct) \text{ oder auch } \varphi = \sin(x-ct);$$

in etwas allgemeinerer Form können wir auch, wenn A und α zwei Konstanten bedeuten, schreiben:

$$\varphi = A \cos\alpha(x-ct). \tag{28}$$

An diese Gleichungen wollen wir unsere weiteren Betrachtungen anknüpfen. $\cos\alpha(x-ct)$ ist eine Funktion, die sowohl in Bezug auf die Zeit t, als auch in Hinsicht auf x periodisch ist, d. h. nach gewissen Abschnitten von t und x kehrt derselbe Funktionswert wieder. Wir wollen zunächst x konstant halten; t soll um einen solchen Betrag T wachsen, daß der Kosinus wieder denselben Wert angenommen hat. Wir haben dann:

$$\cos\alpha(x-ct) = \cos\alpha(x-ct-cT);$$

d. h. der Zuwachs des Arguments αcT muß gleich 2π sein. Also folgt für T:

$$T = \frac{2\pi}{c\alpha}. \tag{29}$$

T nennt man die „Schwingungsdauer" oder „Periode" des Vorganges. Der reziproke Wert $\frac{1}{T} = n$ heißt die „Schwingungszahl".

Nunmehr wollen wir t konstant halten und x um eine solche Größe λ variieren, daß der Kosinus wieder ungeändert bleibt; dann folgt wie vorhin:

$$\alpha\lambda = 2\pi; \quad \lambda = \frac{2\pi}{\alpha}. \tag{30}$$

Man nennt λ die „Wellenlänge" des Vorganges.

Man kann sich den durch Gleichung (28) dargestellten Prozeß sehr leicht anschaulich machen; wir nehmen, wie vorhin im allgemeinen

Falle, zunächst $t=0$ an. Dann wird $\varphi = A \cos \alpha x$. Das ist eine welle förmige Kurve, die in Fig. 166 dargestellt ist.

Für alle anderen Zeiten erhält man den Zustand, wenn man die Kurve mit der Geschwindigkeit c nach rechts verschiebt. Man neni einen solchen Vorgang eine „Wellenbewegung" und daher auch d Differentialgleichung (22), wie schon bemerkt, „Wellengleichung".

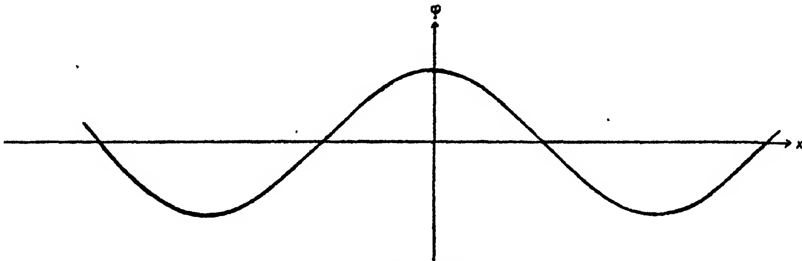


Fig. 166.

Zwischen T und λ besteht eine Beziehung, die wir durch Eliminatioi von α aus (29) und (30) erhalten:

$$c = n\lambda = \frac{\lambda}{T}, \tag{31}$$

die für alle Wellenbewegungen gilt.

Wir können in die Gleichungen (28) die Begriffe T und λ einführe und erhalten dann:

$$\varphi = A \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right). \tag{32}$$

Wenden wir diese speziellen Betrachtungen auf die vorher besprochenen Störungen an, so erkennen wir, daß in unbegrenzten Medien sich sowohl „rotationsfreie Dilatationswellen" als auch „dilatationsfreie Schiebungswellen" fortpflanzen können. Ist die Periode für beide Vorgänge gleich, etwa T, so sind nach (31) ihre Wellenlängen verschieden, und umgekehrt, da sie verschiedene Fortpflanzungsgeschwindigkeit besitzen.

Wir wollen nun zur Zeit $t=0$ eine solche Welle (dilatationsfrei oder rotationsfrei) erzeugen, die sich nach der positiven x-Achse fortpflanzen soll. Dann wird nach bestimmter Zeit t_0 die Welle bis zu einem Werte $x = x_0$ fortgeschritten sein. $x = x_0 =$ Const. stellt eine Ebene parallel der yz-Ebene dar; auf dieser ganzen Fläche herrscht also nach (32) der nämliche Schwingungszustand. Flächen, für die dies der Fall ist, nennt man allgemein „Wellenflächen". Da die Wellenfläche bei unserem Beispiel eine Ebene ist, so nennt man die betrachtete Welle (32) eine „ebene Welle"

Natürlich braucht die Wellenebene nicht parallel einer Koordinatenebene zu sein, wie in unserem speziellen Beispiel. Den allgemeineren Fall werden wir nun behandeln, und zu dem Zwecke von der durch Nullsetzen der rechten Seite spezialisierten Gleichung (21)

$$(21\,a) \qquad \Delta\varphi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$$

ausgehen. Man kann sich leicht überzeugen, daß folgender Ausdruck eine partikuläre Lösung von (21a) ist:

$$(33) \qquad \varphi = A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{R}{\lambda}\right),$$

wo R den Abstand des Punktes, in dem wir den Zustand betrachten, vom Anfangspunkte darstellt. Es ist also, wenn α, β, γ die Winkel bezeichnen, die R mit den Koordinatenachsen bildet:

$$(34) \qquad R = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma.$$

Setzt man dies in (35) ein, so erhält diese Gleichung die Form:

$$(33\,a) \qquad \varphi = A\cos 2\pi\left\{\frac{t}{T} - \frac{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma}{\lambda}\right\}.$$

Um zu erkennen, daß (33a) in der Tat eine Lösung der allgemeinen Differentialgleichung (21a) ist, bilde man die zweiten Differentialquotienten:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi^2}{T^2}\varphi;$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\cos^2\alpha\cdot\varphi,$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\cos^2\beta\cdot\varphi,$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\cos^2\gamma\cdot\varphi.$$

Setzt man diese Werte in (21a) ein, so erhält man folgende Gleichung als Bedingung dafür, daß (33a) ein Integral von (21a) darstellt:

$$\frac{1}{T^2}\frac{1}{c^2} = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \text{oder} \quad c = \frac{\lambda}{T},$$

was aber nichts anderes ist, als die für alle Wellenbewegungen erfüllte Relation (31). Folglich ist (33a) in der Tat eine mögliche Lösung von (21a). Der Ausdruck

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = R$$

ist aber, wie aus den Elementen der analytischen Geometrie bekannt ist, die Gleichung einer Ebene in der sogenannten Hesseschen Normalform. Man erkennt also, daß zu einer gegebenen Zeit für alle Punkte dieser Ebene φ denselben Wert, oder wie man sich ausdrückt, dieselbe „Phase" hat. Die Wellenfläche wird also durch diese Ebene dargestellt.

Wir gehen nunmehr zu einem etwas allgemeineren Falle über, in dem nach allen Richtungen hin die Welle sich vom Zentrum gleichmäßig ausbreitet. Unter Einführung eines räumlichen Polarkoordinatensystems R, χ, ϑ heißt dies offenbar, daß φ nur vom Radius R, nicht aber vom Azimut χ und der Zenitdistanz ϑ abhängig sein soll. In diesem Falle ist es zweckmäßig, den zweiten Differentialparameter $\Delta\varphi$ in Polarkoordinaten auszudrücken, wobei wir gleich die Unabhängigkeit von χ und ϑ berücksichtigen. Wir haben so:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial R}\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial R}\frac{x}{R};$$

also:

$$(35)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial R^2}\frac{x^2}{R^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial \varphi}{\partial R} - \frac{\partial \varphi}{\partial R}\frac{x^2}{R^3}; \quad \text{ebenso:}\\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial R^2}\frac{y^2}{R^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial \varphi}{\partial R} - \frac{\partial \varphi}{\partial R}\frac{y^2}{R^3},\\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial R}\frac{z^2}{R^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial \varphi}{\partial R} - \frac{\partial \varphi}{\partial R}\frac{z^2}{R^3}. \end{aligned}\right.$$

Durch Addition folgt daraus die gewünschte Transformation:

$$(36)\qquad \Delta\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial R^2} + \frac{2}{R}\frac{\partial \varphi}{\partial R},$$

womit die Wellengleichung (21a) übergeht in:

$$(37)\qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial R^2} + \frac{2}{R}\frac{\partial \varphi}{\partial R} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}.$$

Die Integration dieser Gleichung kann man auf die der einfachen Gleichung (23), die wir oben behandelt haben, zurückführen. Denn man kann schreiben:

$$(38)\qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial R^2} + \frac{2}{R}\frac{\partial \varphi}{\partial R} = \frac{1}{R}\frac{\partial^2}{\partial R^2}\left(R\cdot\varphi\right).$$

Damit nimmt (37) die Gestalt an:

$$(39)\qquad \frac{\partial^2}{\partial R^2}\left(R\cdot\varphi\right) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(R\cdot\varphi\right),$$

die vollkommen ihrer Form nach identisch ist mit der bereits behandelten Gleichung (23), wenn wir nur $R\varphi$ statt φ substituieren. Wir erhalten also auch für das Integral im allgemeinen Falle nach (24):

$$R\varphi = f_1(R - ct) + f_2(R + ct),$$

oder für φ selbst:

$$(40)\qquad \varphi = \frac{f_1(R - ct) + f_2(R + ct)}{R}.$$

Beschränken wir uns auf Betrachtung von f_1, das wir gleich wieder als periodische Funktion annehmen wollen, so haben wir etwa:

(41) $$\varphi = \frac{A}{R} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{R}{\lambda}\right),$$

wo

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

ist.

Man erkennt zunächst, daß die Wellenfläche hier eine Kugel ist, um den Anfangspunkt als Zentrum. Ferner ist die Amplitude hier $\frac{A}{R}$. Sie nimmt also mit wachsender Entfernung R ab. Solche Wellen nennt man „Kugelwellen“; sie stellen sich in der Natur von selbst in einem isotropen Medium her, wenn das Zentrum der Störung punktförmig ist.

Nachdem wir uns so in speziellen Fällen mit dem physikalischen Charakter von Lösungen der Wellengleichungen vertraut gemacht haben, gehen wir jetzt zur allgemeinen Integration derselben über, die von Kirchhoff herrührt.

130. Allgemeines Integral der Wellengleichung.

Die Lösungsmethode der Wellengleichung, zu der wir jetzt übergehen, ist eine Verallgemeinerung der in Nr. 127 für die Potentialgleichung behandelten. Auch hier gehen wir vom Greenschen Satze in der Form aus:

(13) $$\int (u\,\Delta v - v\,\Delta u)\,d\tau = -\int \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) d\sigma.$$

Dort wählten wir für u und v Lösungen der Potentialgleichung, nämlich für u den Wert $\frac{1}{R}$, welcher der Gleichung $\Delta\left(\frac{1}{R}\right) = 0$ gehorchte, während v mit der gesuchten Funktion φ identifiziert wurde, deren Differentialgleichung $\Delta\varphi = -4\pi\varepsilon$ war.

Ganz ähnlich gehen wir hier vor: Zunächst identifizieren wir v mit der von uns gesuchten Funktion φ, die hier der Wellengleichung (21a)

$$\Delta\varphi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$$

gehorchen soll. Für u wählen wir ebenfalls eine Lösung dieser Gleichung und nehmen dafür, was wir ja nach Gleichung (40) dürfen, die Funktion

(42) $$u = \frac{f(R + ct)}{R}, \quad \text{wobei } R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \text{ ist;}$$

u wird also im Punkte (x_0, y_0, z_0) unendlich. Um dennoch den Greenschen Satz anwenden zu können, schließen wir wieder diesen Punkt durch eine Kugelfläche k vom Radius R_0 aus und nennen den zwischen k und σ befindlichen Raum τ^*. Dann folgt aus (13), wenn wir für Δu und Δv die Werte nach (21a) einsetzen:

(43) $$\left\{ \begin{aligned} -\int \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) d\sigma - \int \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) dk \\ = \frac{1}{c^2}\int \left(u\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - v\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) d\tau^*. \end{aligned} \right.$$

Darin läßt sich die rechte Seite noch etwas anders schreiben, da

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(u\frac{\partial v}{\partial t} - v\frac{\partial u}{\partial t}\right) = u\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - v\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \text{ ist.}$$

Also ist:

$$(44)\quad \begin{cases} -\int\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\sigma - \int\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)dk \\ \qquad = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int\left(u\frac{\partial v}{\partial t} - v\frac{\partial u}{\partial t}\right)d\tau^*. \end{cases}$$

Hier liegt es nahe, eine Integration nach der Zeit auszuführen, da die rechte Seite einen Differentialquotienten nach t darstellt. Integrieren

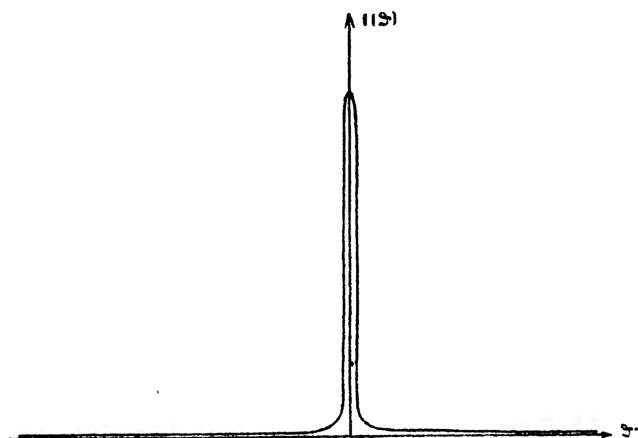


Fig. 167.

wir von einer negativen Zeit $t = -t'$ bis zu einer positiven Zeit $t = t''$, so folgt aus (44):

$$(45)\quad \begin{cases} -\int\limits_{-t'}^{t''} dt\int\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\sigma - \int\limits_{-t'}^{t''} dt\int\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)dk \\ \qquad = \frac{1}{c^2}\left[\int\left\{\frac{\partial v}{\partial t}u - \frac{\partial u}{\partial t}v\right\}d\tau^*\right]_{t=-t'}^{t=t''}. \end{cases}$$

Die Zeiten t'', $-t'$ sowie die Funktion $f(R+ct)$ wählen wir nach **Kirchhoff** nun derartig, daß wir das Integral der rechten Seite bequem ausrechnen können; durch unsere Festsetzungen wird es sogar den Wert 0 annehmen.

Wir setzen, wenn wir der Kürze halber $R+ct$ durch den Buchstaben ϑ bezeichnen:

$$(46)\qquad f(\vartheta) = \frac{\mu}{\sqrt{\pi}}e^{-\mu^2\vartheta^2},$$

wo μ eine sehr große positive Zahl bedeutet. Trägt man sich diese Kurve graphisch auf, so erhält man das Bild der Fig. 167. Man erkennt daraus

folgendes: Die Funktion ist nur dann merklich von 0 verschieden, und zwar positiv, wenn $\vartheta = R + ct$ sehr kleine Werte, wir wollen der Kürze halber sagen, unendlich kleine Werte annimmt; für alle endlichen negativen und positiven ϑ ist $f(\vartheta)$ merklich $= 0$. Diese Eigenschaften treten um so mehr hervor, je größer der Faktor μ genommen wird. Man erkennt ferner leicht, daß der Inhalt der Fläche, die zwischen der Kurve $f(\vartheta)$ und der Abszissenachse liegt, endlich ist, d. h. das zwischen endlichen oder auch zwischen unendlichen Grenzen genommene Integral $\int_a^b f(\vartheta)\,d\vartheta$ ist endlich. Ferner hat $f(\vartheta)$ die Eigenschaften der Eindeutigkeit und Stetigkeit und ebenso verhält sich seine erste Ableitung nach ϑ. Damit sind die Bedingungen für die Anwendbarkeit des Greenschen Satzes erfüllt.

Wir wollen zunächst das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\vartheta)\,d\vartheta = \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mu^2\vartheta^2}\,d\vartheta$$

bestimmen. Zu diesem Zwecke führen wir zunächst eine neue Variable $l = \mu\vartheta$ ein, so daß das zu untersuchende Integral, dessen Wert wir vorläufig durch J bezeichnen wollen, die Gestalt annimmt

(a) $$J = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-l^2}\,dl.$$

Betrachten wir nun das diesem gleiche Integral:

(b) $$J = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-m^2}\,dm,$$

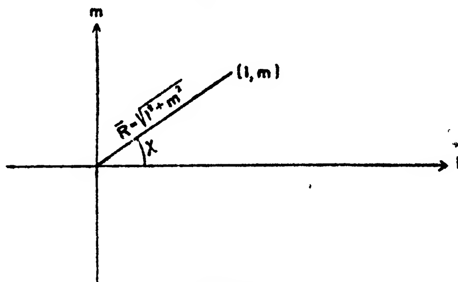


Fig. 168.

das sich nur durch die andere Bezeichnung der Integrationsvariabeln von ihm unterscheidet. Durch Multiplikation der beiden folgt:

(c) $$J^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(l^2+m^2)}\,dl\,dm.$$

Dieses neu hergestellte Integral läßt sich nun leicht auswerten. Denn wenn man l und m als Cartesische Koordinaten in der Ebene deutet, so stellt $l^2 + m^2$ das Quadrat des Radiusvektors R nach dem Punkte (l, m) dar (Fig. 168).

Ferner ist $dl\,dm$ der Wert des Flächenelementes. Führen wir nun Polarkoordinaten R, χ ein, so ist bekanntlich:

$$\text{(d)}\qquad \begin{cases} l^2 + m^2 + \bar{R}^2; & 0 \leqq \bar{R} \leqq \infty, \\ dl\,dm = \bar{R}\,d\bar{R}\,d\chi; & 0 \leqq \chi \leqq 2\pi. \end{cases}$$

Mit diesen Werten wird das Integral (c):

$$J^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^{2\pi} e^{-\bar{R}^2}\,\bar{R}\,d\bar{R}\,d\chi,$$

in welchem sich die Integration nach χ sofort ausführen läßt. Man erhält:

$$\text{(e)}\qquad J^2 = 2\int_0^\infty e^{-\bar{R}^2}\,\bar{R}\,d\bar{R} = -\int_0^\infty e^{-\bar{R}^2}\,d(-\bar{R}^2),$$

und durch Ausführen der letzten Quadratur folgt endlich:

$$J^2 = -\left[e^{-\bar{R}^2}\right]_0^\infty = +1, \quad \text{oder}$$

$$\text{(f)}\qquad J = \frac{\mu}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mu^2\vartheta^2}\,d\vartheta = +1.$$

Das Integral (f) behält seinen Wert 1 merklich, wenn auch die Grenzen nur endlich genommen werden, und zwar wegen des rapiden Abfalls der Funktion $f(\vartheta)$ für endliche Werte von ϑ.

Damit hängt folgende Eigenschaft zusammen: Betrachten wir das Integral

$$\int_a^b f(\vartheta)\,g(\vartheta)\,d\vartheta,$$

wo a und b endliche Werte der Variablen ϑ bedeuten, so liefert zu diesem Integral wegen der Eigenschaften der Funktion $f(\vartheta)$ nur der Wert $\vartheta = 0$ einen merklichen Beitrag. Man kann deshalb $g(0)$ vor das Integralzeichen nehmen und erhält mit Rücksicht auf (f):

$$\text{(g)}\qquad \int_a^b f(\vartheta)\,g(\vartheta)\,d\vartheta = g(0)\int_a^b f(\vartheta)\,d\vartheta = g(0).$$

Schreiben wir nun den Wert des ursprünglich zu berechnenden Integrals auf der rechten Seite von (45) ausführlich, d. h. unter Einsetzung der oberen und unteren Grenze t'' und $-t'$:

$$\frac{1}{c^2}\int\left\{\frac{f(R+ct'')}{R}\frac{\partial v}{\partial t} - v\frac{\partial}{\partial t}\frac{f(R+ct'')}{R}\right\}d\tau^*$$
$$-\frac{1}{c^2}\int\left\{\frac{f(R-ct')}{R}\frac{\partial v}{\partial t} - v\frac{\partial}{\partial t}\frac{f(R-ct')}{R}\right\}d\tau^*,$$

so liegt es nach den Eigenschaften der Funktion $f(\vartheta)$ nahe, die Werte t'' und $-t'$ so zu wählen, daß $R+ct''$ stets endlich positiv, $R-ct'$

stets endlich negativ für alle vorkommenden Werte R ist. Dann ist $f(R+ct'')$ sowohl wie $f(R-ct')$ und ihre zeitliche Ableitung stets gleich 0. Also verschwindet das ganze Integral und es folgt aus (45):

$$(47)\qquad -\int_{-t'}^{t''} dt \int \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) d\sigma - \int_{-t'}^{t''} dt \int \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) dk = 0.$$

Das Integral über die Kugelfläche läßt sich berechnen. Zunächst sind alle Differentialquotienten nach n zu ersetzen durch solche nach R, also hat man, wenn man jetzt für u und v die Werte einsetzt:

$$\int \left\{\frac{f(R+ct)}{R}\frac{\partial \varphi}{\partial R} - \varphi\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{f(R+ct)}{R}\right)\right\}_{R=R_0} dk$$

oder, da $dk = R_0^2 d\omega$, wenn $d\omega$ den räumlichen Winkel bedeutet, unter dem dk vom Zentrum aus erscheint:

$$\frac{f(R_0+ct)}{R_0} R_0^2 \int \left(\frac{\partial \varphi}{\partial R}\right)_{R_0} d\omega - \frac{f'(R_0+ct)}{R_0} R_0^2 \int \varphi \cdot d\omega + \frac{f(R_0+ct)}{R_0^2} R_0^2 \int \varphi \cdot d\omega.$$

Mit abnehmendem R_0 verschwinden die beiden ersten Glieder, während das letzte den Wert $4\pi f(ct) \cdot \varphi(x_0, y_0, z_0, t)$ annimmt. Also erhält man nach (47):

$$(48)\qquad 4\pi \int_{-t'}^{t''} f(ct)\varphi(x_0, y_0, z_0, t)\, dt = \int_{-t'}^{t''} dt \int \left\{\frac{f(R+ct)}{R}\frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{f(R+ct)}{R}\right)\right\} d\sigma.$$

Das Integral

$$\int_{-t'}^{t''} f(ct)\varphi(x_0, y_0, z_0, t)\, dt$$

liefert aber nach (f) und (g) den Wert:

$$\frac{1}{c}\left\{\varphi(x_0, y_0, z_0)\right\}_{t=0}.$$

Also folgt schließlich das Resultat, wenn man rechts die Reihenfolge der Integrationen vertauscht:

$$(49)\qquad \frac{4\pi}{c}\left\{\varphi(x_0, y_0, z_0)\right\}_{t=0} = \int d\sigma \int_{-t'}^{t''} \left\{\frac{f(R+ct)}{R}\frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial}{\partial n}\frac{f(R+ct)}{R}\right\} dt.$$

Hier sind nun die Integrationen nach der Zeit ausführbar, wenn man die Eigenschaft von $f(R+ct)$ berücksichtigt, nur für unendlich kleine Werte des Argumentes $R+ct$, d. h. wenn $R+ct=0$ ist, von Null verschieden zu sein. Zu den Integralen der rechten Seite liefert also nur der Wert $R+ct=0$, oder $t=-\frac{R}{c}$ einen Beitrag. Berücksichtigt man dies, so wird das erste Integral nach (f) und (g):

$$(50)\qquad \int_{-t'}^{t''} \frac{f(R+ct)}{R}\,\frac{\partial \varphi}{\partial n}\,dt = \frac{1}{c}\,\frac{1}{R}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_{t=-\frac{R}{c}}.$$

Ferner ist

$$\int_{-t'}^{t''} \varphi\,\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{f(R+ct)}{R}\right) dt = \int_{-t'}^{t''} \varphi\,\frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial n}\,f(R+ct)\,dt + \int_{-t'}^{t''} \varphi\,\frac{f'(R+ct)}{R}\,\frac{\partial R}{\partial n}\,dt,$$

oder da

$$f'(R+ct) = \frac{1}{c}\,\frac{\partial f(R+ct)}{\partial t}$$

ist:

$$\int_{-t'}^{t''} \varphi\,\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{f(R+ct)}{R}\right) dt = \frac{1}{c}\,\frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial n}\,\varphi_{\left(t=-\frac{R}{c}\right)} + \frac{1}{c}\,\frac{1}{R}\,\frac{\partial R}{\partial n}\int_{-t'}^{t''} \varphi\,\frac{\partial f(R+ct)}{\partial t}\,dt,$$

was nach Umformung des letzten Gliedes durch partielle Integration liefert:

$$(51)\qquad \int_{-t'}^{t''} \varphi\,\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{f(R+ct)}{R}\right) dt = \frac{1}{c}\,\frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial n}\,\varphi_{\left(t=-\frac{R}{c}\right)} - \frac{1}{c^2}\,\frac{1}{R}\,\frac{\partial R}{\partial n}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{t=-\frac{R}{c}}.$$

Nach (50) und (51) folgt also aus (49):

$$(52)\qquad \left\{\begin{aligned} \varphi(x_0, y_0, z_0)_{t=0} = \frac{1}{4\pi}\int d\sigma \Bigg\{ & \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial n}(\varphi)_{t=-\frac{R}{c}} - \frac{1}{c}\,\frac{1}{R}\,\frac{\partial R}{\partial n}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{t=-\frac{R}{c}} \\ & - \frac{1}{R}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_{t=-\frac{R}{c}}\Bigg\}. \end{aligned}\right.$$

Da nun der Anfangspunkt der Zeit beliebig ist, so können wir ihn um den Betrag t zurückdatieren, d. h. unserem bisherigen Zeitnullpunkte den Wert t beilegen. Dann erhalten wir aus (52) die Kirchhoffsche Formel:

$$(53)\qquad \left\{\begin{aligned} \varphi(x_0, y_0, z_0, t) = \frac{1}{4\pi}\int d\sigma \Bigg\{ & \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial n}(\varphi)_{t-\frac{R}{c}} - \frac{1}{cR}\,\frac{\partial R}{\partial n}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{t-\frac{R}{c}} \\ & - \frac{1}{R}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_{t-\frac{R}{c}}\Bigg\}, \end{aligned}\right.$$

wo in dem Integral rechts in den Funktionen φ, $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ statt t der Wert $\left(t - \frac{R}{c}\right)$, der um die Zeit $\frac{R}{c}$ zurückliegt, zu substituieren ist. Bezeichnen wir diese Werte durch hinzugefügte eckige Klammern [ ], so können wir (53) schreiben:

(53a) $$\varphi(x_0, y_0, z_0, t) = \frac{1}{4\pi}\int d\sigma \left\{ \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial n}[\varphi] - \frac{1}{cR}\frac{\partial R}{\partial n}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right] - \frac{1}{R}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right]\right\}.$$

Würden wir an Stelle der Wellengleichung (21a) die allgemeinere inhomogene Gleichung (21)

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi\,\varepsilon(x_0, y_0, z_0, t)$$

betrachtet haben, so würde eine analoge Rechnung für das Integral derselben an Stelle von (53) die Gestalt ergeben haben:

(54) $$\varphi(x_0, y_0, z_0, t) = \int \frac{[\varepsilon]}{R}\,d\tau + \frac{1}{4\pi}\int d\sigma \left\{ \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial n}[\varphi] - \frac{1}{cR}\frac{\partial R}{\partial n}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right] - \frac{1}{R}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right]\right\}$$

Darin bedeutet $[\varepsilon]$ den Wert von ε zur Zeit $t - \frac{R}{c}$. Läßt man nun im unendlichen Raum die Fläche σ schließlich ins Unendliche rücken, so folgt unter denselben Voraussetzungen wie in Nr. 127 aus (54):

(54a) $$\varphi(x_0, y_0, z_0, t) = \int \frac{[\varepsilon]}{R}\,d\tau.$$

Man erkennt sofort die Analogie der Formeln (53), (53a), (54) und (54a) mit den Gleichungen (17) und (18), die die Lösungen des statischen Problems darstellen. Die Integrale rechts stellen hier ebenfalls Potentiale von räumlich verbreiteten Massen, flächenhaft verteilten Massen und von Doppelschichten dar. Aber zum Unterschiede von (17) beziehen sich hier die Werte nicht auf denselben Zeitpunkt t, in dem die Lösung gewünscht wird, sondern auf die um $\frac{R}{c}$ zurückliegende Zeit $t - \frac{R}{c}$. Deshalb nennt man die auf der rechten Seite von (53) bis (54a) auftretenden Potentiale „retardierte Potentiale“, im Gegensatz zu den in (17) auftretenden, die man als „simultane Potentiale“ bezeichnen könnte. Da c nach Gleichung (21) die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elastischen Wellen darstellt, so ist $\frac{R}{c}$ die Zeit, die die Wellen gebrauchen, um von der Stelle eines Oberflächenelementes $d\sigma$ zum Punkte (x_0, y_0, z_0) zu gelangen. Die Integrale (53) bis (54a) bringen also zum Ausdruck, daß eine elastische Störung Zeit gebraucht, um eine bestimmte Strecke zurückzulegen.

Sind die Werte von φ und $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ an der Oberfläche für alle Zeiten gegeben, so kann man nach (53a) resp. (54) in jedem beliebigen Punkte innerhalb dieses von σ umhüllten Raumes den Wert der Funktion φ berechnen. In Strenge ist dies jedoch selten der Fall, und darauf beruht die Schwierigkeit, diese elastischen Probleme in komplizierteren Fällen zu lösen. Angenäherte Lösungen jedoch haben namentlich in der Optik, bei der Beugung des Lichtes, die größte Bedeutung gewonnen, und dort werden wir auf die physikalische Bedeutung dieses Kirchhoffschen Theorems näher einzugehen haben.

131. Die Bestimmung der Verrückungskomponenten aus der kubischen Dilatation und den Rotationskomponenten.

Grundsätzlich können, wenigstens in den einfachsten Fällen, durch die Erwägungen der Nr. 127 und 130 die Rotation $\mathfrak{d}$ und die kubische Dilatation Σ sowohl für den Fall des Gleichgewichts wie der Bewegung als bestimmt angesehen werden. Diese Größen stehen mit der Verrückung, die wir doch eigentlich bestimmen wollen, in folgendem Zusammenhange:

(55)
$$\begin{cases} 2\mathfrak{d} = \operatorname{rot} \mathfrak{s}, \\ \Sigma = \operatorname{div} \mathfrak{s}. \end{cases}$$

Es entsteht nun die Aufgabe, daraus die Verrückung selbst zu bestimmen. Sie ist lösbar durch Einführung zweier Hilfsfunktionen ψ, $\mathfrak{A}$. Wir setzen nämlich:

(56)
$$\mathfrak{s} = \operatorname{grad} \psi + \operatorname{rot} \mathfrak{A}.$$

Da man zur Darstellung einer Funktion $\mathfrak{s}$ aber keine zwei unabhängigen Funktionen ψ, $\mathfrak{A}$ notwendig hat, so können wir zum Beispiel der Funktion $\mathfrak{A}$ noch eine einschränkende Bedingung auferlegen; die Aufsuchung dieser Bedingung verschieben wir vorläufig auf später, bis wir Andeutungen über die geeignetste Art derselben finden werden.

Können wir die Funktionen ψ und $\mathfrak{A}$ bestimmen, so ist damit nach (56) die Verrückung $\mathfrak{s}$ durch einfache Differentiationen, d. h. durch stets mögliche Operationen, bestimmbar.

Wir wollen nun in der Tat zeigen, daß ψ und $\mathfrak{A}$ bestimmt werden können und setzen zu diesem Zwecke den Wert von $\mathfrak{s}$ aus (56) in (55) ein. Wir erhalten so z. B. aus der ersten Gleichung (55):

$$2\mathfrak{d} = \operatorname{rot} \operatorname{grad} \psi + \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{A},$$

oder, unter Beachtung der Gleichungen (58) und (59) des IX. Kapitels auf pag. 477:

(57)
$$2\mathfrak{d} = -\Delta \mathfrak{A} + \operatorname{grad} (\operatorname{div} \mathfrak{A}).$$

Jetzt setzen wir die bisher unbestimmt gelassene Bedingung für $\mathfrak{A}$ fest; es soll folgende sein:

(58)
$$\operatorname{div} \mathfrak{A} = 0.$$

Dann wird Gleichung (57):

(59a)
$$\Delta \mathfrak{A} = -2\mathfrak{d},$$

oder in Komponentendarstellung, wenn die Komponenten von $\mathfrak{A}$ durch $\mathfrak{A}_x$, $\mathfrak{A}_y$, $\mathfrak{A}_z$ bezeichnet werden:

(59)
$$\begin{cases} \Delta \mathfrak{A}_x = -2p, \\ \Delta \mathfrak{A}_y = -2q, \\ \Delta \mathfrak{A}_z = -2r. \end{cases}$$

Im Falle des Gleichgewichtes, das wir zunächst betrachten wollen, stimmen diese Gleichungen, da dann $p, q, r, \mathfrak{A}_x, \mathfrak{A}_y, \mathfrak{A}_z$ nicht von der Zeit abhängen, mit der Potentialgleichung der Form nach völlig überein und wir haben daher die Lösung (18) für den unbegrenzten Raum anzunehmen:

(60) $$\mathfrak{A}_x = \frac{1}{2\pi}\int\frac{p\,d\tau}{R}, \quad \mathfrak{A}_y = \frac{1}{2\pi}\int\frac{q\,d\tau}{R}, \quad \mathfrak{A}_z = \frac{1}{2\pi}\int\frac{r\,d\tau}{R},$$

in vektorieller Zusammenfassung:

(60a) $$\mathfrak{A} = \frac{1}{2\pi}\int\frac{\mathfrak{d}\,d\tau}{R},$$

wo R den Abstand eines Volumenelementes $d\tau$ vom Aufpunkt bedeutet. Ganz ebenso erhält man durch Bildung der Divergenz in (56):

(61) $$\operatorname{div}\mathfrak{s} = \Sigma = \operatorname{div}\operatorname{grad}\psi = \Delta\psi,$$

die zur Bestimmung von ψ dient. Im Falle des Gleichgewichtes ist dies wiederum die Potentialgleichung und ihre Lösung also:

(62) $$\psi = -\frac{1}{4\pi}\int\frac{\Sigma\,d\tau}{R}.$$

Obgleich $\mathfrak{A}$ und ψ gleichmäßig durch Potentiale ausgedrückt sind, besteht doch ein tiefgreifender Unterschied zwischen ihnen. Denn in (62) ist Σ ein Skalar, während $\mathfrak{d}$ in (60a) ein Vektor ist. Deshalb nennt man $\mathfrak{A}$ im Gegensatz zu dem „skalaren Potential" ψ ein „Vektorpotential", und $\mathfrak{A}_x, \mathfrak{A}_y, \mathfrak{A}_z$ seine Komponenten.

Etwas anders werden die Lösungen im Falle der Bewegung. Dann sind (59) und (61) nicht mehr identisch mit der Potentialgleichung, da die Zeit t noch in den Gleichungen vorkommt. In diesem Falle muß man so argumentieren: p, q, r, Σ gehorchen der allgemeinen Wellengleichung (22):

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0.$$

Setzen wir hier für φ, das p, q, r, Σ vertritt, nach (59) zunächst resp. $\Delta\mathfrak{A}_x, \Delta\mathfrak{A}_y, \Delta\mathfrak{A}_z$ ein, so erhält man Gleichungen von der Form:

(63) $$\Delta\Delta\mathfrak{A}_x - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta\mathfrak{A}_x = 0.$$

oder, nach Vertauschung der Reihenfolge der Symbole $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ und Δ:

(64) $$\Delta\left\{\Delta\mathfrak{A}_x - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathfrak{A}_x}{\partial t^2}\right\} = 0,$$

die dadurch erfüllt werden kann, daß man $\mathfrak{A}_x, \mathfrak{A}_y, \mathfrak{A}_z$ der Gleichung unterwirft:

$$\Delta\begin{Bmatrix}\mathfrak{A}_x\\ \mathfrak{A}_y\\ \mathfrak{A}_z\end{Bmatrix} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\begin{Bmatrix}\mathfrak{A}_x\\ \mathfrak{A}_y\\ \mathfrak{A}_z\end{Bmatrix}.$$

Dies ist wiederum die Wellengleichung und ihr allgemeines Integral ist durch retardierte Potentiale nach Gleichung (53) gegeben.

Genau ebenso verhält sich in diesem Falle auch ψ. Denn da Σ der Wellengleichung gehorcht, so erhält man, indem man Σ nach Gleichung (61) durch $\Delta\psi$ in derselben ersetzt:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta\psi = \Delta\Delta\psi,$$

oder nach Vertauschung von $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ mit Δ:

(65)
$$\Delta\left\{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \Delta\psi\right\} = 0,$$

die dadurch erfüllt werden kann, daß man die Klammer verschwinden läßt. Also ist auch ψ durch retardierte Potentiale darstellbar.

Sind so $\mathfrak{A}$ und ψ bestimmt, so folgen durch Differentiationen die gesuchten Verrückungskomponenten gemäß Gleichung (56).

132. Longitudinale und transversale Wellen.

Um den Charakter der beiden in elastischen Medien auftretenden Wellentypen näher zu erläutern, wollen wir an einen ganz einfachen Fall anknüpfen. Wir wollen $\mathfrak{A}$ und ψ als nur von der x-Koordinate abhängend annehmen. Dann folgt aus den Gleichungen (56) für die Verrückungskomponenten, die dann ebenfalls nur von der x-Koordinate abhängen:

(66)
$$\begin{cases} \xi = \dfrac{\partial\psi}{\partial x}, \\ \eta = -\dfrac{\partial\mathfrak{A}_z}{\partial x}, \\ \zeta = \dfrac{\partial\mathfrak{A}_y}{\partial x}. \end{cases}$$

Da hier alles nur von x abhängt, so folgt aus (59), (61) und (66):

(67)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial\xi}{\partial x} = \Sigma, \\ \dfrac{\partial\eta}{\partial x} = 2r, \\ \dfrac{\partial\zeta}{\partial x} = -2q. \end{cases}$$

Nun gehorchen aber Σ, q, r den folgenden Differentialgleichungen, da sie ebenfalls nur von x abhängen [(vgl. Gleichung 22)]:

$$(68)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \Sigma}{\partial x^2} = \dfrac{\varepsilon}{\lambda + 2\mu} \dfrac{\partial^2 \Sigma}{\partial t^2}, \\ \dfrac{\partial^2 q}{\partial x^2} = \dfrac{\varepsilon}{\mu} \dfrac{\partial^2 q}{\partial t^2}, \\ \dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \dfrac{\varepsilon}{\mu} \dfrac{\partial^2 r}{\partial t^2}, \end{cases}$$

und man kann daher nach (32) etwa folgende Lösungen ansetzen:

$$(69)\quad \begin{cases} \Sigma = -\alpha \cdot \sin \alpha \left(x - \sqrt{\dfrac{\lambda + 2\mu}{\varepsilon}}\, t\right), \\ q = -\alpha \cdot \sin \alpha \left(x - \sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}\, t\right), \\ r = -\alpha \cdot \sin \alpha \left(x - \sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}\, t\right), \end{cases}$$

die nur noch einmal zufolge (67) nach x integriert zu werden brauchen, um ξ, η, ζ zu liefern. Dies führt zu den Formeln:

$$(70)\quad \begin{cases} \xi = \cos \alpha \left(x - \sqrt{\dfrac{\lambda + 2\mu}{\varepsilon}}\, t\right), \\ \eta = 2 \cos \alpha \left(x - \sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}\, t\right), \\ \zeta = 2 \cos \alpha \left(x - \sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}\, t\right). \end{cases}$$

Das sind Wellen, die sich parallel der x-Achse fortpflanzen; die Wellenfläche ist also eine Parallelebene zur yz-Ebene. Je nach ihrer Lage zur Wellenfläche kann man nun zwei Arten von Wellen unterscheiden: Die Komponenten η, ζ liegen parallel zur Wellenfläche, senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung. Deshalb nennt man die durch η, ζ dargestellten Wellen „Transversalwellen". Im Gegensatz dazu liegt ξ parallel zur Fortpflanzungsrichtung, senkrecht zur Wellenfläche, weshalb man diese Wellen „Longitudinalwellen" nennt.

Aus (67) erkennt man nun, daß die Longitudinalwellen ξ nur mit Dilatation, die Transversalwellen η und ζ dagegen nur mit Rotation verbunden sind. Man erhält daher das Resultat, daß die rotationsfreien Dilatationswellen Longitudinalwellen, die dilatationsfreien Rotationswellen dagegen Transversalwellen sind.

Im allgemeinen sind in festen elastischen Medien beide Arten von Wellen möglich. Dagegen ist dies anders, wenn wir Flüssigkeiten oder Gase betrachten. Diese Medien sind dadurch charakterisiert, daß sie zwar einer Volumänderung (einer kubischen Dilatation) einen Widerstand entgegensetzen, d. h. eine von Null verschiedene Elastizitätskonstante λ besitzen, nicht dagegen einen Widerstand gegen Schubkräfte. Sie haben keine bestimmte Gestalt, und der Schubmodul ist daher für sie gleich Null.

Man erkennt nun aus (70), daß die Geschwindigkeit der Longitudinalwellen $=\sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{s}}$, der Transversalwellen $\sqrt{\frac{\mu}{s}}$ ist.

Folglich können in gasförmigen und flüssigen Medien nur Longitudinalwellen existieren[1]), deren Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\sqrt{\frac{\lambda}{s}}$ ist. Dagegen können transversale Störungen sich nicht fortpflanzen, weil ihre Geschwindigkeit gleich Null wird. Die Schallwellen in Gasen und Flüssigkeiten sind daher longitudinale Dilatationswellen.

---

[1]) Sofern wenigstens von der Reibung abgesehen wird; vgl. Kap. XIX.

Vierzehntes Kapitel.

Schwingungen von Saiten und Membranen.

133. Lineares System diskreter Massenpunkte.

Unter einer „Saite" versteht man einen Stab, dessen Querschnitt so gering ist, daß er keinen Widerstand gegen Biegung mehr leistet. In der Tat zeigt Gleichung (65a) des Kapitels XII auf pag. 535, daß dies möglich ist. Denn das zu einer bestimmten Biegung, d. h. zur Erzeugung eines bestimmten Biegungspfeiles notwendige Drehmoment ist proportional dem Ausdrucke bh^3 oder, da bh gleich dem Querschnitt q des Stabes ist, proportional zu qh^2, nimmt also mit abnehmendem Querschnitt resp. abnehmendem b und h sehr stark ab. Wenn es auch, streng genommen, keine Saite geben kann, die gar keinen Widerstand gegen Biegung besitzt, so wollen wir uns doch nur mit diesem Idealfalle beschäftigen. Damit eine solche Saite überhaupt Biegungsschwingungen ausführen kann, muß sie durch einen Zug gespannt werden. Ihre Enden sind dabei befestigt.

Ganz ebenso ist eine „Membran" eine Platte, deren Dicke verschwindend gering ist, so daß auch sie nur Schwingungen ausführen kann, wenn sie gespannt ist, wobei der Rand festliegt. Eine Membran ist gewissermaßen das zweidimensionale Analogon zur Saite.

Die Differentialgleichungen der Saitenschwingungen wären nun, indem man die Linearität, den verschwindenden Stabquerschnitt und die Spannung der Saite einführt, aus den allgemeinen Elastizitätsgleichungen zu erhalten. Wir ziehen es jedoch vor, in Anlehnung an Lagrange die Saite als ein System einer endlichen Anzahl von gleichen diskreten Massenpunkten zu betrachten, die in gleicher Entfernung voneinander durch elastische Kräfte in ihrer Ruhelage gehalten werden. Eine Saite wird also ersetzt durch folgendes System von Massenpunkten (Fig. 169).

Die Masse jedes dieser Punkte sei m, die Entfernung je zweier voneinander l; die Längsrichtung der Saite nehmen wir zur x-Achse.

Wir verlassen hier den Standpunkt der Kontinuitätstheorie und damit der Elastizitätstheorie im engeren Sinne, und begeben uns in das Gebiet der Dynamik einzelner Massenpunkte. Wir müssen nun die Bedingungsgleichungen für jeden dieser Massenpunkte aufstellen. Wir

greifen zwei Punkte a und $a-1$ heraus. Ihre Koordinaten sind $(x_a, 0, 0)$ resp. $(x_{a-1}, 0, 0)$ und ferner ist nach Voraussetzung

(1) $$x_a - x_{a-1} = l.$$

Nun erteilen wir beiden Punkten eine Verschiebung, deren Komponenten für den ersten Punkt wir ξ_a, η_a, ζ_a, für den zweiten ξ_{a-1}, η_{a-1}, ζ_{a-1} nennen wollen. Dann sind die Koordinaten der Punkte nach der Verrückung

$$x_a + \xi_a, \quad \eta_a, \quad \zeta_a$$

und

$$x_{a-1} + \xi_{a-1}, \quad \eta_{a-1}, \quad \zeta_{a-1}.$$

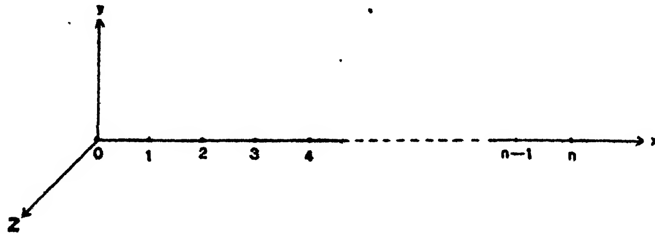


Fig. 169.

Bezeichnen wir den Abstand der Punkte nach der Verschiebung mit Δs_a, so ist offenbar

(2) $$\Delta s_a^2 = (l + \xi_a - \xi_{a-1})^2 + (\eta_a - \eta_{a-1})^2 + (\zeta_a - \zeta_{a-1})^2.$$

Anderseits können wir Δs_a auch durch l und die durch die Verschiebung hervorgebrachte Verlängerung ausdrücken. Es sei die Verlängerung der Längeneinheit Δl, so $l\Delta l$ ist die Verlängerung von l. Dann ist also:

(3) $$\Delta s_a = l(1 + \Delta l).$$

Kombiniert man diesen Ausdruck mit (2), so folgt:

(4) $$l(1 + \Delta l) = \sqrt{(l + \xi_a - \xi_{a-1})^2 + (\eta_a - \eta_{a-1})^2 + (\zeta_a - \zeta_{a-1})^2},$$

oder:

$$l(1 + \Delta l) = \left\{l + \xi_a - \xi_{a-1}\right\}\sqrt{1 + \frac{(\eta_a - \eta_{a-1})^2 + (\zeta_a - \zeta_{a-1})^2}{(l + \xi_a - \xi_{a-1})^2}}.$$

Da die Verschiebungen $\xi_a, \eta_a, \zeta_a, \xi_{a-1}, \eta_{a-1}, \zeta_{a-1}$ alle infinitesimal, also jedenfalls klein gegen die endliche Größe l sind, so ist der Bruch unter der Wurzel klein gegen 1, und man darf ihn daher nach dem binomischen Lehrsatz entwickeln. Man erhält nach Division mit l:

(5) $$1 + \Delta l = \left\{1 + \frac{\xi_a - \xi_{a-1}}{l}\right\}\left\{1 + \frac{1}{2}\frac{(\eta_a - \eta_{a-1})^2}{(l + \xi_a - \xi_{a-1})^2} + \frac{1}{2}\frac{(\zeta_a - \zeta_{a-1})^2}{(l + \xi_a - \xi_{a-1})^2}\right\}.$$

Da nun aber die ξ_a, η_a, ζ_a klein gegen l sind, so kann man im Nenner die Differenz $\xi_a - \xi_{a-1}$ gegen l streichen und erhält so sicher:

(6) $$l+\Delta l=\left\{1+\frac{\xi_a-\xi_{a-1}}{l}\right\}\left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{\eta_a-\eta_{a-1}}{l}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\zeta_a-\zeta_{a-1}}{l}\right)^2\right\}$$

Rechnet man die rechte Seite aus und vernachlässigt Größen von höherer als der zweiten Ordnung, so folgt für die Verlängerung der Längeneinheit:

(7) $$\Delta l=\frac{\xi_a-\xi_{a-1}}{l}+\tfrac{1}{2}\left(\frac{\eta_a-\eta_{a-1}}{l}\right)^2+\tfrac{1}{2}\left(\frac{\zeta_a-\zeta_{a-1}}{l}\right)^2.$$

Welche Kräfte müssen nun wirken, um eine Verlängerung von l auf $l(1+\Delta l)$ hervorzubringen? Zunächst wird die Saite in der Ruhelage erhalten durch eine konstante Spannung S; diese Spannung wirkt natürlich auch dann, wenn die Saite aus der Ruhelage herausgebracht wird; aber sie kann einen derartigen Vorgang nicht herbeiführen, sondern dazu bedarf es noch einer besonderen Kraft, die wir K_1 nennen wollen. Für dieselbe nehmen wir das Hookesche Gesetz der Dehnung eines Stabes an, welches, wenn hier die Züge als positiv gerechnet werden, nach Gleichung (38) des XII. Kapitels auf pag. 525 lautet:

(8) $$K_1=\frac{qEl\cdot\Delta l}{l}=qE\cdot\Delta l.$$

Die Gesamtkraft setzt sich also additiv aus S und K_1 zum Betrage von K zusammen:

(9) $$K=S+qE\Delta l.$$

Nunmehr berechnen wir die Arbeit, die von der Kraft K geleistet wird, indem sie das Stück l um den Betrag $l\Delta l$ verlängert. Bezeichnet dA die Arbeit, welche erforderlich ist, um l um das unendlich kleine Stückchen $l\cdot d(\Delta l)$ zu dehnen, so ist:

$$dA=Kl\,d(\Delta l)=l\cdot S\,d(\Delta l)+lq\cdot E\,\Delta l\cdot d(\Delta l).$$

Also die Arbeit A, wenn eine Dehnung bis zum Betrage $l\cdot\Delta l$ erfolgt:

(10) $$\begin{cases} A=lS\displaystyle\int_0^{\Delta l}d(\Delta l)+lEq\int_0^{\Delta l}(\Delta l)\,d(\Delta l), \quad \text{also:}\\[2ex] A=l\cdot S\cdot\Delta l+\dfrac{lqE\Delta l^2}{2}.\end{cases}$$

Diese Arbeit ist gleich der gewonnenen potentiellen Energie, und da wir diese in der Gleichgewichtslage als Null annehmen, gleich der gesamten potentiellen Energie des aus den beiden Massenpunkten bestehenden Systems, die Φ_a heißen möge. Unter Rücksicht auf (7) folgt also unter Vernachlässigung von Gliedern von höheren als dem zweiten Grade:

$$\Phi_a=l\left\{S\frac{\xi_a-\xi_{a-1}}{l}+\frac{S}{2}\left(\frac{\eta_a-\eta_{a-1}}{l}\right)^2+\frac{S}{2}\left(\frac{\zeta_a-\zeta_{a-1}}{l}\right)^2+\frac{qE}{2}\left(\frac{\xi_a-\xi_{a-1}}{l}\right)^2\right\},$$

oder:

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} \Phi_a = S(\xi_a - \xi_{a-1}) + \frac{l}{2}\Big\{qE\Big(\frac{\xi_a - \xi_{a-1}}{l}\Big)^2 + S\Big(\frac{\eta_a - \eta_{a-1}}{l}\Big)^2 \\ + S\Big(\frac{\zeta_a - \zeta_{a-1}}{l}\Big)^2\Big\}. \end{aligned}\right.$$

Dies ist die potentielle Energie des Massenpunktes a in bezug auf den benachbarten a_{-1}. Nennen wir nun den ersten Punkt der Saite 0, den letzten n, so ist die gesamte potentielle Energie der deformierten Saite $\sum \Phi_a = \Phi$, was ausgerechnet ergibt:

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} \Phi = \sum_a^{1,n} \Phi_a = S(\xi_n - \xi_0) + \frac{l}{2}\sum_a^{1,n}\Big\{qE\Big(\frac{\xi_a - \xi_{a-1}}{l}\Big)^2 \\ + S\Big(\frac{\eta_a - \eta_{a-1}}{l}\Big)^2 + S\Big(\frac{\zeta_a - \zeta_{a-1}}{l}\Big)^2\Big\}. \end{aligned}\right.$$

Nun können wir leicht die Bewegungsgleichungen für irgend einen Massenpunkt a gewinnen, indem wir beachten, daß die negativen Ableitungen der potentiellen Energie nach den Verrückungen ξ_a, η_a, ζ_a die Kraftkomponenten ergeben, die ξ_a, η_a, ζ_a zu verändern bestrebt sind. Also ist allgemein

$$m\frac{d^2\xi_a}{dt^2} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_a}.$$

In unserem Falle ergibt sich demnach:

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} m\frac{d^2\xi_a}{dt^2} - \frac{qE}{l}\Big\{\xi_{a+1} - 2\xi_a + \xi_{a-1}\Big\} = 0, \\ m\frac{d^2\eta_a}{dt^2} - \frac{S}{l}\Big\{\eta_{a+1} - 2\eta_a + \eta_{a-1}\Big\} = 0, \\ m\frac{d^2\zeta_a}{dt^2} - \frac{S}{l}\Big\{\zeta_{a+1} - 2\zeta_a + \zeta_{a-1}\Big\} = 0. \end{aligned}\right.$$

Wenn man diese Gleichungen in einer etwas anderen Form schreibt, so erkennt man leicht, daß sie vom nämlichen Charakter sind, wie die im ersten Buche behandelte Differentialgleichung der erzwungenen Schwingungen eines Massenpunktes. Z. B. liefert die erste Gleichung:

$$m\frac{d^2\xi_a}{dt^2} + 2\frac{qE}{l}\xi_a = \frac{qE}{l}\Big(\xi_{a+1} - \xi_{a-1}\Big).$$

Die linke Seite gleich Null gesetzt, würde die Schwingungen eines Massenpunktes unter dem Einfluß der zurücktreibenden Kraft $\frac{2qE}{l}$ vorstellen; diese freie Schwingung wird aber durch den Einfluß der rechtsstehenden Terme gestört, die ξ_{a+1} und ξ_{a-1} enthalten. Die Gleichung für ξ_a kann also nur im Zusammenhange mit denjenigen für ξ_{a+1} und ξ_{a-1} behandelt werden, weil die Gleichungen (13) „gekoppelt" sind. Sie können in bekannter Weise integriert werden, doch werden wir darauf nicht weiter eingehen, da wir nunmehr den Grenzübergang zu einer kontinuierlichen Saite vollziehen wollen.

134. Übergang zu einer kontinuierlichen Saite.

Wir erkennen bei einer Betrachtung der Gleichungen (13), daß sie alle von derselben Form sind; es genügt daher etwa die erste zu betrachten. Wenn man die zweite und dritte daraus erhalten will, hat man nur qE durch S zu ersetzen.

Wir wollen nun die erste Gleichung (13) durch l dividieren; dann steht links $\frac{m}{l}\frac{d^2\xi_a}{dt^2}$. Denken wir uns die Masse m kontinuierlich auf das Stück l verteilt, so wird $\frac{m}{l}$ die „Masse pro Längeneinheit", die durch ε bezeichnet werde. Den Ausdruck rechts können wir nach Division mit l schreiben:

$$\frac{\frac{\xi_{a+1}-\xi_a}{l}-\frac{\xi_a-\xi_{a-1}}{l}}{l}.$$

Der Bruch $\frac{\xi_{a+1}-\xi_a}{l}$ nähert sich, wenn wir l immer kleiner werden lassen, unbegrenzt dem Werte $\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_{a+1}$; ebenso wird $\frac{\xi_a-\xi_{a-1}}{l}$ dann zu $\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_a$. Also folgt $\frac{\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_{a+1}-\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_a}{dx}$, da ja l dann zum Differential dx wird. Da nun a und $a+1$ jetzt nur um das Stück dx abstehen, so ist:

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_{a+1}=\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_{x+dx}=\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_x+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_x dx.$$

Dieses Resultat ergibt sich, wenn man $\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_{x+dx}$ nach Taylor entwickelt und nach dem linearen Gliede abbricht. Dann folgt schließlich rechts:

$$\lim_{l=0}\frac{\frac{\xi_{a+1}-\xi_a}{l}-\frac{\xi_a-\xi_{a-1}}{l}}{l}=\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2},$$

und damit ergibt sich als Endgleichung:

$$\varepsilon\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}-qE\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}=0.$$

Ersetzt man ξ hier durch η resp. ζ und gleichzeitig qE durch S, so erhält man die drei Gleichungen der schwingenden Saite:

$$(14)\qquad\left\{\begin{aligned}\varepsilon\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}&=qE\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2},\\ \varepsilon\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}&=S\,\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2},\\ \varepsilon\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}&=S\,\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}.\end{aligned}\right.$$

Da die Saite parallel der x-Richtung gespannt ist, so bedeutet ξ eine longitudinale, η und ζ dagegen sind transversale Verrückungen. Beide

Arten von Wellen sind bei einer Saite möglich, obwohl das Hauptinteresse sich auf die Transversalschwingungen konzentriert. Man erkennt aus (14) folgenden Satz:

„Die Longitudinalschwingungen hängen nur vom Material, nicht aber von der Spannung der Saite ab; dagegen sind die Transversalschwingungen hinwiederum von der Elastizität der Saite völlig unabhängig.

Zu den Gleichungen (14) treten, um das Problem überhaupt bestimmt zu machen, noch die sogenannten „Randbedingungen" und die „Anfangsbedingungen" hinzu.

Die Randbedingungen sagen hier aus, daß für alle Zeiten der Anfangs- und Endpunkt der Saite in Ruhe bleiben sollen. Ist die Länge der Saite L, so ist:

(14a) $$\xi_{x=0} = \xi_{x=L} = 0; \quad \text{ebenso für } \eta \text{ und } \zeta.$$

Die Anfangsbedingungen sagen aus, daß zur Zeit $t=0$ jeder Punkt der Saite eine bestimmte Elongation und eine bestimmte Geschwindigkeit hat. Die Gestalt der Saite ist also eine gegebene Funktion von x, ebenso wie die Geschwindigkeit derselben. Man hat also:

(14b) $$\text{für } t=0: \quad \xi = F(x); \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = G(x); \quad \text{ebenso für } \eta \text{ und } \zeta.$$

Es ist schon früher bemerkt worden, daß man eine Membran als das zweidimensionale Analogon der Saite betrachten kann. Dem entspricht es, daß man die Membran durch ein zweidimensionales Netz von Massenpunkten approximieren kann. Für dieses kann man, ähnlich wie in Nr. 133, die Gleichungen aufstellen, die durch einen geeigneten Grenzübergang schließlich die Schwingungsgleichung der kontinuierlichen Membran liefern. Wir beschränken uns auf die Betrachtung der Transversalwellen. Liegt die Membran in der Ruhelage in der xy-Ebene, so erkennt man leicht, daß die Differentialgleichung der Transversalschwingungen lautet:

(15) $$\varepsilon \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = S \left\{ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right\}.$$

Dabei bedeutet ε die „Masse pro Flächeneinheit" der Membran. Auch dazu treten entsprechende Rand- und Anfangsbedingungen. Dabei ist allerdings noch vorausgesetzt, daß die Spannung der Membran völlig gleichmäßig ist; im anderen Falle kompliziert sich natürlich (15) erheblich. Wir werden uns auf gleichmäßig gespannte Membranen beschränken.

135. Freie Schwingungen der Saite.

Wir wollen nun statt ξ, η, ζ einen Buchstaben, u, einführen, ebenso für resp. $\frac{Eq}{\varepsilon}$ oder $\frac{S}{\varepsilon}$ den Buchstaben c^2. Dann gewinnen alle Gleichungen (14) die Form:

(16) $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

an die wir unsere weiteren Betrachtungen anschließen wollen. Die einzigen wirkenden Kräfte sind hier die Trägheitskräfte, die in dem Ausdruck $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ stecken. Explizite äußere Kräfte sind nicht vorhanden. Die so entstehenden Saitenschwingungen nennt man „freie Schwingungen". Es sei übrigens bemerkt, daß die bei der Saite auftretenden Kräfte alle pro Längeneinheit gemeint sind, z. B. ist $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ die Trägheitskraft pro Längeneinheit. Das liegt daran, daß wir unter ε hier nicht die Dichtigkeit, d. h. die Masse pro Volumeneinheit, sondern eben pro Längeneinheit verstanden haben.

Um die mathematische Form möglichst einfach zu machen, wollen wir im folgenden die Länge der Saite gleich 1 annehmen; die Differentialgleichung (16) ist also nur in dem Intervalle von 0 bis 1 definiert; dieses heißt das „Grundgebiet" der Differentialgleichung. Dann haben wir die Randbedingungen nach (14a):

(16a) $$u(0) = u(1) = 0$$

und die Anfangsbedingungen nach (14b):

(16b) $$\text{für } t = 0: \quad u = F(x); \quad \frac{\partial u}{\partial t} = G(x).$$

Das Problem ist: die allgemeine Lösung von (16) zu finden, die die Rand- und Anfangsbedingungen befriedigt.

Zunächst weisen uns die Entwicklungen des vorigen Kapitels dazu einen möglichen Weg; denn danach kann man die allgemeine Lösung von (16) in der Form schreiben:

(17) $$u = f_1(x - ct) + f_2(x + ct),$$

wobei die Funktionswerte f_1 resp. f_2 sich mit der Geschwindigkeit c nach rechts resp. links fortpflanzen. Nun sind zunächst f_1 und f_2 ganz beliebige Funktionen. Aber die Randbedingungen fordern für alle Zeiten z. B. für $t = 0$, daß $u(0) = u(1) = 0$ sein soll. Demgemäß müssen die Funktionen f_1 und f_2 derartig gewählt werden, daß

(18) $$f_1(0) + f_2(0) = 0 = f_1(1) + f_2(1) = 0$$

wird, was offensichtlich durch geeignete Wahl von f_1 und f_2 erzielt werden kann. Dann bleibt natürlich noch ein weiter Spielraum für die Wahl der beiden Funktionen übrig. Wir werden im folgenden sehen, daß dieser Spielraum völlig eingeschränkt wird durch die Anfangsbedingungen (16b). Diese fordern, daß f_1 und f_2 noch die folgenden Gleichungen erfüllen müssen:

$$(19)\quad \begin{cases} (u)_{t=0} = f_1(x) + f_2(x) = F(x), \\ \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = -c f_1'(x) + c f_2'(x) = G(x), \end{cases}$$

wobei die Striche Ableitungen nach dem Argument $x \mp ct$ bedeuten sollen; F und G sind natürlich gegebene Funktionen. Es folgt daraus:

$$(20a)\quad \begin{cases} f_1(x) + f_2(x) = F(x), \\ -f_1'(x) + f_2'(x) = \frac{1}{c} G(x), \end{cases}$$

welch letztere, nach x integriert, liefert:

$$(20b)\quad -f_1(x) + f_2(x) = \frac{1}{c}\int_0^x G(x)\,dx,$$

und daraus ergibt sich sehr einfach:

$$(21)\quad 2f_1(x) = F(x) - \frac{1}{c}\int_0^x G(x)\,dx,$$

$$(22)\quad 2f_2(x) = F(x) + \frac{1}{c}\int_0^x G(x)\,dx,$$

wodurch die beiden Funktionen vollkommen bestimmt sind.

Diese Lösung ist offenbar die allgemeine, da sie, wie eben gezeigt, einem beliebig gegebenen Anfangszustande angepaßt werden konnte. Danach bestehen zwei Arten von Wellenbewegungen gleichzeitig an der Saite: eine von links nach rechts, und eine von rechts nach links fortschreitende. Die durch die Übereinanderlagerung der beiden fortschreitenden Wellensysteme entstehenden Wellen nennt man „stehende“, eine Bezeichnung, deren Bedeutung leichter hervortreten wird, wenn wir nun noch nach einer ganz anderen Methode eine Lösung der Gleichung (16) nebst Randbedingungen versuchen.

Wir setzen zu dem Ende versuchsweise eine Lösung von (16) in der Form an:

$$(23)\quad u = \varphi(x) \cdot \cos nt,$$

wo n eine zu bestimmende Konstante ist. Durch Einsetzen dieser Werte in (16) folgt:

$$-n^2 \varphi(x) - c^2 \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = 0,$$

und die Randbedingungen (16a) ergeben die weitere Folgerung:

$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0.$$

Wir setzen zur Abkürzung $\frac{n^2}{c^2} = \lambda$, so daß wir Lösungen φ zu suchen haben, die folgenden Bedingungen gehorchen:

$$\left\{\begin{array}{l}\varphi''(x) + \lambda\varphi(x) = 0,\\ \varphi(0) = \varphi(1) = 0;\end{array}\right. \tag{24}$$

Ableitungen nach x bezeichnen wir im folgenden stets durch Striche, wie es in (24) schon geschehen ist. Die erste Gleichung (24) ist nun von der nämlichen Form wie diejenige für einen schwingenden Massenpunkt, so daß man das folgende Integral hat:

$$\varphi = A_\lambda \cos\sqrt{\lambda}\,x + B_\lambda \sin\sqrt{\lambda}\,x. \tag{25}$$

Die zweite Gleichung (24) fordert dann:

$$\left\{\begin{array}{l}\varphi(0) = A_\lambda + 0 \cdot B_\lambda = 0,\\ \varphi(1) = A_\lambda \cos\sqrt{\lambda} + B_\lambda \sin\sqrt{\lambda} = 0.\end{array}\right. \tag{26}$$

Die erste dieser Gleichungen liefert $A_\lambda = 0$, während B_λ unbestimmt bleibt. Die zweite könnte durch $B_\lambda = 0$ erfüllt werden; doch würde dann (25) die banale Lösung $\varphi = 0$ liefern. Schließen wir diese aus, so muß nach (26) sein:

$$\sin\sqrt{\lambda} = 0. \tag{27}$$

Diese Gleichung ist aber erfüllbar, da $\lambda = \frac{n^2}{c^2}$ wegen des unbestimmten n disponibel ist. Der Sinus verschwindet, wenn sein Argument gleich einem ganzzahligen Vielfachen von π ist, also folgt:

$$\sqrt{\lambda} = \nu\pi \quad (\nu = 1, 2, 3 \ldots \infty)^{1)}, \tag{28}$$

und die Lösung (25) geht über in die folgende:

$$\varphi_\nu = \sin\nu\pi x \quad (\nu = 1, 2, \ldots\ldots \infty). \tag{29}$$

Aus (28) folgt für n die Wertefolge:

$$n_\nu = c\nu\pi \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots\ldots \infty). \tag{30}$$

Wir haben also unendlich viele Werte $n = n_\nu$ und eine ebenfalls unendliche Funktionsfolge φ_ν, die uns partikuläre Lösungen der Gleichung (24) liefert. Jede Lösung φ_ν von (24) gibt nun, mit $\cos n_\nu t$ multipliziert,

---

[1]) Würde man die Länge der Saite gleich L genommen haben, so würde an Stelle von ν nur $\frac{\nu}{L}$ treten, wie man sich leicht überzeugt.

nach (23) eine Lösung u_ν der vorgelegten Differentialgleichung (16). Da diese linear ist, so können die partikulären Integrale, mit beliebigen Konstanten B_ν multipliziert, addiert werden. Man erhält so:

(31) $$u = \sum_\nu^{1,\infty} u_\nu = \sum_\nu^{1,\infty} B_\nu \sin \nu\pi x \cdot \cos c\nu\pi t.$$

Dabei ist natürlich erst zu zeigen, daß diese unendliche Reihe konvergent ist, d. h. überhaupt einen Sinn hat.

Genau dieselbe Argumentation kann mit dem symmetrisch zu (23) gebildeten Ansatz durchgeführt werden (da der Kosinus vor dem Sinus keinen Vorrang besitzt):

(32) $$u = \varphi(x) \cdot \sin nt.$$

Derselbe führt zu der Lösung:

(33) $$u = \sum_\nu^{1,\infty} A_\nu \sin \nu\pi x \cdot \sin c\nu\pi t.$$

Durch Addition von (31) und (33) ergibt sich die allgemeine Lösung:

(34) $$u = \sum_\nu^{1,\infty} \sin \nu\pi x \{A_\nu \sin c\nu\pi t + B_\nu \cos c\nu\pi t\}.$$

Die Funktionen φ_ν, die das Randwertproblem (24) lösen, heißen die „Eigenfunktionen", die zugehörigen Werte λ_ν die „Eigenwerte" des Randwertproblems. Die Eigenfunktionen sind übrigens nur bis auf eine Konstante bestimmt, da sie ihre Eigenschaft, Lösungen der Differentialgleichungen zu sein, nicht verlieren, wenn man sie mit einer beliebigen Konstanten multipliziert. Wir wollen in der Tat aus später hervortretenden Gründen als Eigenfunktionen φ_ν nicht einfach $\sin \nu\pi x$, sondern $\varphi = C \cdot \sin \nu\pi x$ annehmen, wo C später zu bestimmen ist. Dann geht (34) über in:

(34a) $$u = C \sum_\nu^{1,\infty} \sin \nu\pi x \{A_\nu \sin c\nu\pi t + B_\nu \cos c\nu\pi t\}.$$

Es sei übrigens nochmals betont, daß diese Lösung nur dann einen Sinn hat, wenn die Reihe (34a) konvergent ist.

Die in (34a) steckenden unbestimmten Konstanten A und B müssen nun so bestimmt werden, daß die Anfangsbedingungen (16b) erfüllt werden. Es muß gezeigt werden, daß dies möglich ist. Zu dem Zwecke bilden wir zunächst einmal die Werte $(u)_{t=0}$ und $\left(\frac{du}{dt}\right)_{t=0}$ nach Gleichung (34a) und (16b). Wir haben sofort:

(35) $$u_{t=0} = \sum_\nu^{1,\infty} C \cdot B_\nu \sin \nu\pi x = \sum^{1,\infty} B_\nu \varphi_\nu(x) = F(x).$$

Ebenso folgt durch Differentiation nach t:

(36) $$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = c\pi C \sum_{\nu}^{1,\infty} \nu \cdot \sin \nu\pi x \cdot A_\nu = c\pi \sum_{\nu}^{1,\infty} \nu\, \varphi_\nu(x) \cdot A_\nu = G(x).$$

Die Frage ist: Können die Konstanten A_ν und B_ν so bestimmt werden, daß die Gleichungen (35) und (36) befriedigt sind?

136. Entwickelung willkürlicher Funktionen nach Eigenfunktionen.

Mit der oben bezeichneten Frage sind wir auf eines der wichtigsten Probleme der mathematischen Physik gestoßen. Es handelt sich darum, eine willkürlich gegebene Funktion in einer Reihe zu entwickeln, die nach den Eigenfunktionen des betreffenden Randwertproblems fortschreitet. Auf diese Aufgabe wurde zuerst Fourier geführt bei seinen Untersuchungen über Wärmeleitung; und die trigonometrischen Reihen, mit denen wir es auch bei unserem Problem zu tun haben, heißen nach ihm „Fouriersche Reihen".

Wir wollen in diesem Abschnitt zeigen, daß es jedenfalls formal möglich ist, die Koeffizienten der Reihen zu bestimmen; allerdings fehlt dann noch das Wichtigste, nämlich der Nachweis der Konvergenz der Reihen. Die hierauf sich beziehende Untersuchung stellen wir aber vorläufig zurück, um sie später mit den modernen Methoden der Theorie der linearen Integralgleichungen aufzunehmen.

Zuerst also zur formalen Bestimmung der Koeffizienten A_ν und B_ν in den Gleichungen (35) und (36)! Dazu verhelfen uns zwei Eigenschaften der Eigenfunktionen $\varphi_\nu(x)$, die wir jetzt ableiten müssen. Wir betrachten zwei voneinander verschiedene Eigenfunktionen $\varphi_\nu(x)$ und $\varphi_\mu(x)$:

(37) $$\begin{cases} \varphi_\nu = C \cdot \sin \nu\pi x, \\ \varphi_\mu = C \cdot \sin \mu\pi x. \end{cases}$$

Dann bilden wir mit diesen das über das Grundgebiet von $x=0$ bis $x=1$ erstreckte Integral:

(38) $$J_{\nu\mu} = \int_0^1 \varphi_\nu(x)\, \varphi_\mu(x)\, dx = C^2 \int_0^1 \sin \nu\pi x \cdot \sin \mu\pi x \cdot dx.$$

Vermittels der bekannten trigonometrischen Relation:

$$\sin \nu\pi x \cdot \sin \mu\pi x = \tfrac{1}{2} \cos(\nu-\mu)\,\pi x - \tfrac{1}{2}\cos(\nu+\mu)\,\pi x$$

kann man schreiben:

$$J_{\nu\mu} = \frac{C^2}{2}\int_0^1 \cos(\nu-\mu)\pi x\,dx - \frac{C^2}{2}\int_0^1 \cos(\nu+\mu)\pi x\,dx$$

$$= \frac{C^2}{2(\nu-\mu)\pi}\Big[\sin(\nu-\mu)\pi x\Big]_{x=0}^{x=1} - \frac{C^2}{2(\nu+\mu)\pi}\Big[\sin(\nu+\mu)\pi x\Big]_{x=0}^{x=1},$$

und daraus folgt nach Einführung der Grenzen das wichtige Resultat:

$$(39)\qquad J_{\nu\mu} = \int_0^1 \varphi_\nu(x)\varphi_\mu(x)\,dx = 0. \quad (\nu \neq \mu).$$

Man nennt die in Gleichung (39) ausgedrückte Eigenschaft der Eigenfunktionen die Eigenschaft der „Orthogonalität".

Dazu tritt noch eine zweite Gleichung, die man erhält, wenn man den oben ausgeschlossenen Fall erledigt, daß $\nu=\mu$ wird. Wir betrachten demgemäß das Integral:

$$(40)\qquad J_{\nu\nu} = \int_0^1 \varphi_\nu^2(x)\,dx = C^2\int_0^1 \sin^2 \nu\pi x \cdot dx,$$

welches vermöge der trigonometrischen Relation:

$$\frac{1-\cos 2\nu\pi x}{2} = \sin^2 \nu\pi x$$

sich folgendermaßen transformieren läßt:

$$(41)\qquad J_{\nu\nu} = \frac{C^2}{2}\int_0^1 dx - \frac{C^2}{2}\int_0^1 \cos 2\nu\pi x \cdot dx = \frac{C^2}{2}.$$

Man findet also, daß $J_{\nu\nu}$ eine positive Konstante ist. Nun hatten wir aber C noch unbestimmt gelassen und wählen es jetzt so, daß wir für $J_{\nu\nu}$ den einfachen Wert 1 erhalten. Dann folgt aus (41):

$$(42)\qquad C = \sqrt{2}.$$

Diese Bestimmung des Faktors C nennt man die „Normierung" der Eigenfunktionen. Bezeichnen wir nun durch $\varphi_\nu(x)$ in Zukunft den Ausdruck $\sqrt{2}\sin\nu\pi x$, so finden wir folgende Fundamentaleigenschaften der Eigenfunktionen:

$$(43)\qquad \begin{cases} J_{\nu\mu} = \int_0^1 \varphi_\nu(x)\varphi_\mu(x)\,dx = 0. & (\nu \neq \mu), \\ J_{\nu\nu} = \int_0^1 \varphi_\nu^2(x)\,dx = 1. \end{cases}$$

Die Gesamtheit der so bestimmten Eigenfunktionen eines Randwertproblems nennt man das „normierte System" derselben.

Nun ist es leicht, mit Hilfe der Gleichungen (43) die formale Bestimmung der Koeffizienten durchzuführen. Betrachten wir z. B. das in Gleichung (35) formulierte Entwickelungsproblem:

$$(35a)\quad \begin{cases} F(x) = \sum\limits_{\nu}^{1,\infty} \sqrt{2} \sin \nu \pi x \cdot B_\nu \\ \quad = B_1 \sqrt{2} \sin \pi x + B_2 \sqrt{2} \sin 2\pi x + \ldots B_\alpha \sqrt{2} \sin \alpha \pi x + \ldots \end{cases}$$

Zur Bestimmung etwa des Koeffizienten B_α multiplizieren wir (35a) mit dem Ausdrucke $\sqrt{2}\sin \alpha\pi x \cdot dx$ und integrieren beiderseits über das Grundgebiet; dann erhalten wir

$$(44)\quad \begin{cases} \sqrt{2}\int\limits_0^1 F(x) \sin \alpha \pi x \cdot dx = \sqrt{2}\int\limits_0^1 dx \cdot \sin \alpha \pi x \left[\sum\limits_{\nu}^{1,\infty} \sqrt{2} \sin \nu \pi x \cdot B_\nu\right] \\ \quad = 2 \sum\limits_{\nu}^{1,\infty} \int\limits_0^1 dx \cdot \sin \alpha \pi x \cdot \sin \nu \pi x \cdot B_\nu \\ \quad = 2 B_1 \int\limits_0^1 \sin \pi x \cdot \sin \alpha \pi x \, dx + \ldots 2 B_\alpha \int\limits_0^1 \sin^2 \alpha \pi x \, dx + \ldots \end{cases}$$

Bei dieser Schreibweise ist allerdings angenommen, daß wir die Reihenfolge der Integration und Summation vertauschen dürfen, d. h. daß wir das Integral über die unendliche Summe als identisch mit der unendlichen Summe der Integrale der einzelnen Reihenglieder betrachten dürfen, mit anderen Worten, daß die Reihe „gliedweise" integriert werden darf. Selbst wenn die Reihe (44) konvergent ist, ist dies nicht immer gestattet, sondern die Konvergenz der Reihe muß noch von besonderer Art sein. Wir kommen darauf später (in Nummer 141) zurück und setzen vorläufig die gliedweise Integration als erlaubt voraus.

Wenn man nun die Bezeichnungsweise $J_{\nu\mu}$ und $J_{\nu\nu}$ für die rechtsstehenden Integrale anwendet, so kann man (44) auch folgendermaßen schreiben:

$$(45)\quad \sqrt{2}\int\limits_0^1 F(x) \sin \alpha \pi x \cdot dx = B_1 J_{1\alpha} + B_2 J_{2\alpha} + \cdots B_\alpha J_{\alpha\alpha} + \cdots B_n J_{n\alpha} + \cdots,$$

woraus mit Rücksicht auf (43) sofort folgt:

$$(46)\quad \sqrt{2}\int\limits_0^1 F(x) \sin \alpha \pi x \, dx = \int\limits_0^1 F(x)\, \varphi_\alpha(x)\, dx = B_\alpha,$$

wodurch B_α vollkommen bestimmt ist.

Man erkennt also, daß in der Tat infolge der Eigenschaften (43) der Eigenfunktionen die Koeffizienten B_ν alle bestimmt werden können. Eine derartige Koeffizientenbestimmung nennen wir die „Fouriersche"

Genau ebenso ergibt sich für die Reihe (36):

$$(47)\quad A_\alpha = \frac{1}{\alpha c \pi} \sqrt{2} \int\limits_0^1 G(x) \sin \alpha \pi x \, dx = \frac{1}{c \alpha \pi} \int\limits_0^1 G(x)\, \varphi_\alpha(x)\, dx.$$

Ob dies Verfahren einen Sinn hat, im besonderen, wann es zulässig ist, kann freilich erst eine Untersuchung über die Konvergenz der mit den Koeffizienten A_ν und B_ν gebildeten Reihen entscheiden. Die eigentlichen Schwierigkeiten des Problems liegen dort, nicht in der formalen Bestimmung der Koeffizienten. Um den physikalischen Inhalt unserer Entwickelung an dieser Stelle nicht mit rein mathematischen Untersuchungen zu belasten, setzen wir zunächst den hier angewendeten modus procedendi als brauchbar voraus, um ihn später streng zu begründen.

137. Die möglichen Schwingungsformen der Saite.

Wir wollen nun die Diskussion der nach Gleichung (34a) möglichen Schwingungsformen der Saite dadurch etwas vereinfachen, daß wir die Zeit $t=0$ so wählen, daß die Saite dann gerade durch ihre Ruhelage schwingt. Dann ist aber nach (35) $u_{t=0}=F(x)=0$, und damit sind die sämtlichen Koeffizienten B_ν nach (46) gleich Null.

Mit dieser Vereinfachung ergibt sich aus (34a):

$$(48)\quad \begin{cases} u = \sqrt{2}\sum\limits_{\nu}^{1,\infty} A_\nu \sin c\nu\pi t\cdot\sin\nu\pi x \\ \quad = \sqrt{2}\{A_1\sin c\pi t\cdot\sin\pi x + A_2\sin 2c\pi t\cdot\sin 2\pi x + \ldots\}. \end{cases}$$

Betrachten wir zunächst einmal das erste Glied $A_1\sin c\pi t\cdot\sin\pi x$. Man kann diesen Ausdruck in eine Summe umformen:

$$(49)\qquad A_1\sin c\pi t\sin\pi x = \frac{A_1}{2}\left\{\cos\pi(x-ct) - \cos\pi(x+ct)\right\},$$

was in Übereinstimmung mit Gleichung (17) zeigt, daß die resultierende Welle aufgefaßt werden kann als Übereinanderlagerung zweier mit der Geschwindigkeit c gegeneinander laufender fortschreitender Wellen von derselben Amplitude. Es ist bereits an jener Stelle bemerkt worden, daß man das Resultat dieser Superposition als „stehende“ Welle bezeichnet. Diese Benennung rechtfertigt sich durch folgende Überlegung: Bei einer fortschreitenden Welle, z. B. $\cos\pi(x-ct)$, ist kein Punkt für alle Zeiten t, d. h. dauernd, in Ruhe. Dagegen sind bei einer stehenden Welle, wie sie durch (49) dargestellt wird, stets gewisse Punkte des schwingenden Systems dauernd in ihrer Ruhelage. Nach (49) sind dies in unserem Falle die Punkte, für die $\sin\pi x$ verschwindet, und dies findet in dem durch das Grundgebiet beschränkten Wertintervalle nur statt für $x=0$ und $x=1$; d. h. bei der durch (49) dargestellten Schwingung sind (was wir übrigens schon wußten) Anfangs- und Endpunkt der Saite in Ruhe. Um die Extremlagen der Saite kennen zu lernen, wählen wir einmal $t=t_1$ so, daß $\sin c\pi t_1=1$, und ein zweites Mal so $(t=t_2)$, daß $\sin c\pi t_2=-1$ wird. Dann müssen, da dies ja die absolut größten Werte des Zeitfaktors sind, alle anderen Lagen zwischen diesen beiden liegen. Wir erhalten also folgende Grenzlagen:

(50) $$+A_1 \sin \pi x \quad \text{und} \quad -A_1 \sin \pi x,$$

die in Fig. 170 dargestellt sind, deren Bezeichnungen wohl ohne weiteres verständlich sind. Diese Schwingungsform der Saite nennen wir die

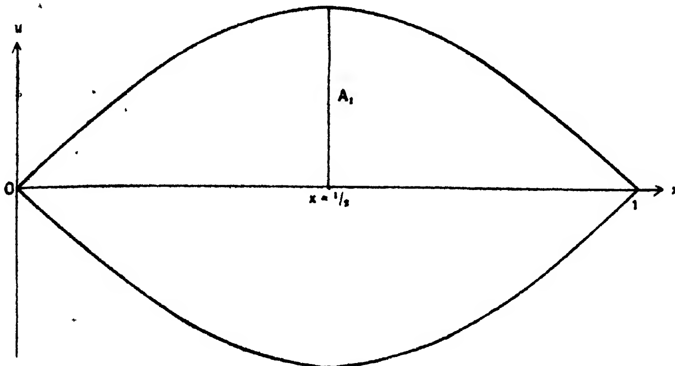


Fig. 170.

„Grundschwingung"; diese liefert, um uns akustisch auszudrücken, den „Grundton". Die beiden in Ruhe bleibenden Punkte $x=0$ und $x=1$ heißen die Knoten, der Punkt $x=1/_2$ der maximalen Elongation der „Bauch" der Schwingung.

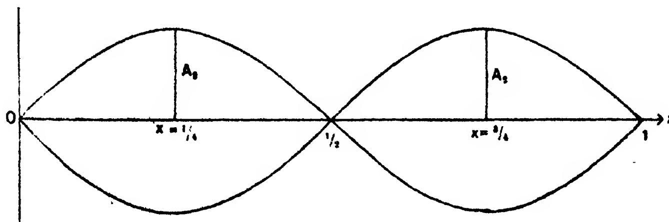


Fig. 171.

Wir gehen jetzt über zu der Betrachtung des zweiten Gliedes:

(51) $$A_2 \sin 2c\pi t \cdot \sin 2\pi x,$$

welches natürlich, ebenso wie das erste, als eine Übereinanderlagerung zweier fortschreitender Wellen aufgefaßt werden kann. Die durch (51) dargestellte stehende Welle hat folgende Eigenschaften: An den Stellen $x=0$, $x=1/_2$, $x=1$ liegen Knoten, an den gerade dazwischen liegenden $x=1/_4$ und $x=3/_4$ Bäuche der Schwingung. Man erhält daher die in Fig. 171 gezeichneten Extremlagen der Saite; diese Schwingungsart heißt

die „erste Oberschwingung" der Saite; sie liefert den ersten „Oberton". Greifen wir einen beliebigen Punkt heraus, den wir konstant halten, so vollführt derselbe bei dem Grundton eine Schwingung nach der Gleichung $\sin c\pi t$, beim ersten Oberton nach der Gleichung $\sin 2c\pi t$. Daraus ergibt sich für den Grundton die Schwingungszahl in 2π Sekunden oder die sogenannte „Frequenz":

(52 a) $$n_1 = c\pi$$

und für den ersten Oberton:

(52 b) $$n_2 = 2c\pi\,.$$

Letzterer vollführt also die doppelte Anzahl von Schwingungen wie der Grundton.

Ganz analog ist nun die Untersuchung für den zweiten Oberton:

(53) $$A_3 \sin 3 c\pi t \cdot \sin 3\pi x,$$

An den Stellen $x = 0$, $x = {}^1/_3$, $x = {}^2/_3$, $x = 1$ liegen Knoten, an den gerade dazwischenliegenden $x = {}^1/_6$, $x = {}^3/_6$, $x = {}^5/_6$ Bäuche. Die Extremlagen werden veranschaulicht durch Fig. 172. Die Schwin-

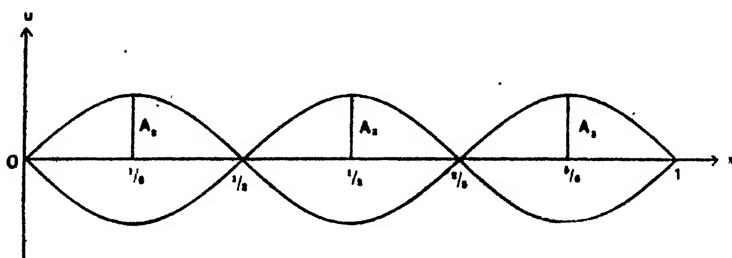


Fig. 172.

gungszahl für den zweiten Oberton ist $n_3 = 3c\pi$. Und so fort. Zählen wir die an den Enden befindlichen Knoten nicht mit, so finden wir folgendes allgemeine Resultat: Der α^{te} Oberton hat α Knoten und die Schwingungszahl $n_{\alpha+1} = (\alpha + 1)c\pi$. Alle diese Schwingungszustände lagern sich übereinander, und man erkennt, daß im allgemeinen die Schwingungsform der Saite sehr kompliziert ist. Daß aber wirklich eine große Anzahl von diesen Tönen im allgemeinen in einer Saitenschwingung enthalten ist, läßt sich durch direkte Versuche am Monochord beweisen. Je nach der Art der Erregung der Saite fallen die Amplituden der einzelnen Töne relativ zueinander verschieden aus, und die Seite ändert ihren Klangcharakter oder ihre sogenannte „Klangfarbe".

138. Die erzwungenen Schwingungen der Saite.

In dem Falle, daß neben der Trägheitskraft $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ noch explizite äußere Massenkräfte wirken, wird die Differentialgleichung der schwingenden Saite von der Form:

$$(54)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X(x,t),$$

wo $X(x,t)$ die gegebene äußere Kraft in ihrer Abhängigkeit von Raum und Zeit darstellt. Dazu treten die alten Randbedingungen $u(0) = u(1) = 0$. Die Differentialgleichung (54) nennt man eine inhomogene Differentialgleichung. Durch die äußere Kraft wird der Verlauf der freien Schwingung gestört, weswegen $X(x, t)$ auch als „Störungsglied" bezeichnet wird. Die nun auftretenden Schwingungen der Saite werden demgemäß als „erzwungene" Schwingungen bezeichnet. Wir wollen zunächst an Stelle von (54) ein einfacheres Problem substituieren. Dieses gewinnt man durch folgende Betrachtung: Es seien folgende einfachere Gleichungen gegeben:

$$(55)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = f_1(x) \cos n_1 t, \\ \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = f_2(x) \cos n_2 t. \end{cases}$$

Die Vereinfachung gegen (54) besteht darin, daß das Störungsglied als Produkt eines Raumfaktors $f_1(x)$ resp. $f_2(x)$ und eines Zeitfaktors $\cos n_1$ resp. $\cos n_2 t$ dargestellt ist. Sind nun Lösungen u_1 und u_2 dieser Aufgaben gefunden, so bilde man die Summe $u = u_1 + u_2$. Dann findet man durch Addition der identisch befriedigten Gleichung (55):

$$(56)\qquad \frac{\partial^2}{\partial t^2}(u_1 + u_2) - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u_1 + u_2) \equiv f_1(x) \cos n_1 t + f_2(x) \cdot \cos n_2 t;$$

d. h. $u = u_1 + u_2$ ist nun eine Lösung der in (56) formulierten komplizierteren Aufgabe. Umgekehrt kann man das Problem (56) durch Zerlegen in zwei einfachere Probleme vom Typus (55) lösen. Es ist also für uns von Wichtigkeit, die störende Funktion $X(x,t)$ als ein Produkt von Zeit- und Raumfaktor oder als eine Summe von solchen Produkten darzustellen. Das ist aber formal wenigstens möglich durch die Fouriersche Reihenentwicklung der Funktion $X(x,t)$. Wir wollen annehmen, daß $X(x,t)$ eine Funktion von solcher Beschaffenheit sei, daß diese Reihenentwicklung möglich ist, daß wir also setzen können:

$$(57)\qquad \begin{cases} X(x,t) = f_0(x) + f_1(x) \cos nt + f_2(x) \cos 2nt + \ldots \\ \qquad\qquad + g_1(x) \sin nt + g_2(x) \sin 2nt + \ldots \end{cases}$$

Dann zerfällt unser Problem (54) in eine Reihe von einfacheren Problemen vom Typus (55), auf dessen Behandlung wir uns also beschränken dürfen. Wir nehmen daher von vorneherein $X(x,t)$ in der Form eines Gliedes von (57) an und setzen etwa:

$$(58)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x) \cos nt,$$

wo n, wie aus dem Vorhergehenden erhellt, eine gegebene bestimmte Größe ist. (Beim Problem der freien Schwingung war im Gegensatz dazu n gesucht, jetzt ist es durch die äußere Kraft festgelegt.)

Die Form der störenden Kraft legt es nahe, versuchsweise durch folgenden Ansatz zu integrieren:

(59) $$u = \psi(x) \cdot \cos nt,$$

wo n dieselbe feste Zahl ist wie in (58). Setzt man (59) in (58) ein, so erhält man:

(60) $$-n^2 \psi(x) - c^2 \psi''(x) = f(x),$$

oder unter Einführung des Buchstabens λ (der hier wiederum fest gegeben ist):

$$\lambda = \frac{n^2}{c^2},$$

$$\psi''(x) + \lambda \psi(x) = -\frac{1}{c^2} f(x)$$

wofür man noch, wenn

(60a) $$-\frac{1}{c^2} f(x) = F(x)$$

gesetzt wird, einfacher schreiben kann:

(61) $$\psi''(x) + \lambda \psi(x) = F(x).$$

Die Randbedingungen $u(0) = u(1) = 0$ liefern, vermöge der Substitution (59):

(61a) $$\psi(0) = \psi(1) = 0.$$

Die Aufgabe ist, das durch (61) und (61a) definierte Randwertproblem zu erledigen. Nun liegt es nahe, an die Eigenfunktionen $\varphi_\nu(x) = \sqrt{2} \sin \nu \pi x$ des Problems der freien Schwingungen zu denken, und die gegebene Funktion $F(x)$ in eine nach diesen Eigenfunktionen fortschreitende Reihe zu entwickeln, was ja formal wegen der Orthogonalitätseigenschaften der Eigenfunktionen $\varphi_\nu(x)$ stets möglich ist. Setzen wir die Konvergenz dieser Reihe voraus, so erhalten wir demgemäß:

(62) $$F(x) = \sum_{\nu}^{1,\infty} C_\nu \varphi_\nu(x),$$

wo C_ν nach den Entwickelungen der Nr. 136 durch die Gleichung bestimmt ist:

(63) $$C_\nu = \int_0^1 F(x) \varphi_\nu(x) \, dx.$$

Da $F(x)$ eine gegebene Größe ist, so sind die Koeffizienten C_ν vollkommen bekannt.

Genau die nämliche Entwickelung nach den Eigenfunktionen $\varphi_\nu(x)$ nehmen wir nun mit der gesuchten Funktion $\psi(x)$ der Gleichung (61) vor, indem wir setzen:

(64) $$\psi(x) = \sum_{\nu}^{1,\infty} D_\nu \varphi_\nu(x)$$

wobei nun aber, da ψ gesucht, die Größen D_ν selber unbekannt, d. h. zu bestimmen sind. Nehmen wir an, daß die Reihe (64) derartig konvergent sei, daß sie eine zweimalige Differentiation gestattet, so erhält man aus (64):

$$\psi''(x) = \sum_\nu^{1,\infty} D_\nu \varphi_\nu''(x), \tag{65}$$

und durch Einsetzen von (62), (64) und (65) in Gleichung (61) folgt endlich:

$$\sum_\nu^{1,\infty} D_\nu \varphi_\nu''(x) + \lambda \sum_\nu^{1,\infty} D_\nu \varphi_\nu(x) = \sum_\nu^{1,\infty} C_\nu \varphi_\nu(x),$$

oder:

$$\sum_\nu^{1,\infty} \{D_\nu \varphi_\nu''(x) + \lambda D_\nu \varphi_\nu(x) - C_\nu \varphi_\nu(x)\} = 0. \tag{66}$$

In dieser Gleichung ist es störend, daß ein Glied mit $\varphi_\nu''(x)$ auftritt, dessen Beseitigung erwünscht ist. Dazu verhilft uns ein Eingehen auf die Eigenschaften der Funktionen $\varphi_\nu(x) = \sqrt{2} \sin \nu \pi x$. Die Eigenfunktion $\varphi_\nu(x)$ war ja doch, wie in Nr. 135 ausführlich gezeigt ist, eine Lösung der homogenen Differentialgleichung für die freie Schwingung:

$$\varphi'' + \lambda \varphi = 0.$$

Diese schreiben wir, um anzudeuten, daß wir eine bestimmte Lösung φ_ν und den zugehörigen Eigenwert λ_ν herausgreifen:

$$\varphi_\nu''(x) + \lambda_\nu \varphi_\nu(x) = 0,$$

die identisch erfüllt ist. Also ist $\varphi_\nu''(x) = -\lambda_\nu \varphi_\nu(x)$, und kann durch diesen Wert in (66) ersetzt werden. Man erhält dann:

$$\sum_\nu^{1,\infty} \{-D_\nu \lambda_\nu + D_\nu \lambda - C_\nu\} \varphi_\nu(x) = 0. \tag{67}$$

Diese Gleichung kann für alle Werte von x nur dadurch erfüllt werden, daß die geschweifte Klammer verschwindet, was für das unbekannte D_ν die Gleichung liefert:

$$D_\nu = \frac{-C_\nu}{\lambda_\nu - \lambda}. \tag{68}$$

Damit ist gemäß Gleichung (64) die gesuchte Funktion $\psi(x)$ durch die bekannten Eigenfunktionen $\varphi_\nu(x)$ und die Werte D_ν bestimmt, so daß wir die Lösung der vorgelegten Gleichung (61) schreiben können:

$$\left\{\begin{aligned} \psi(x) &= \sum_\nu^{1,\infty} \frac{C_\nu}{\lambda - \lambda_\nu} \varphi_\nu(x), \quad \text{oder:} \\ \psi(x) &= \sqrt{2} \sum_\nu^{1,\infty} \frac{C_\nu}{\lambda - \lambda_\nu} \sin \nu \pi x, \end{aligned}\right. \tag{69}$$

Die Lösung wird also in Form einer Fourierschen Reihe erhalten und genügt wegen des Faktors $\sin \nu \pi x$ offensichtlich auch der Randbedingung (61a), wie es sein muß. Nach (59) erhalten wir also als Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (58):

$$u = \sqrt{2} \cos n t \sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{C_\nu}{\lambda - \lambda_\nu} \sin \nu \pi x, \tag{70}$$

wo man noch für C_ν, λ, λ_ν ihre Werte einzusetzen hätte. Wir wollen jedoch C_ν weiterstehen lassen und nur λ und λ_ν durch n resp. n_ν ausdrücken. Dann folgt:

$$u = \sqrt{2} \cos n t \sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{C_\nu c^2}{n^2 - n_\nu^2} \sin \nu \pi x. \tag{70a}$$

Man erkennt aus (70a) folgendes: Die erzwungene Schwingung hat die Frequenz n, d. h. die nämliche, die auch die störende Kraft nach (58) besitzt. Der Amplitudenfaktor derselben, $\sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{C_\nu c^2}{n^2 - n_\nu^2} \sin \nu \pi x$, setzt sich aus einer Reihe von Gliedern zusammen mit im allgemeinen endlicher Amplitude. Nur wenn zufällig $n = n_k$ wird, wo k einer der Werte $\nu = 1, 2 \ldots \infty$ ist, wird das betreffende Glied unendlich, also die ganze Lösung ebenfalls. D. h.: Wenn die Periode der störenden Kraft der Periode des Grundtones oder einer beliebigen Oberschwingung der Saite immer näher und näher kommt, wächst die Amplitude des betreffenden Gliedes schließlich über jedes Maß hinaus. Das ist genau das analoge Verhalten, wie wir es von der erzwungenen Schwingung eines einzelnen Massenpunktes her kennen, nur daß wir es hier mit unendlich vielen Eigenfrequenzen n_ν zu tun haben, während beim Massenpunkt naturgemäß nur eine vorhanden ist. Wenn Übereinstimmung zwischen n und einem der Werte n_ν eintritt, so sagen wir auch hier, es sei „Resonanz" mit einer bestimmten Schwingung der Saite vorhanden. In diesem Falle versagt die Lösung, die wir aufgestellt haben.

Dabei ist jedoch folgendes zu bedenken: Die jetzt betrachtete Lösung (70) enthält keine disponiblen Konstanten, vielmehr ist alles bestimmt. Es ist also gar nicht möglich, das jetzt untersuchte Integral einem beliebig gegebenen Anfangszustande anzupassen, etwa dem durch die Gleichung (16b) geforderten. Das zeigt uns, daß wir es nur mit einem partikulären Integral zu tun haben. Wir gehen jetzt dazu über, das allgemeine Integral zu bestimmen.

Dazu verhilft uns eine Überlegung analog derjenigen, die wir in Nr. 126 des vorigen Kapitels für die Poissonsche und Laplacesche Gleichung durchgeführt haben. Wir betrachten zwei Lösungen der vor-

gelegten Gleichung (58) etwa u_1 und u_2. Dadurch werden die folgenden Gleichungen identisch erfüllt:

$$(71)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \equiv f(x)\cos n t, \\ \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \equiv f(x)\cos n t, \end{cases}$$

deren Subtraktion liefert, wenn man $u_1 - u_2 = v$ setzt:

$$(72)\quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \equiv 0.$$

Die Differenz zweier Lösungen u_1 und u_2 der vorgelegten Gleichung (58) gehorcht also einer anderen Gleichung (72), die wir sofort als die der freien Schwingung der Saite erkennen, wie ein Vergleich mit (16) ergibt. Wir haben also:

$$(73)\quad u_1 = u_2 + v.$$

Der Sinn von (73) ist der folgende:

Das Integral u_1 der Differentialgleichung der erzwungenen Schwingung ist zusammengesetzt aus einem anderen Integral u_2 derselben Gleichung und dem uns bereits bekannten v der homogenen Gleichung, d. h. man kann aus einem partikulären Integral u_2 der inhomogenen Gleichung durch Hinzufügen des allgemeinen Integrals der homogenen Gleichung auch das allgemeine Integral für die inhomogene Gleichung erhalten. Nehmen wir demgemäß für u_2 die Lösung (70a), für v das Integral (34a), so erhält man als allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung:

$$(74)\quad \begin{cases} u = \sqrt{2}\cos n t \sum\limits_{\nu}^{1,\infty} \dfrac{C_\nu c^2}{n^2 - n_\nu^2} \sin \nu \pi x \\ \qquad + \sqrt{2} \sum\limits_{\nu}^{1,\infty} \sin \nu \pi x \left\{A_\nu \sin n_\nu t + B_\nu \cos n_\nu t\right\}. \end{cases}$$

Hier sind nun in der Tat unendlich viele disponible Konstanten A_ν und B_ν vorhanden, die eine Anpassung an einen beliebig vorgeschriebenen Anfangszustand ermöglichen. Soll z. B. für $t = 0$ die Saite in der Ruhelage ohne Geschwindigkeit sein, so muß:

$$(75)\quad \underset{t=0}{u} = 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = 0$$

sein. Das ergibt nach (74):

$$\underset{t=0}{u} = \sqrt{2} \sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{C_\nu c^2}{n^2 - n_\nu^2} \sin \nu \pi x + \sqrt{2} \sum_{\nu}^{1,\infty} B_\nu \sin \nu \pi x = 0,$$

oder

$$(76)\quad \frac{C_\nu c^2}{n^2 - n_\nu^2} + B_\nu = 0, \quad B_\nu = -\frac{C_\nu c^2}{n^2 - n_\nu^2}.$$

Damit geht ([illegible]) über in:

$$u = \sqrt{2}\sum_{\nu}^{1,\infty} \sin \nu\pi x \frac{C_\nu c^2}{n^2 - n_\nu^2}\left\{\cos n t - \cos n_\nu t\right\} + \sqrt{2}\sum_{\nu}^{1,\infty} A_\nu \sin \nu\pi x \cdot \sin n_\nu t.$$

Wegen der zweiten Bedingung (75) verschwindet endlich A_ν, so daß die dem Anfangszustande (75) angepaßte allgemeine Lösung für die erzwungene Schwingung lautet:

$$(77) \qquad u = \sqrt{2}\sum_{\nu}^{1,\infty} \sin \nu\pi x \frac{C_\nu c^2}{n^2 - n_\nu^2}\left\{\cos n t - \cos n_\nu t\right\}.$$

Wir wollen nun wieder sehen, was eintritt, wenn n einem der Werte n_ν, den wir mit n_k bezeichnen wollen, immer näher und näher kommt. Dann

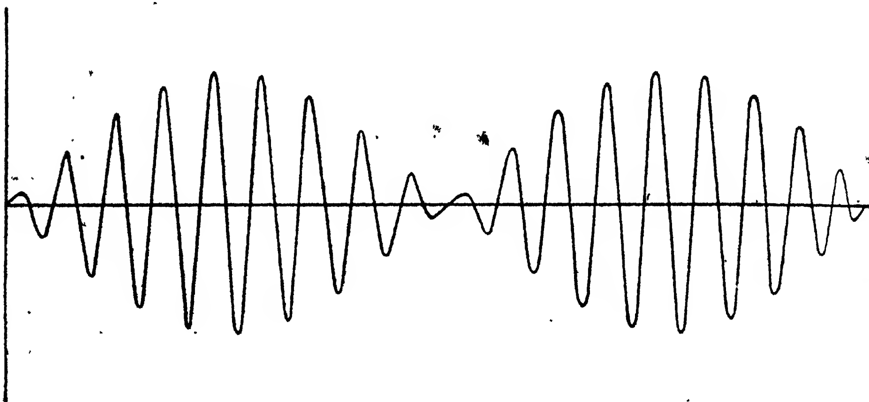


Fig. 173.

wird der Nenner des k^{ten} Gliedes immer kleiner, so daß schließlich die ganze Bewegung durch dieses k^{te} Glied bestimmt wird, indem alle übrigen dagegen zurücktreten:

$$(78) \qquad u \cong \sqrt{2} \sin k\pi x \frac{C_k c^2}{n^2 - n_k^2}\left\{\cos n t - \cos n_k t\right\}.$$

Darin sind n und n_k sehr benachbarte Zahlen. Was nun eintritt, ist am einfachsten zu übersehen, wenn man die Differenz der Kosinusse als Produkt darstellt, also (78) in der Form schreibt:

$$(79) \qquad u \cong 2\sqrt{2} \sin k\pi x \frac{C_k c^2}{n^2 - n_k^2} \sin \frac{n + n_k}{2} t \cdot \sin \frac{n_k - n}{2} t.$$

Das kann man auffassen als eine Schwingung $\sin \frac{n + n_k}{2} t$, die aber den variablen Amplitudenfaktor $\sin \frac{n_k - n}{2} t$ besitzt. Man erhält also in 2π Sekunden wegen des Verschwindens dieses Faktors ein $(n_k - n)$-

maliges Stärker- und Schwächerwerden der Schwingung, eine sogenannte Schwebung, die das Bild der Fig. 173 liefert.

Lassen wir schließlich $n = n_k$ werden, so wird (78) nicht unendlich, wie früher das partikuläre Integral, sondern nimmt die unbestimmte Form $0:0$ an. Man erhält dessen Wert in bekannter Weise, indem man Zähler und Nenner nach n differentiiert und nach vollzogener Differentiation $n = n_k$ setzt. Dann folgt für diesen Fall der Resonanz:

(80) $$u \cong -\sqrt{2} \sin k\pi x \cdot C_k c^2 \cdot \frac{t}{2} \cdot \sin n_k t,$$

d. h. man erhält einen für alle endlichen Zeiten endlichen Wert. Da ferner nun die Amplitude den Faktor t enthält, ist dieselbe zunächst sehr klein, wächst aber proportional mit der Zeit an; dieses allmähliche Wachstum stellt das „Anschwingen" der Saite dar. Erst nach unendlich langer Zeit hat die Saite von der erregenden Kraft einen unendlichen Betrag von Energie entnommen; die Amplitude ist dann unendlich. Dieses Resultat kann physikalisch selbstverständlich nie realisiert werden, da die stets vorhandenen, wenn auch kleinen Reibungskräfte dies verhindern und diese in unserer Analyse bisher nicht berücksichtigt worden sind. Wir wollen die Reibungskräfte jedoch vorläufig nicht in die Gleichung einführen, sondern nun zur strengen Theorie übergehen.

139. Die Greensche Funktion der schwingenden Saite.

Wir gehen wieder aus von den Gleichungen (16) und (16a):

(16) $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

(16a) $$u(0) = u(1) = 0,$$

die das Randwertproblem, mit dem wir uns befassen, definieren. Wir wollen nun eine ganz spezielle Lösung u betrachten, nämlich eine Lösung für den stationären Zustand, in dem also u von der Zeit unabhängig wird.

Dafür ist nach Gleichung (16):

(81) $$\frac{d^2 u}{d x^2} = 0, \quad \text{also} \quad u = Ax + B.$$

Nach (16a) erhält man dann für die Koeffizienten A und B die Werte 0, wie eine elementare Rechnung ergibt, d. h. die hier betrachtete Lösung des stationären Zustandes ist völlig uninteressant. Man kann jedoch zu von Null verschiedenen Lösungen des stationären Zustandes kommen, wenn man einem Punkt der Saite, den wir ξ nennen wollen, eine feste Verrückung: $u_\xi = u_0$ erteilt, was natürlich nur so geschehen kann, daß in $x = \xi$ eine auf diesen Punkt beschränkte Kraft angreift, die den Saiten-

punkt ξ aus seiner Ruhelage herauszieht und ihm die gewünschte Ablenkung erteilt. Das gibt also folgende Bedingungen:

I. für $x < \xi$,	II. für $x = \xi$,	III. für $x > \xi$,
$u''(x) = 0$,	$u(x) = u_0$,	$u''(x) = 0$,
$u(0) = 0$,		$u(1) = 0$.

Für $x<\xi$ ergibt sich demgemäß: Zunächst ist $u = A_1 x + B_1$, und wegen der Bedingung $u(0) = 0$ muß B_1 verschwinden, also:

(82) $$\text{für } x<\xi: \quad u = A_1 x.$$

Für $x>\xi$ folgt ebenso: $u = A_2 x + B_2$ und wegen der Forderung $u(1) = 0$ muß $A_2 + B_2 = 0$ werden, also:

(83) $$\text{für } x>\xi: \quad u = A_2(x-1).$$

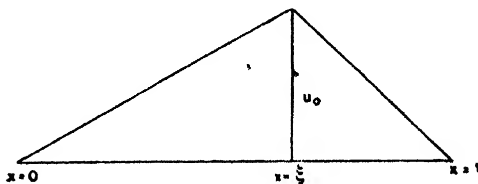


Fig. 174.

Beide Werte müssen für $x=\xi$ gleich und zwar gleich dem Werte u_0 werden. Also nach (82) und (83) für $x=\xi$:

$$A_1\xi = u_0 = A_2(\xi-1),$$

und daraus folgt:

(84) $$A_2 = \frac{A_1\xi}{\xi-1}, \quad A_1 = \frac{u_0}{\xi}.$$

Mit diesen Werten erhält man endlich für die gesuchte Lösung aus (82), (83) und (84):

(85) $$\begin{cases} u = \dfrac{u_0 x}{\xi} & \text{für } 0 \leqq x \leqq \xi; \\ u = \dfrac{u_0(x-1)}{\xi-1} & \text{für } \xi \leqq x \leqq 1. \end{cases}$$

Die durch (85) dargestellte Lösung hat also folgende Gestalt (Fig. 174): Sie stellt eine gebrochene Linie dar, die **zwar stetig verläuft**, aber **am Punkte $x=\xi$ einen unstetigen ersten Differentialquotienten hat**. Denn in der Tat ist nach (85), wenn wir zunächst $x<\xi$ nehmen, $\frac{du}{dx} = \frac{u_0}{\xi}$, welchen Wert man auch erhält, wenn man sich von kleineren Werten — wir wollen sagen „von unten" — dem Werte ξ nähert. Wir

bezeichnen dies durch das bekannte Symbol $\left(\frac{du}{dx}\right)_{\xi-0}$. Anderseits ist für $x>\xi$ nach (85): $\frac{du}{dx} = \frac{u_0}{\xi-1}$, welcher Wert auch noch im Punkte ξ gilt, oder genauer im Punkte $\xi+0$. Wir erhalten also:

$$(86)\quad \left(\frac{du}{dx}\right)_{\xi-0} - \left(\frac{du}{dx}\right)_{\xi+0} = \frac{du}{dx}\Big|_{\xi+0}^{\xi-0} = u_0\left\{\frac{1}{\xi} - \frac{1}{\xi-1}\right\} = -\frac{u_0}{\xi(\xi-1)}.$$

Man kann diese Unstetigkeit des Differentialquotienten offenbar als ein **Maß der Kraft** betrachten, die den Punkt $x=\xi$ angreift. Wählen wir also speziell die Kraft in diesem Maße gleich 1, d. h. machen wir den Sprung des ersten Differentialquotienten an der Stelle $x=\xi$ zu 1, so erhalten wir zur Bestimmung von u_0:

$$(87)\quad u_0 = -\xi(\xi-1),$$

also durch Einsetzen in die Lösung (85), deren endgültige Form:

$$(88)\quad \begin{cases} u = x(1-\xi), & \text{für } 0 \leqq x \leqq \xi, \\ u = \xi(1-x), & \text{für } \xi \leqq x \leqq 1. \end{cases}$$

Betrachten wir diese Lösung als Funktion der beiden Argumente x und ξ, so bezeichnen wir sie durch $G(x,\xi)$ und nennen sie vorläufig die „**Greensche Funktion des Randwertproblems**“, aus Gründen, die später zutage treten werden.

Es handelt sich darum, die Eigenschaften derselben klar zu stellen. Nach der Herleitung haben wir zunächst folgende, die unmittelbar aus (81) bis (88) sich ergeben:

$$(89)\quad \begin{cases} \frac{d^2G(x\xi)}{dx^2} = 0, \quad \frac{dG(x\xi)}{dx}\Big|_{\xi+0}^{\xi-0} = 1; \\ G(x\xi)|^0 = G(x\xi)|^1 = 0. \end{cases}$$

Auf eine weitere Eigenschaft führt uns nun die Betrachtung der Gleichung (88). Man erkennt dort, daß $G(x\xi)$ **in beiden Argumenten symmetrisch ist**, d. h. wenn man x mit ξ vertauscht, so vertauschen sich ja gleichzeitig die beiden Intervalle $0\leqq x\leqq\xi$ resp. $\xi\leqq x\leqq 1$, und man erhält wieder dieselben Funktionswerte. **Daß dies allgemein so sein muß**, lehrt der folgende Beweis: Wir wollen noch eine zweite Lösung derselben Art betrachten, deren erste Ableitung aber nicht am Punkte $x=\xi$, sondern an einem anderen beliebigen ξ_1 die Unstetigkeit 1 haben soll. Diese neue **Greensche Funktion** gehorcht den (89) entsprechenden Gleichungen:

$$(90)\quad \frac{d^2G(x\xi_1)}{dx^2} = 0, \quad \frac{dG(x\xi_1)}{dx}\Big|_{\xi_1+0}^{\xi_1-0} = 1;$$
$$G(x\xi_1)|^0 = G(x\xi_1)|^1 = 0.$$

Multipliziert man die ersten Gleichungen (89) und (90) resp. mit $G(x\xi_1)$ und $G(x\xi)$, und subtrahiert, so erhält man:

$$G(x\,\xi_1)\frac{d^2G(x\,\xi)}{d\,x^2} - G(x\,\xi)\frac{d^2G(x\,\xi_1)}{d\,x^2} = 0,$$

oder:

$$\frac{d}{d\,x}\left[G(x\,\xi_1)\frac{d\,G(x\,\xi)}{d\,x} - G(x\,\xi)\frac{d\,G(x\,\xi_1)}{d\,x}\right] = 0. \tag{91}$$

Wären die Funktionen $G'(x\xi)$ und $G'(x\xi_1)$, wie wir die Differentialquotienten kurz bezeichnen wollen, in dem Grundgebiet von 0 bis 1 stetig, so würde daraus zu schließen sein, daß der Klammerausdruck konstant wäre. Dieser Schluß ist aber hier unerlaubt, weil $G'(x\xi)$ am Punkte ξ, und $G'(x\xi_1)$ am Punkte ξ_1 eine durch (89) resp. (90) definierte Unstetigkeit vom Betrage 1 haben. Multiplizieren wir (91) mit dx und integrieren über das Grundgebiet, so müssen wir das Intervall 0 bis 1 zerlegen in Teilintervalle, in denen die in Betracht kommenden Funktionen stetig sind. Ist z. B. $\xi < \xi_1$, so haben wir folgende Teilintervalle zu nehmen:

(92) $\qquad 0$ bis $\xi - 0$; $\quad \xi + 0$ bis $\xi_1 - 0$; $\quad \xi_1 + 0$ bis 1.

So folgt aus (91):

$$\left\{\begin{aligned} &\int_0^{\xi-0}\frac{d}{d\,x}\Big\{G(x\,\xi_1)G'(x\,\xi) - G(x\,\xi)G'(x\,\xi_1)\Big\}\,d\,x \\ &+\int_{\xi+0}^{\xi_1-0}\frac{d}{d\,x}\Big\{\qquad\Big\}\,d\,x + \int_{\xi_1+0}^{1}\frac{d}{d\,x}\Big\{\qquad\Big\}\,d\,x = 0, \end{aligned}\right. \tag{93}$$

oder nach Ausführung der Integrationen:

$$\left\{\begin{aligned} &\Big[G(x\,\xi_1)G'(x\,\xi) - G(x\,\xi)G'(x\,\xi_1)\Big]_0^{\xi-0} + \Big[G(x\,\xi_1)G'(x\,\xi) - G(x\,\xi)G'(x\,\xi_1)\Big]_{\xi+0}^{\xi_1-0} \\ &\qquad + \Big[G(x\,\xi_1)G'(x\,\xi) - G(x\,\xi)G'(x\,\xi_1)\Big]_{\xi_1+0}^{1} = 0. \end{aligned}\right. \tag{94}$$

Diese Gleichung lautet ausführlich geschrieben folgendermaßen:

$$\left\{\begin{aligned} &G(\xi\,\xi_1)\cdot\frac{d\,G(x\,\xi)}{d\,x}\Big|^{\xi-0} - G(0\,\xi_1)\frac{d\,G(0\,\xi)}{d\,x} - G(\xi\,\xi)\cdot\frac{d\,G(x\,\xi)}{d\,x}\Big|^{\xi-0} \\ &+ G(0\,\xi)\frac{d\,G(0\,\xi)}{d\,x} + G(\xi_1\xi_1)\frac{d\,G(x\,\xi)}{d\,x}\Big|^{\xi_1-0} - G(\xi\,\xi_1)\frac{d\,G(x\,\xi)}{d\,x}\Big|^{\xi+0} \\ &- G(\xi_1\,\xi)\frac{d\,G(x\,\xi_1)}{d\,x}\Big|^{\xi_1-0} + G(\xi\,\xi)\frac{d\,G(x\,\xi_1)}{d\,x}\Big|^{\xi+0} + G(1\,\xi_1)\frac{d\,G(1\,\xi)}{d\,x} \\ &- G(\xi_1\,\xi_1)\frac{d\,G(x\,\xi)}{d\,x}\Big|^{\xi_1+0} - G(1\,\xi)\frac{d\,G(1\,\xi_1)}{d\,x} + G(\xi_1\xi)\frac{d\,G(x\,\xi_1)}{d\,x}\Big|^{\xi_1+0} = 0. \end{aligned}\right. \tag{95}$$

Darin fallen das zweite, vierte, neunte und elfte Glied fort, da nach Ausweis von (89) und (90) $G(x\xi)$ und $G(x\xi_1)$ für $x=0$ und $x=1$ verschwinden, d. h. die Randbedingungen des vorgelegten Problems erfüllen. In geeigneter Zusammenfassung kann man die übrigbleibenden Glieder schreiben:

$$(96)\quad \begin{cases} G(\xi\xi_1)\left\{\frac{dG(x\xi)}{dx}\Big|_{\xi+0}^{\xi-0}\right\} - G(\xi\xi)\left\{\frac{dG(x\xi_1)}{dx}\Big|_{\xi+0}^{\xi-0}\right\} \\ +G(\xi_1\xi_1)\left\{\frac{dG(x\xi)}{dx}\Big|_{\xi_1+0}^{\xi_1-0}\right\} - G(\xi_1\xi)\left\{\frac{dG(x\xi_1)}{dx}\Big|_{\xi_1+0}^{\xi_1-0}\right\} = 0. \end{cases}$$

In (96) fallen das zweite und dritte Glied fort, da nach Voraussetzung $G'(x\xi_1)$ an der Stelle ξ und $G'(x\xi)$ an der Stelle ξ_1 stetig sind. Da die im ersten und vierten Gliede auftretende Unstetigkeit von $G'(x\xi)$ resp. $G'(x\xi_1)$ den Betrag 1 hat, so folgt schließlich die einfache Relation:

$$(97)\qquad G(\xi\xi_1) = G(\xi_1\xi),$$

die ausspricht, was zu beweisen war, daß die Greensche Funktion bezüglich der beiden Argumente ξ und ξ_1 symmetrisch ist; da ξ_1 ein beliebiger Wert von x sein kann, so ist (97) identisch mit

$$(97a)\qquad G(x\xi) = G(\xi x).$$

Eine weitere Eigenschaft der Greenschen Funktion lernen wir folgendermaßen kennen: Nach dem Vorhergehenden stellt $G(x\xi)$ die Verrückung der Saite unter dem Einfluß einer an der Stelle $x=\xi$ wirkenden Kraft von der Intensität 1 dar. Da die Verrückung an der Stelle ξ proportional der Kraft ist, so stellt analog $G(x\xi)\cdot f(\xi)$ die Verrückung dar, wenn die an der Stelle ξ wirkende Kraft die Intensität $f(\xi)$ hat. Natürlich ist auch jetzt die Größe $G(x\xi)f(\xi)$ eine Lösung der stationären Gleichung $\frac{du^2}{dx^2}=0$, da ja $f(\xi)$ in Bezug auf die Differentiation nach x als konstant zu behandeln ist. Da ferner die Gleichung $\frac{d^2u}{dx^2}=0$ linear ist, so kann man eine endliche Anzahl von Ausdrücken von der Form $A_n G(x\xi_n) f_n(\xi_n)$ addieren, wobei die Summe jetzt ebenfalls noch Lösung der erwähnten Gleichung ist, also:

$$u = A_0 G(x\xi_0) f_0(\xi_0) + A_1 G(x\xi_1) f_1(\xi_1) + \dots A_n G(x\xi_n) f_n(\xi_n).$$

Wenn wir dagegen nicht an diskreten Punkten $\xi_0, \xi_1, \dots \xi_n$ die Kräfte $f_0(\xi_0), f_1(\xi_1) \dots$ wirken lassen, sondern an jedem Punkte ξ der Saite eine unendlich kleine Kraft von der Größe $f(\xi)d\xi$ anbringen, d. h. wenn wir von einer endlichen zu einer unendlichen Summe übergehen, so ändert sich die Sache. Wir betrachten die so entstehende Funktion:

$$(98)\qquad F(x) = \int_0^1 G(x\xi) f(\xi)\, d\xi.$$

Hier ist $F(x)$ nicht mehr eine Lösung der Gleichung für den stationären Zustand $\frac{d^2 u}{d x^2}=0$, d. h. es ist nicht mehr $\frac{d^2 F}{d x^2}=0$, sondern die zweite Ableitung hat einen von Null verschiedenen Wert. Um dies einzusehen, haben wir nur (98) zweimal zu differentiieren. Zunächst ergibt sich:

$$\frac{d F(x)}{d x}=\int_0^1 \frac{\partial G(x \xi)}{\partial x} f(\xi) d \xi . \tag{99}$$

Wenn diese Gleichung nochmals differentiiert werden soll, so ist die Unstetigkeit der Größe $\frac{\partial G(x \xi)}{\partial x}$ zu beachten; deshalb zerlegen wir das Integral in zwei Intervalle von 0 bis $x-0$ und $x+0$ bis 1. Also:

$$\frac{d F(x)}{d x}=\int_0^{x-0} \frac{\partial G(x \xi)}{\partial x} f(\xi) d \xi+\int_{x+0}^{0} \frac{\partial G(x \xi)}{\partial x} f(\xi) d \xi . \tag{99a}$$

Wenn diese Gleichung nach x differentiiert wird, so ist zu berücksichtigen, daß x sowohl unter dem Integralzeichen als auch in der unteren resp. oberen Grenze vorkommt. Dann gelten die Formeln: Wenn etwa

$$\psi(x)=\int_a^x \varphi(x \xi) d \xi$$

ist, so ist

$$\frac{d \psi(x)}{d x}=\int_a^x \frac{d \varphi(x \xi)}{d x} d \xi+\varphi(x x). \tag{100a}$$

Ist ferner:

$$\chi(x)=\int_x^b \varphi(x \xi) d \xi,$$

so ist:

$$\frac{\partial \chi(x)}{d x}=\int_x^b \frac{d \varphi(x \xi)}{d x} d x-\varphi(x x). \tag{100b}$$

Danach ergibt sich aus (99a):

$$\begin{cases} \frac{d^2 F}{d x^2}=\int_0^{x-0} \frac{\partial^2 G(x \xi)}{\partial x^2} f(\xi) d \xi+\left[\frac{d G(x \xi)}{d x}\right]_{\xi=x-0} \cdot f(x) \\ \qquad +\int_{x+0}^{1} \frac{\partial^2 G(x \xi)}{\partial x^2} f(\xi) d \xi-\left[\frac{d G(x \xi)}{d x}\right]_{\xi=x+0} \cdot f(x). \end{cases} \tag{101}$$

Da aber nach (89) $G''(x\xi)=0$ ist, so reduziert sich dies auf:

$$\frac{d^2 F}{d x^2}=-f(x) \cdot \frac{d G(x \xi)}{d x}\Bigg|_{\xi=x-0}^{\xi=x+0},$$

oder, ausführlicher geschrieben:

(102) $$\frac{d^2 F}{d x^2} = - f(x)\left\{- \frac{d G(x, x-0)}{d x} + \frac{d G(x, x+0)}{d x}\right\}.$$

Der Klammerausdruck hat also nach der zweiten Gleichung (89) den Wert $+1$[1]), da an der Stelle, wo die Integrationsvariable ξ den Wert x passiert, die bereits bekannte Unstetigkeit im ersten Differentialquotienten der Greenschen Funktion auftritt, also ist:

(103) $$\frac{d^2 F}{\partial x^2} = - f(x).$$

Das Resultat kommt, wie die Ableitung zeigt, dadurch zustande, daß $G(x\xi)$ die Randbedingungen des Problems erfüllt und an der Stelle $\xi = x$ der erste Differentialquotient eine Unstetigkeit vom Betrage 1 besitzt.

Da dieses Resultat [Gleichung (103)] im ersten Momente vielleicht überraschend ist, so ist es zweckmäßig, darauf hinzuweisen, daß wir hier nur das eindimensionale Analogon zum Verhalten des Potentials vor uns haben. In der Tat ist ja die Gleichung $\frac{d^2 F}{d x^2} = 0$ die eindimensionale Laplacesche, die Gleichung $\frac{d^2 F}{d x^2} = - f(x)$ die eindimensionale Poissonsche Gleichung. Nun wissen wir bereits, daß $\frac{m}{R}$ eine Lösung der gewöhnlichen Laplaceschen Gleichung ist, und daß sich daran nichts ändert, wenn man eine endliche Summe $\sum \frac{m_\nu}{R_\nu}$ von derartigen Ausdrücken

---

[1]) Man könnte auf den ersten Blick versucht sein zu glauben, daß die geschweifte Klammer in (102) gemäß der zweiten Gleichung (89) den Wert -1 haben müßte. Schreiben wir indessen die zweite Gleichung (89) in derselben Weise wie (102), so lautet sie:

$$\frac{d G(\xi - 0, \xi)}{d x} - \frac{d G(\xi + 0, \xi)}{d x} = -1.$$

Man erkennt, daß (102) sich dadurch von dieser letzten Gleichung unterscheidet, daß — abgesehen von der unwesentlichen Benennung — die Reihenfolge der Argumente vertauscht ist. Betrachten wir einen Augenblick den Ausdruck $G'(x, x - \varepsilon)$, so ist offenbar die Grenze, der er sich für $\varepsilon = 0$ nähert, gleich dem Ausdruck $G'(x, x - 0)$. Bezeichnen wir nun $x - \varepsilon$ durch y, also x durch $y + \varepsilon$, so kann $G'(x, x - \varepsilon)$ geschrieben werden: $G'(y + \varepsilon, y)$, oder, wenn man, da es auf die Benennung der Variabeln nicht ankommt, y wieder durch x ersetzt: $G(x + \varepsilon, x)$. Man hat also, wenn man zur Grenze $\varepsilon = 0$ übergeht, die Beziehung:

$$G'(x, x - 0) = G'(x + 0, x),$$

und ebenso:

$$G'(x, x + 0) = G'(x - 0\ x).$$

Also ist die geschweifte Klammer in (102) gleich:

$$G'(x - 0, x) - G'(x + 0, x),$$

also identisch mit der zweiten Gleichung (89), folglich gleich $+1$, was zu beweisen war.

zusammensetzt. In dem Momente jedoch, in dem man vom Potential eines Systems von Massenpunkten zum Potential kontinuierlich verbreiteter Massen $\int \frac{\varepsilon\, d\tau}{R}$ übergeht, gehorcht dasselbe nicht mehr der Laplaceschen, sondern der Poissonschen Gleichung. Diese Analogie geht noch weiter. Dem Unendlichwerden des Potentials eines Massenpunktes, wenn der Aufpunkt mit dem Massenpunkte selbst zusammenfällt ($R=0$), entspricht hier im eindimensionalen Falle die Unstetigkeit des ersten Differentialquotienten an der Stelle $x=\xi$. Und wie gerade das Unendlichwerden des Potentials für $R=0$ im Greenschen Satze es ermöglicht, die gesuchte Funktion gerade in diesem Punkte zu bestimmen, so wird im folgenden die Unstetigkeit des ersten Differentialquotienten die Bildung einer Integralgleichung, d. h. die Bestimmung der gesuchten Funktion an der Stelle $x=\xi$ ermöglichen; denn die Integralgleichung, zu deren Bildung wir gleich übergehen, ist nichts anderes als der eindimensionale Greensche Satz.

Mit einer Bezeichnungsweise, die der Theorie der Wärmeleitung (oder auch der Elektrostatik) entnommen ist, nennt man eine Funktion $F(x)$, die mit Hilfe der Greenschen Funktion $G(x\xi)$ in der Form (98) dargestellt werden kann, „quellenmäßig dargestellt" oder auch kurz eine „quellenmäßige" Funktion.

Welche Eigenschaften hat $F(x)$?

Erstens: Da $G(0,\xi)=G(1,\xi)=0$ ist, so muß wegen (98) auch $F(0)=F(1)=0$ sein, d. h. die quellenmäßig dargestellte Funktion erfüllt dieselben Randbedingungen wie die zugehörige Greensche Funktion.

Zweitens: Die Funktion $f(x)$ habe etwa folgende Stetigkeitseigenschaften: In dem Grundgebiet von 0 bis 1 sei eine endliche Anzahl von Stellen vorhanden, an denen $f(x)$ unstetig ist; innerhalb dieser Teilstrecken jedoch sei die Funktion stetig. Eine derartige Funktion bezeichnen wir als „stückweise stetig". Man erkennt dann leicht aus (98) und (99), daß die quellenmäßig dargestellte Funktion und ihre erste Ableitung stetige Funktionen von x sind. Denn in den Gleichungen (98) und (99) kann man die Integrale auf der rechten Seite in Teilintervalle zerlegen, innerhalb der die Funktion $f(x)$ stetig ist. Also ist die quellenmäßig dargestellte Funktion und ihre erste Ableitung als eine endliche Summe stetiger Funktionen dargestellt, mithin selbst stetig.

Drittens: Nach den eben getroffenen Voraussetzungen über $f(x)$ ist nach (103) die zweite Ableitung von $F(x)$ stückweise stetig. Also hat eine quellenmäßig dargestellte Funktion folgende Eigenschaften: **Sie ist stetig, erfüllt die Randbedingungen der Greenschen Funktion, hat eine stetige erste und eine stückweise stetige zweite Ableitung.**

Das legt umgekehrt die Frage nahe: **Kann eine Funktion mit diesen Eigenschaften stets quellenmäßig dargestellt werden?**

Wir wollen beweisen, daß dies in der Tat der Fall ist. Sei $\Phi(x)$ eine Funktion von der verlangten Beschaffenheit, insbesondere also sei $\Phi(0)=\Phi(1)=0$, und es werde die zweite Ableitung durch $-f(x)$ bezeichnet, dann haben wir folgende Gleichungen, wenn wir diejenige für die Greensche Funktion mit hinzunehmen:

$$(104)\qquad \begin{cases} -\Phi''(x) = f(x), \\ G''(x\xi) = 0. \end{cases}$$

Erweitert man die erste Gleichung (104) mit $G(x\xi)$, die zweite mit $\Phi(x)$ und addiert, so folgt:

$$-G(x\xi)\Phi''(x) + G''(x\xi)\Phi(x) = G(x\xi)f(x),$$

oder:

$$(105)\qquad \frac{d}{dx}\Big[\Phi(x)G'(x\xi) - G(x\xi)\Phi'(x)\Big] = G(x\xi)f(x).$$

Integriert man dies nach x über das Grundgebiet, wobei man infolge der Unstetigkeit von $G'(x\xi)$ für $x=\xi$ das Integrationsgebiet in zwei Teile 0 bis $\xi-0$ und $\xi+0$ bis 1 teilen muß, so folgt:

$$(106)\quad \int_0^{\xi-0}\frac{d}{dx}\Big[\Phi(x)G'(x\xi) - G(x\xi)\Phi'(x)\Big] + \int_{\xi+0}^{1}\frac{d}{dx}\Big[\qquad\Big]dx = \int_0^1 G(x\xi)f(x)\,dx.$$

Die Ausführung der Integrationen links ergibt das Resultat:

$$\overline{\underline{\Phi(x)G'(x\xi) - G(x\xi)\Phi'(x)}}\Big|_0^{\xi-0} + \overline{\underline{\Phi(x)G'(x\xi) - G(x\xi)\Phi'(x)}}\Big|_{\xi+0}^{1} = \int_0^1 G(x\xi)f(x)\,dx,$$

oder, ausführlicher geschrieben:

$$(107)\quad \begin{cases} \Phi(\xi)G'(x\xi)\big|^{\xi-0} - \Phi(0)G'(0\xi) - G(\xi\xi)\Phi'(\xi) + G(0\xi)\Phi'(0) \\ +\Phi(1)G'(1\xi) - \Phi(\xi)G'(x\xi)\big|^{\xi+0} - G(1\xi)\Phi'(1) + G(\xi\xi)\Phi'(\xi) \\ \qquad = \int_0^1 G(x\xi)f(x)\,dx. \end{cases}$$

Darin fallen, da $G(x\xi)$ und $\Phi(x)$ die Randbedingungen erfüllen, das zweite, vierte, fünfte und siebente Glied fort. Das dritte und achte heben sich gegenseitig auf, so daß schließlich bleibt:

$$\Phi(\xi)\Big\{G'(x\xi)\Big|^{\xi-0} - G'(x\xi)\Big|^{\xi+0}\Big\} = \Phi(\xi)G'(x\xi)\Big|_{\xi+0}^{\xi-0} = \int_0^1 G(x\xi)f(x)\,dx;$$

und dies ergibt mit Rücksicht auf die bekannte Unstetigkeit von $G'(x\xi)$ das Endresultat:

$$\Phi(\xi) = \int^1 G(x\xi)f(x)\,dx.$$

Vertauscht man noch die Bedeutung der Buchstaben x und ξ, — was ja zulässig ist, da es sich nur um eine andere Benennung handelt —, so ersieht man aus der folgenden Gleichung:

$$\Phi(x) = \int_0^1 G(x\,\xi) f(\xi)\, d\xi, \tag{108}$$

daß $\Phi(x)$ in der Tat quellenmäßig darstellbar ist.

140. Bildung einer Integralgleichung.

Nach diesen einleitenden Ausführungen kehren wir wieder zu unserem Randwertproblem (16) und (16a) zurück, das wir hier nochmals anschreiben:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \\ u(0) = u(1) \quad = 0. \end{cases} \tag{109}$$

Setzt man, wie früher:

$$u = \varphi(x) \cos nt,$$

so folgt aus (109):

$$\begin{cases} \varphi''(x) + \lambda\, \varphi(x) = 0, \\ \varphi(0) \;=\; \varphi(1) \quad = 0, \end{cases} \tag{110}$$

wo λ eine zu bestimmende Größe ist. Die Greensche Funktion $G(x\xi)$ gehorcht nach den Auseinandersetzungen der vorigen Nummer der Differentialgleichung:

$$G''(x\xi) = 0, \tag{111}$$

und den nämlichen Randbedingungen wie $\Phi(x)$. Erweitert man die erste Gleichung (110) mit $G(x\xi)$, (111) mit $\varphi(x)$ und subtrahiert, so folgt:

$$\varphi''(x)\, G(x\xi) - G''(x\xi)\, \varphi(x) = -\lambda\, G(x\xi)\, \varphi(x); \tag{111a}$$

der auf der linken Seite stehende Ausdruck ist, wie wir schon in der vorhergehenden Nummer andeuteten, das eindimensionale Analogon zu dem Greenschen Differentialausdruck $(\Delta v \cdot u - \Delta u \cdot v)$, den wir z. B. in Gleichung (13) des XIII. Kapitels auf pag. 554 verwendet haben.

Durch Multiplikation mit dx und Integration über das Grundgebiet ergibt sich:

$$\int_0^1 \frac{d}{dx}\Big[\varphi'(x) G(x\,\xi) - G'(x\,\xi)\, \varphi(x)\Big]\, dx = -\lambda \int_0^1 G(x\,\xi)\, \varphi(x)\, dx. \tag{112}$$

Wegen der Unstetigkeit von $G'(x\xi)$ im Punkte $x = \xi$ teilen wir wieder das Intervall und schreiben ausführlicher:

$$\int_0^{\xi - 1} \frac{d}{dx}\Big[\qquad\Big]\, dx + \int_{\xi + 0}^1 \frac{d}{dx}\Big[\qquad\Big]\, dx = -\lambda \int_0^1 G(x\,\xi)\, \varphi(x)\, dx.$$

Die Ausführung der Integration ergibt:

$$(113)\quad \begin{cases} \overline{\varphi'(x)G(x\xi) - G'(x\xi)\,\varphi(x)}\Big|_0^{\xi-0} + \overline{\varphi'(x)G(x\xi) - G'(x\xi)\,\varphi(x)}\Big|_{\xi+0}^{1} \\ \qquad = -\lambda \int\limits_0^1 G(x\xi)\,\varphi(x)\,dx. \end{cases}$$

Vollständig geschrieben lautet die linke Seite:

$$\varphi'(\xi)G(\xi\xi) - \varphi'(0)G(0\xi) - \varphi(\xi)G'(x\xi)\Big|^{\xi-0} + \varphi(0)G'(0\xi)$$
$$+ \varphi'(1)G(1\xi) - \varphi'(\xi)G(\xi\xi) - \varphi(1)G'(1\xi) + \varphi(\xi)G'(x\xi)\Big|^{\xi+0}.$$

Darin sind das zweite, vierte, fünfte, siebente Glied wegen der Randbedingungen gleich 0, das erste und sechste heben sich gegenseitig auf, so daß übrig bleibt:

$$-\varphi(\xi)\left\{G'(x\xi)\Big|^{\xi-0} - G'(x\xi)\Big|^{\xi+0}\right\} = -\lambda \int\limits_0^1 G(x\xi)\,\varphi(x)\,dx,$$

was mit Rücksicht auf die Unstetigkeit vom Betrage 1 von $G'(x\xi)$ ergibt:

$$(114)\qquad \varphi(\xi) = \lambda \int\limits_0^1 G(x\xi)\,\varphi(x)\,dx.$$

Diese Gleichung spricht aus, daß jede Lösung $\varphi(x)$ der vorgelegten Differentialgleichung, d. h. jede Eigenfunktion $\varphi_\nu(x)$ auch der Funktionalgleichung (114) genügt. Diese Funktionalgleichung steht also offenbar in enger Beziehung zum Randwertproblem, und deshalb ist sie in neuerer Zeit in den Vordergrund des Interesses getreten. Man nennt die Funktionalgleichung (114) eine „Fredholmsche Integralgleichung", oder auch kurz „Integralgleichung", und zwar ist (114) im besonderen eine homogene Integralgleichung, da kein von $\varphi(x)$ freies Glied vorkommt.

Daß die Eigenfunktionen des Randwertproblems gleichzeitig Lösungen einer homogenen Integralgleichung sind, ist im Vorhergehenden gezeigt worden. Es ist aber auch leicht umgekehrt zu zeigen, daß jede Funktion $\varphi(\xi)$, die der homogenen Integralgleichung (114) genügt, auch die Differentialgleichung (109) befriedigt. Denn schreiben wir (114) folgendermaßen:

$$(114\text{a})\qquad \frac{\varphi(\xi)}{\lambda} = \int\limits_0^1 G(x\xi)\,\varphi(x)\,dx,$$

so erkennt man, daß $\frac{\varphi(\xi)}{\lambda}$ eine quellenmäßig dargestellte Funktion ist. Folglich ist nach (98) und (108):

$$(115)\qquad \frac{d^2}{dx^2}\left[\frac{\varphi(x)}{\lambda}\right] = -\varphi(x), \quad \text{oder} \quad \varphi''(x) + \lambda\,\varphi(x) = 0,$$

was die vorgelegte Differentialgleichung ist. Gleichzeitig ersieht man aus (114) wegen der Erfüllung der Randbedingungen durch $G(x\xi)$, daß auch $\varphi(0)=\varphi(1)=0$ ist. Wir erkennen also, daß jede Lösung der Integralgleichung (114) eine Lösung unseres Randwertproblems (109) darstellt. Nach dem Früheren ergibt sich nun sofort, daß die homogene Integralgleichung nur für gewisse Werte des Parameters λ lösbar ist, nämlich wenn $\lambda=\lambda_\nu$, d. h. gleich einem der Eigenwerte ist. Die zugehörigen Funktionen $\varphi_\nu(x)$ sind die Eigenfunktionen des Randwertproblems. Als allgemeine Lösung der Integralgleichung finden wir daher wieder unsere alte Lösung (34) oder (34a) wieder.

Wir werden im folgenden sehen, welchen Nutzen für die damals unerledigt gelassenen Entwickelungsprobleme die jetzt nachgewiesene Tatsache mit sich bringt, daß die Lösungen $\varphi_\nu(x)$ der Differentialgleichung auch Lösungen der Integralgleichung sind.

Wegen der Stellung der Greenschen Funktion $G(x\xi)$ in der Integralgleichung nennt man sie neuerdings auch wohl den „Kern" der Integralgleichung und bezeichnet sie durch $K(x\xi)$. Diesem Gebrauche schließen wir uns an, und schreiben also die Integralgleichung in der Form:

$$(116)\qquad \varphi(\xi) = \lambda \int_0^1 K(x\xi)\,\varphi(x)\,dx.$$

Um hervortreten zu lassen, daß die in (116) ausgesprochene Forderung befriedigt wird durch die Eigenwerte λ und die zugehörigen Eigenfunktionen $\varphi_\nu(x)$, werden wir auch häufig schreiben:

$$(116\text{a})\qquad \varphi_\nu(\xi) = \lambda_\nu \int_0^1 K(x\xi)\,\varphi_\nu(x)\,dx.$$

Aus der bloßen Existenz einer solchen Integralgleichung läßt sich eine Anzahl wichtiger Schlüsse ziehen.

Betrachten wir zwei zu verschiedenen Eigenwerten λ_ν und λ_μ gehörige Eigenfunktionen $\varphi_\nu(x)$ und $\varphi_\mu(x)$. Dann haben wir nach (116) oder (116a) die Identitäten:

$$(117)\qquad \begin{cases} \varphi_\nu(\xi) \equiv \lambda_\nu \int_0^1 K(x\xi)\,\varphi_\nu(x)\,dx, \\ \varphi_\mu(\xi) \equiv \lambda_\mu \int_0^1 K(x\xi)\,\varphi_\mu(x)\,dx. \end{cases}$$

Erweitert man die erste dieser Gleichungen mit $\lambda_\mu\varphi_\mu(\xi)$, die zweite mit $\lambda_\nu\varphi_\nu(\xi)$, und integriert über das Grundgebiet, so folgt:

$$(118)\quad \begin{cases} \lambda_\mu \int_0^1 \varphi_\nu(\xi)\,\varphi_\mu(\xi)\,d\,\xi = \lambda_\nu\,\lambda_\mu \int_0^1 \varphi_\mu(\xi)\,d\,\xi \int_0^1 K(x\,\xi)\,\varphi_\nu(x)\,d\,x, \\ \lambda_\nu \int_0^1 \varphi_\nu(\xi)\,\varphi_\mu(\xi)\,d\,\xi = \lambda_\nu\,\lambda_\mu \int_0^1 \varphi_\nu(\xi)\,d\,\xi \int_0^1 K(x\,\xi)\,\varphi_\mu(x)\,d\,x. \end{cases}$$

In den Integralen rechter Hand kann man die Integrationsfolge vertauschen und erkennt dann wegen der Symmetrie des Kernes, daß die rechten Seiten gleich sind. Durch Subtraktion folgt also:

$$0 = (\lambda_\mu - \lambda_\nu) \int_0^1 \varphi_\nu(\xi)\,\varphi_\mu(\xi)\,d\,\xi,$$

woraus, da nach Voraussetzung $\lambda_\nu \neq \lambda_\mu$, folgt:

$$(119)\quad \int_0^1 \varphi_\nu(x)\,\varphi_\mu(x)\,d\,x = 0,$$

d. h. die schon bekannte Orthogonalitätseigenschaft der Eigenfunktionen.

Aus (119) läßt sich weiter der wichtige Schluß ziehen, daß die Eigenwerte λ_ν sämtlich reell sind. Denn würde einer komplex, so würde es, da der Kern reell ist, auch die zugehörige Eigenfunktion. Dann müßte der konjugiert komplexe Eigenwert in Verbindung mit der konjugiert komplexen Eigenfunktion ebenfalls eine Lösung der Integralgleichung sein und folglich nach (119) beide (zueinander konjugiert komplexe) Eigenfunktionen orthogonal sein. Seien z. B. die beiden konjugiert komplexen Eigenfunktionen:

$$\varphi_\nu(x) = \chi(x) + i\,\omega(x),$$
$$\varphi_\mu(x) = \chi(x) - i\,\omega(x).$$

dann liefert (119) die Bedingung:

$$\int_0^1 \left\{\chi(x) + i\omega(x)\right\}\left\{\chi(x) - i\omega(x)\right\} d\,x = 0, \quad \text{oder}$$

$$\int_0^1 \left\{\chi^2(x) + \omega^2(x)\right\} d\,x = 0.$$

Letztere Gleichung wäre, in Widerspruch mit der Voraussetzung, nur dadurch zu erfüllen, daß identisch $\chi(x) = \omega(x) = 0$ wäre. Folglich führt die Annahme komplexer Eigenwerte zu einem Widerspruch und muß daher fallen gelassen werden, womit bewiesen ist, **daß die Eigenwerte λ_ν sämtlich reell sind.**

Wenn die Eigenfunktionen noch „normiert" werden, so tritt zu (119) noch die Gleichung hinzu:

(120) $$\int_0^1 \varphi_\nu^2(x)\,dx = 1,$$

und diese beiden Formeln geben uns die Mittel an die Hand, wenigstens formal die Koeffizienten der Fourierschen Reihenentwicklung zu bestimmen.

Wenden wir nun z. B. diese Entwicklung einmal auf den Kern selbst an, so erhalten wir:

$$K(x\,\xi) = \sum_\nu^{1,\infty} A_\nu \varphi_\nu(x),$$

und für A_ν folgt die Fouriersche Koeffizientendarstellung:

(121) $$A_\nu = \int_0^1 K(x\,\xi)\,\varphi_\nu(x)\,dx.$$

Diesen Ausdruck für A_ν bringen wir in Beziehung zur Integralgleichung (116a). Durch Vergleich von (121) mit (116a) folgt nämlich sofort, daß

(122) $$A_\nu = \frac{\varphi_\nu(\xi)}{\lambda_\nu}$$

sein muß, und wenn man diesen Wert von A_ν in die oben angesetzte Entwickelung für $K(x\xi)$ einsetzt, so erhält man folgende Darstellung des Kernes:

(123) $$K(x\,\xi) = \sum_\nu^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu(\xi)}{\lambda_\nu}.$$

Diese Entwicklung, die man die „bilineare Formel" für den Kern nennt, ist natürlich noch keineswegs bewiesen, vielmehr fehlt gerade das Wichtigste, der Konvergenzbeweis. Nehmen wir ihn einmal als erbracht an, so bringt (123) die Symmetrie des Kerns in seinen beiden Argumenten zur Evidenz.

Dann erhält man aus (123) ein sehr wichtiges Ergebnis für solche Funktionen, die nebst ihrer ersten Ableitung stetig sind, die Randbedingungen erfüllen und eine stückweise stetige zweite Ableitung besitzen. Eine solche Funktion ist nach dem früheren quellenmäßig darstellbar, besitzt also die Form:

(124) $$F(x) = \int_0^1 K(x\,\xi)\,f(\xi)\,d\xi.$$

Ersetzen wir hierin den Kern durch seine Entwicklung (123), so folgt:

(125) $$F(x) = \int_0^1 \sum_\nu^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu(\xi)}{\lambda_\nu} f(\xi)\,d\xi.$$

Hierin kann man, wenigstens wenn die Bilinearform in bestimmter, später zu erörternder Weise konvergiert, die Reihenfolge von Summation und Integration vertauschen und erhält dann:

(126) $$F(x) = \sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu} \int_0^1 f(\xi)\varphi_\nu(\xi)\,d\xi,$$

d. h. $F(x)$ ist nach den Eigenfunktionen $\varphi_\nu(x)$ entwickelt.

Von dieser Entwicklung nun läßt sich leicht zeigen, daß sie mit der Fourierschen identisch ist. Denn setzen wir, um $F(x)$ nach Fourier zu entwickeln:

(127) $$F(x) = \sum_{\nu}^{1,\infty} C_\nu \varphi_\nu(x),$$

so ist darin der allgemeine Koeffizient:

(128) $$C_\nu = \int_0^1 F(\alpha)\varphi_\nu(\alpha)\,d\alpha.$$

Setzt man jetzt unter dem Integralzeichen für $F(\alpha)$ den Wert aus (124) ein, so hat man:

$$C_\nu = \int_0^1 \varphi_\nu(\alpha)\,d\alpha \int_0^1 K(\alpha\,\xi) f(\xi)\,d\xi,$$

oder, nach Vertauschung der Integrationsfolge:

(129) $$C_\nu = \int_0^1 f(\xi)\,d\xi \int_0^1 K(\alpha\,\xi)\varphi_\nu(\alpha)\,d\alpha.$$

Vermöge der homogenen Integralgleichung (116a) ist aber das zweite Integral nichts anderes als der Wert $\frac{\varphi_\nu(\xi)}{\lambda_\nu}$, so daß der Fouriersche Koeffizient C_ν geschrieben werden kann:

(130) $$C_\nu = \int_0^1 \frac{f(\xi)\varphi_\nu(\xi)}{\lambda_\nu}\,d\xi.$$

Die Fouriersche Entwicklung (127) für $F(x)$ nimmt damit die Gestalt an:

$$F(x) = \sum_{\nu}^{1,\infty} \int_0^1 \frac{f(\xi)\varphi_\nu(\xi)\,d\xi}{\lambda_\nu} \cdot \varphi_\nu(x),$$

oder, anders geschrieben:

$$F(x) = \sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu} \int_0^1 f(\xi)\varphi_\nu(\xi)\,d\xi,$$

was mit (126) übereinstimmt. Damit ist die Identität der Entwicklung (126) mit der Fourierschen nachgewiesen, d. h. aber: *Unter gewissen Voraussetzungen über die Art der Konvergenz der Bilinearform des Kerns ist jede quellenmäßig darstellbare Funktion auf die Fouriersche Weise nach den Eigenfunktionen des Kerns entwickelbar.*

Man erkennt hieraus die große Bedeutung, die die Bildung der Integralgleichung für das Problem der Entwicklung von gegebenen Funktionen in Reihen von Eigenfunktionen mit sich bringt: *Ist die Bilinearform für den Kern als richtig erwiesen* — sei es durch allgemeine Methoden, sei es für einen speziellen Fall — *und konvergiert diese Reihe in bestimmter Weise, so ist damit gleichzeitig gezeigt, und zwar in voller Allgemeinheit, welches auch das Randproblem sei: daß jede mit ihrer Ableitung stetige Funktion, die die Randbedingungen erfüllt und eine stückweise stetige zweite Ableitung besitzt, auf die Fouriersche Weise nach den Eigenfunktionen des betreffenden Kernes entwickelt werden kann.*

141. Definitionen und Sätze über Konvergenz von Reihen.

Bevor wir an die Untersuchung der Bilinearform für den Kern in unserem speziellen Falle herangehen, wird es zweckmäßig sein, einige Sätze aus der Theorie der Reihen hier anzuführen, die in der Theorie der Integralgleichungen benutzt werden.

Es sei gegeben eine unendliche Reihe von nach einem bestimmten Gesetz geordneten positiven oder negativen Zahlgrößen:

$$(a) \qquad a_0,\ a_1,\ a_2,\ \dots \text{ in infinitum.}$$

Wir greifen die $(n+1)$ ersten Glieder heraus und summieren sie; das Resultat der Summation wird mit S_n bezeichnet:

$$S_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots a_{n-1} + a_n .$$

Dann gilt folgende Definition der Konvergenz der Reihe:

I. *Die Reihe (a) heißt konvergent, wenn diese Summe S_n sich mit unendlich wachsendem n einer bestimmten endlichen Grenze nähert, wenn also*

$$\lim_{n=\infty} S_n = A$$

eine bestimmte endliche Größe ist; A heißt dann die Summe der Reihe (a).

Wir betrachten nun, vom $(n+1)^{\text{ten}}$ Gliede der Reihe (a) anfangend, die „Sequenz" $R_{n,p}$ bis zum $(n+1+p)^{\text{ten}}$ Gliede, d. h. die Summe

$$R_{n,p} = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots a_{n+1+p}$$

Dann gilt zunächst offenbar: Wenn die Reihe (a) konvergiert, so nähert sich die Summe $R_{n,p}$ mit wachsendem n der Grenze Null, welchen Wert auch p hat, d. h. also:

$$\lim_{n=\infty} R_{n,p} = 0.$$

Nach Definition von $R_{n,p}$ ist dies nämlich offenbar gleich der Differenz von S_{n+p} und S_n, wenn damit die Summen der $(n+p+1)$ resp. $(n+1)$ ersten Glieder der Reihe (a) bezeichnet werden. Da diese konvergent sein soll, so muß also nach I sein

$$\lim_{n=\infty} S_{n+p} = A,$$

und ebenso:

$$\lim_{n=\infty} S_n = A;$$

also durch Subtraktion folgt:

$$\lim_{n=\infty} \{S_{n+p} - S_n\} = 0,$$

also

$$\lim_{n=\infty} R_{n,p} = 0,$$

was zu beweisen war.

Es gilt aber auch das Umgekehrte, was freilich sehr viel schwerer zu beweisen ist, so daß wir den Satz lieber als Definition der Konvergenz an die Spitze stellen wollen:

Ia) die Reihe (a) konvergiert, wenn die Sequenz $R_{n,p}$ sich mit wachsendem n der Grenze Null nähert, wenn also

$$\lim_{n=\infty} R_{n,p} = 0 \text{ ist.}$$

II. „Die Reihe (a) heißt absolut konvergent, wenn sie auch dann noch konvergiert, wenn an Stelle jedes Gliedes, das positiv oder negativ sein kann, der absolute Betrag genommen wird."

Nur für absolut konvergente Reihen gilt ferner folgender Satz:

III. „Sind $a_0, a_1, a_2, \ldots$ in infin. Glieder einer absolut konvergenten Reihe

$$A = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots \text{ in infin.},$$

und sind

$$c_0, c_1, c_2 \ldots \text{ in infin.}$$

Glieder einer unendlichen Reihe beliebiger, positiver oder negativer Zahlen, die ihrem absoluten Werte nach alle unter einer endlichen Grenze c liegen, so ist auch die neue Reihe:

$$S = c_0 a_0 + c_1 a_1 + c_2 a_2 + \ldots \text{ in infin.}$$

konvergent."

Der Beweis ist folgendermaßen: Nach Definition Ia der Konvergenz ist für die erste Reihe $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ in infin. gemäß Voraussetzung:

$$\lim_{n=\infty} R_{n,p} = 0.$$

Da ferner die Reihe noch konvergieren soll, wenn der absolute Wert der einzelnen Glieder genommen wird, so ist ferner noch nach Definition II:

$$\lim_{n=\infty} \{|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots |a_{n+p}|\} = 0,$$

oder, wenn wir diesen Ausdruck kurz durch $\varrho_{n,p}$ bezeichnen:

$$\lim_{n=\infty} \varrho_{n,p} = 0.$$

Damit die neue Reihe $a_0 c_0 + a_1 c_1 \ldots$ konvergiert, muß also nach Definition Ia sein:

$$\lim_{n=\infty} R'_{n,p} = \lim_{n=\infty} \{c_{n+1} a_{n+1} + c_{n+2} a_{n+2} + \cdots c_{n+p} a_{n+p}\} = 0.$$

Diese Gleichung ist zu beweisen. Ersetzt man in derselben $a_{n+1} \ldots a_{n+p}$ durch ihre Absolutwerte, ferner jede der Größen $c_{n+1}, \ldots c_{n+p}$ durch die nach Voraussetzung sicher größere Zahl $+c$, so ist sicher die Summe:

$$c\{|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots |a_{n+p}|\}$$

größer als R_n', oder anders geschrieben:

$$c\,\varrho_{n,p} > R'_{n,p}.$$

Ersetzt man anderseits die Größen $c_{n+1}, \ldots$ durch den Wert $-c$, der nach Voraussetzung sicher kleiner ist als der kleinste negative Wert der $c_{n+1} \ldots$, so folgt ebenso:

$$-c \cdot \varrho_{n,p} < R'_{n,p},$$

und durch Zusammenfassung der beiden letzten Umgleichungen:

$$-c\,\varrho_{n,p} < R'_{n,p} < +c\,\varrho_{n,p}.$$

Durch Übergang zur Grenze folgt, da nach Voraussetzung $\lim_{n=\infty} \varrho_{n,p} = 0$, auch $\lim_{n=\infty} R'_{n,p} = 0$, was zu beweisen war.

Zu einem neuen Begriffe gelangen wir, wenn wir die einzelnen Glieder der Reihe $a_0, a_1, \ldots$ nicht mehr als konstant betrachten, sondern als Funktion einer Variabeln x. Dieser Fall liegt z. B. bei den uns interessierenden trigonometrischen Reihen vor. Eine solche Reihe schreiben wir allgemein:

$$a_0(x) + a_1(x) + a_2(x) + \ldots \text{ in infin.}$$

und setzen voraus, daß sie konvergent sei in dem Intervalle $a \leqq x \leqq b$; d. h. $R_{n,p}(x)$ muß nach Definition Ia der Bedingung gehorchen:

$$\lim_{\substack{n=\infty \\ a \leqq x \leqq b}} R_{n,p}(x) = \lim_{\substack{n=\infty \\ a \leqq x \leqq b}} \{a_{n+1}(x) + a_{n+2}(x) + \ldots a_{n+p}(x)\} = 0.$$

Um die Bedeutung des Folgenden besser verständlich zu machen, ist es zweckmäßig, die Bedingung $\lim_{n=\infty} R_{n,p}(x)$ etwas anders zu formulieren. Was bedeutet denn eigentlich diese Forderung? Doch nichts anderes, als daß die Summe $R_{n,p}(x)$, wenn wir n genügend groß nehmen, vom Werte Null nur beliebig wenig abweicht. Die Differenz zwischen $R_{n,p}(x)$ und Null wird um so kleiner sein, je größer der Wert n genommen wird. Wir können z. B. verlangen, daß $R_{n,p}(x)$ höchstens den Wert $+{}^1/_{1000}$, oder $+{}^1/_{1000000}$, oder einen noch kleineren Betrag haben soll, je nach der Genauigkeit, welche wir bei der Summation der Reihe anstreben. Es sei z. B., um allgemein zu reden, vorgeschrieben, daß $R_{n,p}(x)$ dem absoluten Betrage nach kleiner sein soll als eine gegebene, beliebig kleine positive Größe ω. D. h. dann, daß $R_{n,p}(x)$ zwischen $-\omega$ und $+\omega$ liegen soll:

$$-\omega < R_{n,p}(x) < \omega,$$

sobald n einen hinreichend großen Wert hat. Dies ist offenbar nur eine andere Formulierung der Konvergenz. Wenn die Glieder der Reihe keine Funktionen von x sind, ist damit alles erledigt. Dagegen tritt hier noch eine besondere Frage auf. Die gegebene Reihe soll nach Voraussetzung konvergieren, wenn x innerhalb des Intervalles von a bis b bleibt. Nun stellen wir folgende Betrachtung an: Es seien verschiedene Werte von x ($x_1, x_2, x_3, x_4 \ldots$) gegeben; zu jedem Wert von x gehört eine Sequenz $R_{n,p}(x)$; also: $R_{n,p}(x_1)$, $R_{n,p}(x_2) \ldots$, m. a. W. $R_{n,p}(x)$ ist selbst Funktion von x.

Wählen wir $x = x_1$. Damit die Konvergenzbedingung

$$-\omega < R_{n,p}(x_1) < \omega$$

erfüllt werden kann (was ja nach Voraussetzung der Fall sein muß), braucht nur n genügend groß, sagen wir größer als eine gewisse Zahl N_1 genommen zu werden. Wir haben also:

$$\text{für } n > N_1 \text{ ist}: -\omega < R_{n,p}(x_1) < +\omega.$$

Jetzt machen wir dieselbe Operation mit dem Werte $x = x_2$. Damit die Konvergenz erfüllt sei, müssen wir n hier etwa größer als eine gewisse Zahl N_2 nehmen, also:

$$\text{für } n > N_2 \text{ ist}: -\omega < R_{n,p}(x_2) < \omega.$$

Wir können so jedem Werte x_a innerhalb des Intervalles von a bis b einen Wert N_a zuordnen. Wird n größer als N_a genommen, so ist die Konvergenzbedingung erfüllt. Nun sind zwei Fälle möglich: Entweder bleiben die so bestimmten Werte N (deren es natürlich, da un-

endlich viele x-Werte im Intervalle existieren, unendlich viele gibt), unter einer festen endlichen Grenze, die wir N_0 nennen wollen. D. h. N_0 ist größer wie jeder der Werte N. Also gilt die Konvergenzbedingung $-\omega < R_{n,p}(x) < +\omega$ a fortiori für jeden Wert von x im Intervalle von a bis b, wenn wir an Stelle der Zahlen N den Wert N_0 substituieren. Also dann ist:

$$\text{für } n > N_0: \quad -\omega < R_{n,p}(x) < +\omega.$$

Ist dieser Fall realisiert, so nennt man die Konvergenz „*gleichmäßig*". Sie ist gewissermaßen von x unabhängig, weil die Zahl N_0 von x unabhängig ist. Die zweite Möglichkeit ist folgende: Die Zahlen N haben *keine* obere Grenze, sondern wachsen mit der Annäherung von x an gewisse Werte des Intervalles über jede endliche Grenze hinaus. Trotzdem ist infolge von Nebenumständen für jeden Wert von x die Konvergenzbedingung erfüllt, aber die Konvergenz wird immer schlechter bei Annäherung an gewisse Werte von x; sie wird, wie man sich manchmal ausdrückt, „unendlich verzögert". Diese Art von Konvergenz nennt man „*ungleichmäßig*".

Wir können also folgende Definition für die gleichmäßige Konvergenz einer Reihe aufstellen:

IV. „*Eine Reihe konvergiert gleichmäßig in dem Intervalle* $a \leqq x \leqq b$, *wenn für alle Werte von* x *des betreffenden Intervalles ein von* x *unabhängiger Wert* N_0 *existiert, so daß für* $n > N_0$ *die Ungleichung befriedigt wird*

$$-\omega < R_{n,p}(x) < \omega \quad \text{oder} \quad |R_{n,p}(x)| < 0.$$

Von einer gleichmäßig konvergenten Reihe wird also mehr gefordert, als von einer schlechthin konvergenten Reihe; die ersteren haben daher besondere Eigenschaften, die den schlechthin konvergenten Reihen fehlen. Eine der wichtigsten dieser Eigenschaften ist die folgende:

V. *Eine in dem Intervalle* $a \leqq x \leqq b$ *gleichmäßig konvergente Reihe, deren Glieder stetige Funktionen von* x *sind, ist selbst eine in dem Intervalle stetige Funktion der Variabeln.*

Der Beweis verläuft folgendermaßen: Nach der Definition der Stetigkeit muß sich einer beliebig kleinen gegebenen positiven Größe δ eine gleichfalls positive Größe ε derartig zuordnen lassen, daß:

$$|A(x+h) - A(x)| < \delta \text{ für } |h| < \varepsilon.$$

Betrachten wir nun die in dem gegebenen Intervalle gleichmäßig konvergente Reihe:

$$A(x) = a_0(x) + a_1(x) + \ldots \text{ in infin.} = \sum_n^{0,\infty} a_n(x),$$

so muß folgende Gleichung als richtig nachgewiesen werden:

$$\left|\sum_n^{0,\infty} a_n(x+h) - \sum_n^{0,\infty} a_n(x)\right| < \delta \text{ für } \left|h\right| < \varepsilon.$$

Nun kann man aber $A(x)$ und analog $A(x+h)$ schreiben:

$$A(x+h) = \sum_n^{1,m} a_n(x+h) + \sum_n^{m+1,\infty} a_n(x+h) = \sum_n^{1,m} a_n(x+h) + R_m(x+h),$$

$$A(x) \quad = \sum_n^{1,m} a_n(x) \quad + \sum_n^{m+1,\infty} a_n(x) \quad = \sum_n^{1,m} a_n(x) \quad + R_m(x).$$

Darin ist R_m eine Sequenz von Gliedern der Reihe, wie wir sie schon vorher betrachtet haben, nur daß $p = \infty$ genommen ist. Dies ist statthaft, da der Wert von p bei der vorliegenden Betrachtung keine Rolle spielt. Also ist wegen der gleichmäßigen Konvergenz nach Satz IV:

$$| R_m(x+h) | < \omega,$$
$$| R_m(x) \quad | < \omega,$$

wo m, eben wegen der gleichmäßigen Konvergenz, unabhängig vom Argument, also hier von h ist. Ferner ist $\sum_n^{1,m} a_n(x)$ als endliche Summe stetiger Funktionen selbstverständlich stetig, d. h. die Bedingung erfüllt:

$$\left|\sum_n^{1,m} a_n(x+h) - \sum_n^{1,m} a_n(x)\right| < \delta_1 \text{ für } |h| < \varepsilon,$$

wo δ_1 eine beliebig kleine positive Größe ist. Bildet man nun $A(x+h) - A(x)$, so hat man dafür:

$$A(x+h) - A(x) = \sum_n^{1,m} a_n(x+h) - \sum_n^{1,m} a_n(x) + R_m(x+h) - R_m(x);$$

und wenn man die absoluten Werte bildet und beachtet, daß der absolute Wert einer Summe stets kleiner oder höchstens gleich der Summe der absoluten Beträge der einzelnen Summanden ist, so folgt:

$$\left|A(x+h) - A(x)\right| \leqq \left|\sum_n^{1,m} a_n(x+h) - \sum_n^{1,m} a_n(x)\right| + \left|R_m(x+h)\right| + \left|R_m(x)\right|;$$

also wenn man die oben abgeleiteten Ungleichungen für die Glieder der rechten Seite einsetzt:

$$|A(x+h) - A(x)| < \delta_1 + \omega + \omega \text{ für } |h| < \varepsilon;$$

wählt man $\delta_1 + 2\omega$ so, daß es gleich dem gegebenen δ wird, was man kann, da δ_1 und ω ganz willkürlich sind, so folgt:

$$|A(x+h) - A(x)| < \delta \text{ für } |h| < \varepsilon,$$

d. h. die zu beweisende Gleichung der Stetigkeit.

Nunmehr kann die für uns wichtigste Eigenschaft einer gleichmäßig konvergenten Reihe bewiesen werden:

VI. Eine in dem Intervalle von a bis b gleichmäßig konvergente Reihe kann gliedweise integriert werden.

Der Beweis dieses wichtigen Satzes kann folgendermaßen erbracht werden. Es sei die in dem Intervalle von a bis b gleichmäßig konvergente Reihe vorgelegt:

$$A(x) = a_0(x) + a_1(x) + \ldots \text{ in infin.}$$

Es soll gebildet werden das folgende Integral:

$$\int_{x_1}^{x_2} A(x)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} \sum_n^{0,\infty} a_n(x),$$

wo x_1 und x_2 zwei im Intervalle von a bis b liegende x-Werte sind. Nun ist, wenn wir die früheren Bezeichnungen anwenden:

$$\begin{aligned} A(x) &= S_m(x) + R_m(x), \\ S_m(x) &= a_0(x) + a_1(x) + \ldots + a_m(x), \\ R_m(x) &= a_{m+1}(x) + a_{m+2}(x) + \ldots \text{ in infin.} \end{aligned}$$

Also ist jedenfalls:

$$\int_{x_1}^{x_2} A(x)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} S_m(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} R_m(x)\,dx.$$

Nehmen wir nun n hinreichend groß, so ist wegen der gleichmäßigen Konvergenz von $A(x)$ nach Satz IV im ganzen Intervalle von a bis b die Ungleichung gültig:

$$-\omega < R_m(x) < +\omega,$$

wo m unabhängig von x, und ω eine beliebig kleine positive Größe ist. Diese Ungleichung kann natürlich integriert werden, also gilt auch:

$$-\int_{x_1}^{x_2} \omega\,dx < \int_{x_1}^{x_2} R_m(x)\,dx < +\int_{x_1}^{x_2} \omega\,dx.$$

Addieren wir zu allen drei Gliedern der Ungleichung das Integral $\int_{x_1}^{x_2} S_m(x)\,dx$ hinzu, so folgt daraus:

$$\int_{x_1}^{x_2} S_m(x)\,dx - \int_{x_1}^{x_2} \omega\,dx < \int_{x_1}^{x_2} S_m(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} R_m(x)\,dx < \int_{x_1}^{x_2} S_m(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} \omega\,dx,$$

oder, indem man für das mittlere Glied seinen Wert einsetzt:

$$\int_{x_1}^{x_2} S_m(x)\,dx - \int_{x_1}^{x_2} \omega\,dx < \int_{x_1}^{x_2} A(x)\,dx < \int_{x_1}^{x_2} S_m(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} \omega\,dx.$$

Hierin wollen wir der größeren Deutlichkeit halber $S_m(x)$ wirklich ausschreiben, nämlich $S_m(x) = \sum_n^{1,m} a_n(x)$: also ist nach der letzten Ungleichung:

$$\int_{x_1}^{x_2} \sum_n^{0,m} a_n(x)\,dx - \omega(x_2 - x_1) < \int_{x_1}^{x_2} A(x)\,dx < \int_{x_1}^{x_2} \sum_n^{0,m} a_n(x)\,dx + \omega(x_2 - x_1).$$

Da die Summe $\sum_n^{1,m} a_n(x)$ eine endliche ist, so kann natürlich das Summenzeichen mit dem Integralzeichen vertauscht werden, und man erhält:

$$\sum_n^{0,m} \int_{x_1}^{x_2} a_n(x)\,dx - \omega(x_2 - x_1) < \int_{x_1}^{x_2} A(x)\,dx < \sum_n^{0,m} \int_{x_1}^{x_2} a_n(x)\,dx + \omega(x_2 - x_1).$$

Gehen wir zur Grenze $m = \infty$ über und erinnern uns der Bedeutung von $A(x)$, so folgt schließlich die Gleichung:

$$\int_{x_1}^{x_2} \sum_n^{0,\infty} a_n(x)\,dx = \sum_n^{0,\infty} \int_{x_1}^{x_2} a_n(x)\,dx,$$

d. h. das Integral über eine gleichmäßige konvergente Reihe ist gleich der Summe der Integrale über die Glieder der Reihe, was zu beweisen war. Oder praktisch ausgedrückt: Bei der Integration einer gleichmäßig konvergenten Reihe kann die Reihenfolge der Summation und Integration vertauscht werden.

Diese Sätze geben uns nun die Möglichkeit, in unserem konkreten Falle die gleichmäßige und absolute Konvergenz der Bilinearform für unseren Kern zu beweisen.

142. Die Bilinearform für den Kern der Saite.

Nach Gleichung (128) lautet die Bilinearform allgemein:

$$K(x\xi) = \sum_\nu^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu(x) \cdot \varphi_\nu(\xi)}{\lambda_\nu}.$$

In unserem speziellen Falle ist nach (88):

$$\text{für } x < \xi: \quad K(x\xi) = x(1-\xi),$$
$$\text{für } x > \xi: \quad K(x\xi) = \xi(1-x).$$

Ferner ist nach (29): $\varphi_\nu(x) = \sqrt{2}\sin \nu\pi x$ und nach (28): $\lambda_\nu = \nu^2\pi^2$.

Wir haben also zu zeigen, daß folgende Beziehungen richtig sind: Es muß sein für $x < \xi$:

$$x(1-\xi) = \frac{2}{\pi^2} \sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\sin \nu \pi x \cdot \sin \nu \pi \xi}{\nu^2} \tag{131a}$$

und für $x > \xi$:

$$\xi(1-x) = \frac{2}{\pi^2} \sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\sin \nu \pi x \cdot \sin \nu \pi \xi}{\nu^2}. \tag{131b}$$

Zu diesem Zwecke gehen wir von zwei bekannten unendlichen Reihen aus. Die erste ist:

$$\sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{1}{\nu^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots \text{ in infin.}$$

Ihre Summe ist bekanntlich[1] $\frac{\pi^2}{6}$, so daß wir haben:

$$\sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{1}{\nu^2} = \frac{\pi^2}{6}. \tag{132}$$

Die zweite Reihe, die wir betrachten, ist folgende:[2])

$$\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \ldots = \sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\cos \nu x}{\nu^2} = \frac{(x-\pi)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}, \tag{133}$$

die in dem Intervalle $0 \leqq x \leqq 2\pi$ gültig ist. Es seien nun x_0 und x_1 zwei Werte, die nicht nur innerhalb des zulässigen Intervalles von 0 bis 2π liegen, sondern auch noch kleiner als π sein sollen. Der Grund dafür wird später klar werden. Dann ergibt die Differenz der mit diesen Werten gebildeten Reihen (133):

$$\sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\cos \nu x_0 - \cos \nu x_1}{\nu^2} = \frac{x_0^2 - x_1^2}{4} + \frac{\pi}{2}(x_1 - x_0). \tag{134}$$

Es seien nun x und ξ zwei echte Brüche (da das Grundgebiet der Saite nur von 0 bis 1 geht, ist dies für die Variabeln x und ξ unseres Kernes stets der Fall) und zwar sei etwa zunächst $x < \xi$. Dann setzen wir

$$x_0 = \pi(\xi - x); \quad x_1 = \pi(\xi + x). \tag{135}$$

Man überzeugt sich leicht, daß der Ansatz (135) mit unserer Festsetzung von x_0 und x_1 übereinstimmt. Denn man erhält aus (135):

[1]) Vgl. z. B. Riemann-Weber, Part. Diffgl., 4. Aufl., Band I, pag. 60, 1900.
[2]) Ibidem, pag. 60.

$$\xi = \frac{x_0 + x_1}{2\pi}; \quad x = \frac{x_1 - x_0}{2\pi}.$$

Da nun x und ξ positive echte Brüche sein müssen, so muß offenbar dasselbe von $\frac{x_0 + x_1}{2\pi}$ und $\frac{x_1 - x_0}{2\pi}$ gelten. Das kann erfüllt werden, wenn man $x_1 > x_0$ und beide Werte $< \pi$ nimmt, wie es oben vorgeschrieben wurde. Ferner ist dann offenbar: $\xi > x$.

Setzt man die Werte (135) in (134) ein, so folgt durch elementare Rechnungen:

$$2 \sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\sin \nu\pi x \cdot \sin \nu\pi\xi}{\nu^2} = \frac{\pi^2(\xi - x)^2 - \pi^2(\xi + x)^2}{4} + \frac{\pi}{2}(2\pi x),$$

oder:

$$\frac{2}{\pi^2} \sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\sin \nu\pi x \cdot \sin \nu\pi\xi}{\nu^2} = x(1 - \xi). \tag{136}$$

Gleichung (136) ist aber nichts anderes, als die zu beweisende Bilinearform im Falle $x < \xi$. Ist umgekehrt $x > \xi$, so vertausche man in (135) die Bedeutung von x_0 und x_1:

$$x_1 = \pi(\xi - x), \quad x_0 = \pi(\xi + x). \tag{137}$$

Dann ergibt eine analoge Rechnung:

$$\frac{2}{\pi^2} \sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\sin \nu\pi x \cdot \sin \nu\pi\xi}{\nu^2} = \xi(1 - x). \tag{138}$$

Man erkennt ferner leicht, daß die Reihen (136) resp. (138) **absolut** konvergieren. Denn setzt man für die Zähler $\sin \nu\pi x \cdot \sin \nu\pi\xi$ die absoluten Beträge ein, so ist der Zähler stets $\leqq 1$; die so entstehende Reihe mit lauter positiven Gliedern konvergiert also stets noch besser wie die Reihe, deren Zähler sämtlich gleich 1 sind, d. h. wie die Reihe $\sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{1}{\nu^2}$, deren Summe nach (132) $\frac{\pi^2}{6}$ ist. Ebenso ergibt wieder ein Vergleich der Reihen (136) und (138) mit dieser Reihe $\sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{1}{\nu^2}$, daß die Bilinearform unseres Kernes auch **gleichmäßig konvergent** ist.

Damit ist also gezeigt, wie wir am Schluß von Nr. 140 betont haben daß **jede quellenmäßig darstellbare Funktion auf die Fourriersche Weise entwickelt werden kann.** Denn da die Bilinearform gleichmäßig konvergiert, ist die bei der Herleitung dieses Satze benutzte Vertauschung von Summation und Integration erlaubt.

Um speziell zu dem Entwickelungsproblem zurückzukehren, da uns von unserem Randwertproblem geboten wurde, so war zu zeige

daß für $t=0$ das allgemeine Integral der Saitengleichung dem gegebenen Anfangszustande angepaßt werden konnte. Es sollte damals bewiesen werden:

$$(35) \qquad u_{t=0} = \sqrt{2} \sum_{\nu}^{1,\infty} B_\nu \sin \nu \pi x = F(x),$$

$$(36) \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = \sqrt{2}\, a \pi \sum_{\nu}^{1,\infty} \nu A_\nu \sin \nu \pi x = G(x).$$

Man erkennt jetzt, daß, wenn $F(x)$ und $G(x)$ die Eigenschaften einer quellenmäßig darstellbaren Funktion besitzen, die Konvergenz dieser Reihen gewährleistet ist, womit die gestellte Aufgabe, das allgemeine Integral der Saitenschwingung zu finden, erst wirklich gelöst ist.

Es sei übrigens hier erwähnt, daß man diese Resultate leicht stark verallgemeinern kann; quellenmäßig dargestellte Funktionen haben ja die Eigenschaft, daß sie mit ihrer ersten Ableitung stetig sind, eine stückweise stetige zweite Ableitung besitzen und die Randbedingungen des Problems erfüllen. Man kann sich jedoch von allen drei Beschränkungen freimachen, indem sich zeigen läßt, daß stückweise stetige Funktionen mit stückweise stetiger erster und zweiter Ableitung, die die Randbedingungen nicht befriedigen, auch noch auf die Fouriersche Weise nach Eigenfunktionen entwickelt werden können. Wir beschränken uns hier jedoch auf die Mitteilung des Resultates, ohne näher auf diesen Gegenstand einzugehen.[1])

143. Die Rayleighsche Methode.

Lord Rayleigh hat eine Methode ausgebildet, um die Eigenschwingungen kontinuierlich verbreiteter Systeme zu finden, die im wesentlichen darin besteht, daß zunächst ein geeignetes System diskreter Massenpunkte betrachtet wird, das durch einen passenden Grenzübergang in das gegebene kontinuierliche System übergeführt wird. Dabei gehen die Eigenschwingungen des Systems diskreter Massenpunkte gleichzeitig in die des kontinuierlichen Gebildes über. Die Schwierigkeiten dieser Methode liegen darin, den Grenzübergang streng zu vollziehen; die Rayleighsche Methode ist daher nur als heuristisches Prinzip zu betrachten, als solches aber von großem Wert. Man erkennt aus dieser Darlegung, daß wir bei der Herleitung der Saitengleichung diesem Gedankengange bereits im wesentlichen gefolgt sind. Nunmehr kommen wir gewissermaßen auf dem umgekehrten Wege, indem wir von der bereits

[1]) Vgl. A. Kneser, Die Integralgleichungen, pag. 30 ff.

fertig vorliegenden Lösung des Saitenproblems ausgehen, darauf zurück, um einen Zusammenhang zwischen dieser Methode und der Theorie der Integralgleichungen nachzuweisen.

Nach (34) war die allgemeine Lösung des Saitenproblems:

$$u = \sqrt{2} \sum_{\nu}^{1,\infty} \sin \nu \pi x \{A_\nu \sin c \nu \pi t + B_\nu \cos c \nu \pi t\}.$$

Setzen wir zur Abkürzung für die geschweifte Klammer $p_\nu(t)$, so haben wir u in der Form:

(139) $$u = \sum_{\nu}^{1,\infty} \varphi_\nu(x) \cdot p_\nu(t).$$

Dabei können wir die Größen $p_\nu(t)$ als Parameter oder, wie wir auch sagen können, als die „Koordinaten" eines „Massenpunktes" der Saite betrachten. Wir wollen nun, indem wir eine der möglichen Schwingungsformen der Saite betrachten (also unter u etwa die longitudinalen Verrückungen verstehen), lebendige Kraft L und potentielle Energie Φ bilden. Zunächst ist offenbar

$$L = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 d x,$$

wenn wir die Dichte der Saite einfachheitshalber gleich 1 annehmen. Da nach (139), wenn von Konvergenzschwierigkeiten abgesehen wird:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\nu}^{1,\infty} \varphi_\nu(x) \dot{p}_\nu(t)$$

ist (die Punkte bedeuten Differentiationen nach der Zeit), so folgt durch Einsetzen dieses Wertes in dem Ausdruck von L:

$$L = \frac{1}{2} \int_0^1 \left\{ \sum_{\nu}^{1,\infty} \varphi_\nu(x) \dot{p}_\nu(t) \right\}^2 d x,$$

und daraus folgt, unter Berücksichtigung des Umstandes, daß die Eigenfunktionen orthogonal und normiert sind, wodurch die doppelten Produkte in Fortfall gelangen:

(140) $$L = \frac{1}{2} \sum_{\nu}^{1,\infty} \dot{p}_\nu^2(t).$$

Das ist ein Ausdruck von der nämlichen Form, wie er für eine Anzahl von Massenpunkten aus der Punktmechanik bekannt ist.[1]) Für die potentielle Energie ergibt ein Blick auf (12), wenn man den Grenzübergang

[1]) Vgl. z. B. die erste Gleichung (49) auf pag. 245.

zur kontinuierlichen Saite vollzieht und für die longitudinale Schwingungsform spezialisiert:

$$\Phi = \frac{1}{2} C \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 d x,$$

wo C eine Konstante bedeutet. Das wird nach (139):

$$\Phi = \frac{1}{2} C \int_0^1 \left\{ \sum_{\nu}^{1,\infty} \varphi_\nu'(x)\, p_\nu(t) \right\}^2 d t.$$

Bei der Ausrechnung ist nun zu beachten, daß die $\varphi_\nu'(x)$ zwar orthogonal sind, da die $\varphi_\nu'(x)$ Kosinusse sind, aber sie sind nicht normiert wegen der Faktoren, die durch die Differentiation hinzutreten. Setzen wir zur Abkürzung $C \int_0^1 \varphi_\nu'^2(x)\, d x = c_\nu$, so folgt aus diesen Auseinandersetzungen:

(141) $$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{\nu}^{1,\infty} c_\nu\, p_\nu^2(t).$$

Auch dies ist die nämliche Form der potentiellen Energie, die man aus der Mechanik diskreter Punkte her kennt.[1]) Es sind offenbar die Größen $p_\nu(t)$ die Normalkoordinaten des Problems.

Wirken nun noch äußere Kräfte, die die Koordinaten p_ν zu verändern bestrebt sind und die P_ν heißen mögen, so können wir die Lagrangeschen Gleichungen zweiter Art anwenden:

$$\frac{d}{d t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{p}_\nu}\right) - \frac{\partial L}{\partial p_\nu} + \frac{\partial \Phi}{\partial p_\nu} = P_\nu;$$

und die Ausführung der angedeuteten Operationen ergibt hier für jeden Massenpunkt der Saite die Schwingungsgleichung:

(142) $$\ddot{p}_\nu(t) + c_\nu\, p_\nu(t) = P_\nu.$$

Um zur Ableitung des Kernes überzugehen, berechnen wir auf zwei verschiedenen Wegen die von den äußeren Kräften geleistete Arbeit A. Sie ist einmal offenbar gleich

(143a) $$A = \sum_{\nu}^{1,\infty} P_\nu\, \delta p_\nu.$$

Einen zweiten Wert dafür erhalten wir, indem wir die Kraft X pro Längeneinheit der Saite einführen. Dann ist die Kraft, die an dem

[1]) Vgl. z. B. die zweite Gleichung (49) auf pag. 245.

Stück dx wirkt, gleich $X\,dx$ und die Gesamtkraft natürlich $\int\limits_0^1 X\,dx$. Die am „Punkte" x wirkende Kraft $X\,dx$ erteilt diesem die Verrückung δu, so daß die Elementararbeit:

$$dA = X\,dx \cdot \delta u,$$

und die Gesamtarbeit:

$$A = \int\limits_0^1 X\,dx \cdot \delta u \tag{143b}$$

wird. Nach (139) ist nun für eine feste Stelle x:

$$\delta u = \sum_{\nu}^{1,\infty} \varphi_\nu(x) \cdot \delta p_\nu,$$

also folgt für A nach (143b):

$$A = \int\limits_0^1 X\,dx \cdot \sum_{\nu}^{1,\infty} \varphi_\nu(x)\,\delta p_\nu = \sum_{\nu}^{1,\infty} \delta p_\nu \cdot \int\limits_0^1 X \cdot \varphi_\nu(x)\,dx. \tag{143c}$$

Durch Vergleich von (143a) und (143c) ergibt sich daraus für P_ν die Darstellung:

$$P_\nu = \int\limits_0^1 X\,\varphi_\nu(x) \cdot dx. \tag{144}$$

In dem Falle, daß die Kräfte P_ν die Saite im Gleichgewicht halten, verschwinden die Größen $\ddot{p}_\nu(t)$, und nach (142) und (144) wird:

$$p_\nu = \frac{P_\nu}{c_\nu} = \frac{\int\limits_0^1 X\,\varphi_\nu(x)\,dx}{c_\nu}. \tag{145}$$

Zur Gültigkeit dieser Gleichung ist erforderlich, daß alle $c_\nu \neq 0$ sind, was vorläufig vorausgesetzt wird.

Also ergibt sich für die Verrückung (u) dieser Gleichgewichtslage der Saite nach (139):

$$(u) = \sum_{\nu}^{1,\infty} \varphi_\nu(x) \cdot p_\nu = \frac{\sum\limits_{\nu}^{1,\infty} \varphi_\nu(x) \int\limits_0^1 X\,\varphi_\nu(x)\,dx}{c_\nu}. \tag{146}$$

Nunmehr wollen wir die Kraft X nur an einer Stelle der Saite ξ als von Null verschieden annehmen, jedoch an dieser Stelle so groß, daß $\int\limits_0^1 X\,dx$ trotzdem einen endlichen Wert behält, den wir der Einfachheit halber gleich 1 annehmen wollen. Unter diesen Voraussetzungen ist:

$$(147)\qquad \int_0^1 X\,\varphi_\nu(x)\,dx = \varphi_\nu(\xi)\int_0^1 X\,dx = \varphi_\nu(\xi).$$

Durch Einsetzen in (146) folgt daraus für die betrachtete spezielle Verrückung:

$$(148)\qquad (u) \equiv u_{x,\xi} = \sum_\nu^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu(x)\cdot\varphi_\nu(\xi)}{c_\nu},$$

die abgesehen vom Faktor $\frac{1}{c^2}$ mit dem Kern identisch ist; denn c_ν ist nach (142) gleich dem Quadrate der Eigenfrequenz n_ν^2, also z. B. nach (30) gleich $c^2\nu^2\pi^2 = c^2\lambda_\nu$. Man erkennt leicht, daß in der Tat die mechanische Bedeutung des Kernes die alte ist: eine Gleichgewichtslage der Saite (d. h. eine die Randbedingungen erfüllende Lösung der Gleichung $\frac{d^2u}{dx^2} = 0$), die hervorgerufen wird durch eine Kraft von der Intensität 1 $\left(\int_0^1 X\,dx = 1\right)$ am Punkte ξ.

Von (148) aus kommt man natürlich sehr rasch zur Integralgleichung. Setzen wir die Verrückung $u_{x\xi}$ in (148) gleich $\frac{1}{c^2}K(x\,\xi)$, multiplizieren mit einem beliebigen Eigenwerte $\varphi_\mu(x)$ und integrieren über das ganze Massensystem, so folgt:

$$\frac{1}{c^2}\int_0^1 K(x\,\xi)\varphi_\mu(x)dx = \int_0^1\sum_\nu^{1,\infty}\frac{\varphi_\nu(x)\varphi_\nu(\xi)}{c_\nu}\varphi_\mu(x)dx = \sum_\nu^{1,\infty}\frac{\varphi_\nu(\xi)}{c_\nu}\int_0^1\varphi_\nu(x)\varphi_\mu(x)dx,$$

und da das letzte Integral wegen der Orthogonalität der Eigenfunktionen für $\nu \neq \mu$ den Wert Null, für $\nu = \mu$ wegen der Normierung aber den Wert 1 liefert, so folgt schließlich:

$$\frac{1}{c^2}\int_0^1 K(x\,\xi)\,\varphi_\mu(x)\,dx = \frac{\varphi_\mu(\xi)}{c_\nu} = \frac{\varphi_\mu(\xi)}{c^2\lambda_\nu},$$

d. h. die homogene Integralgleichung.

Da die c_ν mit $c^2\lambda_\nu$ identisch sind, so erkennt man, daß die Voraussetzung $c_\nu \neq 0$ hier erfüllt ist, da $\lambda_\nu = \nu^2\pi^2$ $(\nu = 1, 2 \ldots)$ ist.

Der Ausdruck (148) für den Kern findet sich an verschiedenen Stellen in Rayleighs Theorie des Schalles; der Zusammenhang dieser viel älteren Rayleighschen Entwickelung mit der Theorie der Integralgleichungen ist von Kneser hervorgehoben worden.[1])

[1]) Jahresber. d. Schles. Ges. f. vaterl. Kultur, Math. Sektion, 1909; auch: Kneser, Die Integralgleichungen, pag. 35 ff.

144. Die inhomogene Integralgleichung für die schwingende Saite.

In ganz analoger Weise, wie man von der homogenen Differentialgleichung (16) zur homogenen Integralgleichung geführt wird, gelangt man von der inhomogenen Differentialgleichung (58) für die erzwungenen Schwingungen zu einer äquivalenten inhomogenen Integralgleichung. Die genannte inhomogene Differentialgleichung lautete:

$$(149)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x)\cos n t;\quad u(0) = u(1) = 0.$$

Darin ist n eine gegebene Zahl und bedeutet die Frequenz der erzwungenen Schwingung. Durch den Ansatz:

$$(150)\qquad u = \psi(x)\cdot\cos n t$$

erhält man aus (149):

$$(151)\qquad \begin{cases} \psi''(x) + \lambda\,\psi(x) = -\frac{1}{c^2} f(x);\quad \lambda = \frac{n^2}{c^2}; \\ \psi(0) = \psi(1) = 0. \end{cases}$$

Dabei ist auch λ, wie n, eine feste vorgeschriebene Größe. Wir kombinieren die erste Gleichung (151) mit der bekannten Differentialgleichung des Kernes:

$$\frac{d^2 K(x\,\xi)}{d x^2} = 0,$$

indem wir letztere mit $\psi(x)$, erstere mit $K(x\xi)$ erweitern, und subtrahieren. Dann folgt:

$$\psi''(x) K(x\,\xi) - K''(x\,\xi)\,\psi(x) + \lambda\,\psi(x) K(x\,\xi) = -\frac{1}{c^2} f(x) K(x\,\xi).$$

Nach Multiplikation mit dx und Integration über das Grundgebiet folgt:

$$\int_0^1 \frac{d}{dx}\Big[\psi'(x) K(x\,\xi) - K'(x\,\xi)\,\psi(x)\Big] d x + \lambda \int_0^1 \psi(x) K(x\,\xi)\, d x$$
$$= -\frac{1}{c^2}\int_0^1 f(x) K(x\,\xi)\, d x.$$

Dabei ist die linke Seite der Form nach identisch mit der bei der homogenen Integralgleichung auftretenden [vgl. z. B. Gleichung (112)], und es folgt analog wie dort:

$$-\psi(\xi) + \lambda \int_0^1 K(x\,\xi)\,\psi(x)\, d x = -\frac{1}{c^2}\int_0^1 K(x\,\xi) f(x)\, d x.$$

Wenn wir hier zur Abkürzung setzen:

$$\chi(\xi) = \frac{1}{c^2} \int_0^1 K(x\,\xi) f(x)\, d\,x,$$

so folgt:

(153) $$\psi(\xi) = \chi(\xi) + \lambda \int_0^1 K(x\,\xi)\, \psi(x)\, d\,x,$$

eine Funktionalgleichung, welche als inhomogene Integralgleichung bezeichnet wird, und deren Lösung wir nun zu suchen haben. Es sei nochmals darauf aufmerksam gemacht, daß λ hier im Gegensatz zu den bei der homogenen Integralgleichung auftretenden λ_ν ein fester gegebener Wert ist, der, ebenfalls im Gegensatz zu den Eigenwerten, auch komplex sein kann. Um den Weg zur Lösung der inhomogenen Gleichung (153) zu finden, wollen wir wieder die Betrachtungen der vorhergehenden Nummer aufnehmen, die an die Rayleighsche Methode anknüpfen.

Wir zeigen zunächst, daß man auch auf diesem Wege zur inhomogenen Integralgleichung (153) geführt werden kann. Wir gehen zu dem Zwecke aus von der Bewegungsgleichung eines Massenpunktes der Saite:

(142) $$\ddot{p}_\nu(t) + c_\nu\, p_\nu(t) = P_\nu$$

oder unter Benutzung von (144):

(154) $$\ddot{p}_\nu + c_\nu\, p_\nu = \int_0^1 X\, \varphi_\nu(x)\, d\,x.$$

Wir betrachten auch hier solche Fälle, in denen die äußere Kraft X zeitlich rein periodisch ist, so daß wir also setzen können:

(155a) $$X = \bar{X} \cos n\,t$$

(n die schon früher eingeführte gegebene Größe).

Dann setzen wir zur Integration von (154):

(155b) $$\begin{cases} p_\nu = \bar{p}_\nu \cdot \cos n\,t, \\ u = \bar{u} \cdot \cos n\,t. \end{cases}$$

Da nach (144) $P_\nu = \int_0^1 X\, \varphi_\nu(x)\, d\,x$, so können wir für P_ν ebenfalls setzen:

$$P_\nu = \bar{P}_\nu \cdot \cos n\,t = \int_0^1 \bar{X}\, \varphi_\nu(x)\, d\,x \cdot \cos n\,t,$$

so daß

(155c) $$\bar{P}_\nu = \int_0^1 \bar{X}\, \varphi_\nu(x)\, d\,x \quad \text{ist.}$$

Die Einsetzung der Werte (155a) bis (155c) in (154) ergibt dann:

$$\bar{p}_\nu(-n^2 + c_\nu) = \bar{P}_\nu = \int_0^1 \bar{X}\varphi_\nu(x)\,d\,x,$$

oder

$$\bar{p}_\nu = \frac{\bar{P}_\nu}{c_\nu - n^2},$$

oder unter Benutzung der Bezeichnungen:

(156) $$\begin{cases} c_\nu = c^2\lambda_\nu, \\ n^2 = c^2\lambda \end{cases}$$

(157) $$\bar{p}_\nu = \frac{1}{c^2}\,\frac{\bar{P}_\nu}{\lambda_\nu - \lambda}.$$

Man erkennt zunächst, daß dieser Ansatz nur solange einen Sinn hat, als $\lambda \neq \lambda_\nu$, d. h. solange der mit n zugleich fest gegebene Parameter λ von jedem der Eigenwerte λ_ν verschieden ist. Nur unter dieser Voraussetzung hat überhaupt die Gleichung (142) eine Lösung. Multipliziert man (157) mit $\varphi_\nu(x)$ und summiert über das ganze Massensystem, so folgt nach (139) und (155b), da $\bar{u} = \Sigma\,\varphi_\nu(x)\cdot\bar{p}_\nu$ ist:

(158) $$\bar{u} = \frac{1}{c^2}\sum_\nu^{1,\infty}\frac{\bar{P}_\nu\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu - \lambda} = \frac{1}{c^2}\sum_\nu^{1,\infty}\frac{\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu - \lambda}\int_0^1 \bar{X}\,\varphi_\nu(x)\,d\,x.$$

Dieser Wert von $\bar{u}$ für $x = \xi$ gebildet ist natürlich gleich:

(158a) $$\bar{u}(\xi) = \frac{1}{c^2}\sum_m^{1,\infty}\frac{\varphi_m(\xi)}{\lambda_m - \lambda}\int_0^1 \bar{X}\,\varphi_m(x)\,d\,x = \frac{1}{c^2}\sum_m^{1,\infty}\frac{\varphi_m(\xi)}{\lambda_m - \lambda}\,\bar{P}_m,$$

wenn wir den Summationsbuchstaben ν jetzt durch m ersetzen, was natürlich für die Sache ohne Bedeutung ist. Multipliziert man diese Gleichung mit $K(x\xi)$ und integriert nach ξ über das Grundgebiet, so folgt:

$$\int_0^1 \bar{u}(\xi)K(x\,\xi)\,d\,\xi = \int_0^1 \bar{u}(\xi)\sum_\nu^{1,\infty}\frac{\varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu(\xi)}{\lambda_\nu}\,d\,\xi,$$

oder nach (158a):

$$\int_0^1 \bar{u}(\xi)K(x\,\xi)\,d\,\xi = \frac{1}{c^2}\int_0^1\sum_m^{1,\infty}\frac{\varphi_m(\xi)}{\lambda_m - \lambda}\,\bar{P}_m\cdot\sum_\nu^{1,\infty}\frac{\varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu(\xi)}{\lambda_\nu}\,d\,\xi,$$

oder endlich:

$$\int_0^1 \bar{u}(\xi)K(x\,\xi)\,d\,\xi = \frac{1}{c^2}\sum_\nu^{1,\infty}\frac{\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu}\int_0^1\sum_m^{1,\infty}\bar{P}_m\,\frac{\varphi_\nu(\xi)\,\varphi_m(\xi)}{\lambda_m - \lambda}\cdot d\,\xi.$$

Vertauscht man hier im letzten Integral die Reihenfolge von Integration und Summation, so folgt:

$$(159)\qquad \int_0^1 \bar{u}(\xi) K(x\xi)\, d\xi = \frac{1}{c^2} \sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu} \cdot \sum_{m}^{1,\infty} \frac{\bar{P}_m}{\lambda_m - \lambda} \cdot \int_0^1 \varphi_\nu(\xi)\, \varphi_m(\xi)\, d\xi\,;$$

wegen der Orthogonalität und Normierung folgt, daß das letzte Integral für $m \neq \nu$ den Wert Null, für $m = \nu$ den Wert 1 hat. Also folgt schließlich:

$$\sum_{m}^{1,\infty} \frac{\bar{P}_m}{\lambda_m - \lambda} \int_0^1 \varphi_\nu(\xi)\, \varphi_m(\xi) = \frac{\bar{P}_\nu}{\lambda_\nu - \lambda}\,.$$

Daher wird aus (159):

$$(160)\qquad \int_0^1 \bar{u}(\xi) K(x\xi)\, d\xi = \frac{1}{c^2} \sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu} \cdot \frac{\bar{P}_\nu}{\lambda_\nu - \lambda}\,.$$

Nun benutzen wir folgende Identität:

$$(161)\qquad \frac{1}{\lambda_\nu(\lambda_\nu - \lambda)} = \frac{1}{\lambda} \left\{ -\frac{1}{\lambda_\nu} + \frac{1}{\lambda_\nu - \lambda} \right\}.$$

Damit folgt aus (160):

$$\lambda \int_0^1 \bar{u}(\xi) K(x\xi)\, d\xi = -\frac{1}{c^2} \sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu(x)\, \bar{P}_\nu}{\lambda_\nu} + \frac{1}{c^2} \sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu - \lambda}\, \bar{P}_\nu\,,$$

und da das letzte Glied nach (158) nichts anderes ist wie $\bar{u}(x)$, so haben wir endlich:

$$\bar{u}(x) = \lambda \int_0^1 \bar{u}(\xi) K(x\xi)\, d\xi + \frac{1}{c^2} \sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu(x)\, \bar{P}_\nu}{\lambda_\nu}\,,$$

und wenn man folgende Abkürzungen verwendet:

$$(162)\qquad \left\{ \begin{aligned} \bar{u}(x) &= \psi(x),\\ \frac{1}{c^2} \sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu(x)\, \bar{P}_\nu}{\lambda_\nu} &= \chi(x), \end{aligned} \right.$$

so geht die letzte Gleichung über in die uns bereits bekannte **inhomogene Integralgleichung:**

$$(163)\qquad \psi(x) = \chi(x) + \lambda \int_0^1 \psi(\xi) K(x\xi)\, d\xi\,,$$

die wir hier ausgehend von den **Rayleighschen** Betrachtungen wiedergefunden haben. Dieselben Erwägungen werden uns nun auch den Weg zur Lösung weisen, immer unter der Voraussetzung, daß $\lambda \neq \lambda_\nu$ ist. Ferner wird vorausgesetzt, daß die homogene Integralgleichung — was wir ja bereits wissen — eine Lösung besitzt.

Nach der zweiten Formel (162) ist, wenn wir $\overline{P}_\nu$ durch seinen Wert nach (155c) ersetzen, für $x = \alpha$:

$$\chi(\alpha) = \frac{1}{c^2} \sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu(\alpha)}{\lambda_\nu} \int_0^1 \overline{X} \cdot \varphi_\nu(x)\, d\, x\,,$$

oder nach Vertauschung von Summation und Integration:

$$(164) \qquad \chi(\alpha) = \frac{1}{c^2} \int_0^1 \overline{X} \sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu(\alpha)\,\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu}\, d\, x = \frac{1}{c^2} \int_0^1 \overline{X}\, K(\alpha\, x)\, d\, x\,.$$

Anderseits ist, da $\varphi_\nu(x)$ eine Lösung der homogenen Integralgleichung ist, also da

$$\varphi_\nu(x) = \lambda_\nu \int_0^1 K(x\,\xi)\,\varphi_\nu(\xi)\, d\,\xi$$

ist:

$$\overline{P}_\nu = \int_0^1 \overline{X}\,\varphi_\nu(x)\, d\, x = \int_0^1 \overline{X}\, d\, x \cdot \lambda_\nu \int_0^1 K(x\,\xi)\,\varphi_\nu(\xi)\, d\,\xi\,,$$

oder in anderer Schreibweise:

$$\int_0^1 \overline{X}\,\varphi_\nu(x)\, d\, x = \lambda_\nu \int_0^1\!\!\int_0^1 \left\{\overline{X}\, K(x\,\xi)\, d\, x\right\} \cdot \varphi_\nu(\xi) \cdot d\,\xi\,.$$

Benutzt man hier (164), so kann diese Gleichung auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$(165) \qquad \int_0^1 \overline{X}\,\varphi_\nu(x)\, d\, x = c^2 \lambda_\nu \int_0^1 \chi(\xi)\,\varphi_\nu(\xi)\, d\,\xi\,.$$

Und daraus folgt endlich, wenn man diesen Wert in die Gleichung für $\chi(\alpha)$ einsetzt:

$$(166) \qquad \chi(\alpha) = \sum_{\nu}^{1,\infty} \varphi_\nu(\alpha) \int_0^1 \chi(\xi)\,\varphi_\nu(\xi)\, d\,\xi\,.$$

Nach Gleichung (158) ist nun:

$$\psi(x) = \mathfrak{a}(x) = \frac{1}{c^2} \sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu - \lambda} \int_0^1 \overline{X}\,\varphi_\nu(x)\, d\, x\,.$$

oder nach (165):

$$\psi(x) = \mathfrak{a}(x) = \sum^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu - \lambda} \cdot \lambda_\nu \int^1 \chi(\xi)\,\varphi_\nu(\xi)\, d\,\xi\,.$$

Ersetzt man darin $\frac{\lambda_\nu}{\lambda_\nu - \lambda}$ durch den identischen Wert $1 + \frac{\lambda}{\lambda_\nu - \lambda}$, so ergibt sich schließlich:

$$\psi(x) = \sum_\nu^{1,\infty} \varphi_\nu(x) \int_0^1 \chi(\xi)\, \varphi_\nu(\xi)\, d\xi + \lambda \sum_\nu^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu - \lambda} \int_0^1 \chi(\xi)\, \varphi_\nu(\xi)\, d\xi.$$

Nach (166) ist nun das erste Glied rechts $= \chi(x)$, so daß endgültig folgt:

(168) $$\psi(x) = \chi(x) + \lambda \sum_\nu^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu - \lambda} \int_0^1 \chi(\xi)\, \varphi_\nu(\xi)\, d\xi.$$

Wenn die vorangegangene heuristische Betrachtung streng wäre, so wäre gezeigt, daß Gleichung (168) die Lösung der inhomogenen Integralgleichung darstellt. So ist es vorläufig nur eine, allerdings wahrscheinliche, Vermutung. Zum endgültigen Beweise muß gezeigt werden, daß die Reihe (168) konvergent ist, d. h. überhaupt einen Sinn hat und daß die Integralgleichung durch Einsetzen der Formel (168) identisch befriedigt wird.

Bei dem Konvergenzbeweise gehen wir von der in Nr. 142 bewiesenen Tatsache aus, daß die Reihe

$$K(x\xi) = \sum_\nu^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu(x)\, \varphi_\nu(\xi)}{\lambda_\nu}$$

bei unserem Saitenproblem gleichmäßig und absolut konvergiert.

Wir betrachten nun zum Vergleich mit der zu beweisenden Reihe (168) für $\psi(x)$ die folgende Reihe:

(170) $$\int_0^1 K(x\xi)\, \chi(\xi)\, d\xi = \sum_\nu^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu} \int_0^1 \varphi_\nu(\xi)\, \chi(\xi)\, d\xi.$$

Die hier vorgenommene Vertauschung von Integration und Summation ist gerechtfertigt, weil die Bilinearform gleichmäßig konvergent ist.

Das allgemeine Glied dieser Reihe lautet:

(170a) $$\frac{\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu} \int_0^1 \varphi_\nu(\xi)\, \chi(\xi)\, d\xi.$$

Dies vergleichen wir mit dem allgemeinen Gliede der $\psi(x)$-Reihe (168):

(168a) $$\frac{\lambda}{\lambda_\nu - \lambda} \varphi_\nu(x) \int_0^1 \varphi_\nu(\xi)\, \chi(\xi)\, d\xi = \frac{1}{\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_\nu}\right)} \frac{\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu} \int_0^1 \varphi_\nu(\xi)\, \chi(\xi)\, d\xi.$$

Die letzte Umformung zeigt, daß das allgemeine Glied der $\psi(x)$-Reihe (168) aus dem allgemeinen Gliede der Reihe (170a) hervorgeht durch Multiplikation des letzteren mit dem Faktor $\frac{1}{\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_\nu}\right)}$. Dieser Faktor ist, da $\lambda \neq \lambda_\nu$ vorausgesetzt ist, niemals unendlich groß. Ferner, da $\lambda_\nu = \nu^2\pi^2$ ist, so ist

$$\lim_{\nu=\infty} \lambda_\nu = \infty; \quad \text{also} \quad \lim_{\nu=\infty} \frac{1}{\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_\nu}\right)} = 1.$$

Nun ist aber die Vergleichsreihe (170) auch absolut konvergent, da die Bilinearform des Kernes es ist. Also darf sie nach Satz III der Nr. 141 Glied für Glied mit Faktoren multipliziert werden, die stets unterhalb einer endlichen Grenze bleiben. Diese Bedingung ist für die Faktoren $\frac{1}{\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_\nu}\right)}$ erfüllt, so daß damit die Konvergenz der Reihe (168) bewiesen ist.

Um zu zeigen, daß die Reihe (168) auch die inhomogene Integralgleichung identisch befriedigt, d. h. die Lösung derselben darstellt, bilden wir den Ausdruck:

$$\int_0^1 \psi(x) K(x\,\xi)\,dx = \int_0^1 \chi(x) K(x\,\xi)\,dx + \lambda \sum_\nu^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu(\xi)}{(\lambda_\nu-\lambda)\lambda_\nu} \int_0^1 \varphi_\nu(x)\chi(x)\,dx.$$

Die Gestalt des letzten Gliedes ergibt sich aus der Bilinearform unter Benutzung der Orthogonalität und der Normierung der Eigenfunktionen. Setzt man hier

$$\frac{\lambda}{\lambda_\nu(\lambda_\nu-\lambda)} = -\frac{1}{\lambda_\nu} + \frac{1}{\lambda_\nu-\lambda},$$

so folgt:

$$(171)\quad \left\{ \begin{aligned} \int_0^1 \psi(x) K(x\,\xi)\,dx = \int_0^1 \chi(x) K(x\,\xi)\,dx &- \sum_\nu^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu(\xi)}{\lambda_\nu} \int_0^1 \varphi_\nu(x)\chi(x)\,dx \\ &+ \sum_\nu^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu(\xi)}{\lambda_\nu-\lambda} \int_0^1 \varphi_\nu(x)\chi(x)\,dx. \end{aligned} \right.$$

Unter Benutzung der Bilinearform ersieht man, daß die beiden ersten Glieder rechts sich gegenseitig fortheben, und nach der Formel (168) ist das letzte Glied gleich:

$$\frac{\psi(\xi)-\chi(\xi)}{\lambda}.$$

Damit geht (171) über in:

$$\int_0^1 \psi(x) K(x\,\xi)\,dx = \frac{\psi(\xi)-\chi(\xi)}{\lambda},$$

die anders geschrieben lautet:

$$\psi(\xi) = \chi(\xi) + \lambda \int_0^1 \psi(x) K(x\xi) dx.$$

Das ist aber nichts anderes als die inhomogene Integralgleichung, die somit durch die Formel (168) gelöst wird. Es gilt also: Die inhomogene Integralgleichung besitzt eine Lösung, falls $\lambda \neq \lambda_\nu$ ist, und diese wird geliefert durch die Gleichung (168). Sie versagt, wenn $\lambda = \lambda_\nu$ wird, d. h. wenn die homogene Integralgleichung eine Lösung besitzt. Die Lösung der inhomogenen Integralgleichung in der speziellen Form (168) ist wohl zuerst von E. Schmidt[1]) auf Grundlage von Untersuchungen von D. Hilbert[2]) gegeben worden.

In unserem speziellen Falle der erzwungenen Schwingung der Saite erhalten wir demnach folgende Lösung: Es ist zunächst nach (152)

$$\chi(\xi) = \frac{1}{c^2} \int_0^1 K(x\xi) f(x) dx,$$

d. h. $\chi(\xi)$ ist eine quellenmäßig dargestellte Funktion, die wir auf die Fouriersche Weise nach den Eigenfunktionen entwickeln können; also:

(172) $$\begin{cases} \chi(x) = \sum_\nu^{1,\infty} b_\nu \cdot \varphi_\nu(x), \quad \text{wo} \\ b_\nu = \int_0^1 \varphi_\nu(\xi) \chi(\xi) d\xi. \end{cases}$$

Setzt man dies in die Lösung (168) der inhomogenen Integralgleichung ein, so erhält man:

$$\psi(x) \equiv \bar{u}(x) = \sum_\nu^{1,\infty} \frac{b_\nu \varphi_\nu(x) \lambda_\nu}{\lambda_\nu - \lambda}.$$

Setzt man hier für λ_ν den Wert $\nu^2\pi^2 = \frac{n_\nu^2}{c^2}$, für λ den Wert $\frac{n^2}{c^2}$, für $\varphi_\nu(x)$ den Wert $\sqrt{2}\sin\nu\pi x$, so folgt schließlich:

(173) $$\bar{u}(x) = \sqrt{2} \sum_\nu^{1,\infty} b_\nu \sin\nu\pi x \cdot \frac{n_\nu^2}{n_\nu^2 - n^2}.$$

Multiplizieren wir noch mit $\cos nt$, so ist nach (155b)

---

[1]) E. Schmidt, Dissertation, Göttingen 1905; Mathem. Annalen 63.

[2]) D. Hilbert, Grundzüge einer allg. Theorie d. lin. Integralgl., 1. bis 5. Mitteilung. 1904.

$$(174)\qquad u(x, t) = \sqrt{2}\cdot\cos n t\cdot\sum_{\nu}^{1,\infty}\frac{b_\nu n_\nu^2}{n_\nu^2 - n^2}\cdot\sin\nu\pi x,$$

eine Gleichung, die der Form nach völlig mit (70a) übereinstimmt, die unsere frühere Lösung für die erzwungene Schwingung darstellt. Damit die beiden Lösungen, wie es ja sein muß, identisch werden, muß, wie ein Vergleich von (70a) und (174) ergibt, die Beziehung bestehen:

$$(175)\qquad -C_\nu c^2 = b_\nu n_\nu^2.$$

Nun ist nach (152) und (172):

$$(176)\qquad b_\nu = \frac{1}{c^2}\int_0^1 \varphi_\nu(\xi)\,d\xi\int_0^1 K(\alpha\,\xi)\,f(\alpha)\,d\alpha,$$

während C_ν nach (60a) und (63) ist:

$$(177)\qquad C_\nu = -\frac{1}{c^2}\int_0^1 f(\alpha)\,\varphi_\nu(\alpha)\,d\alpha.$$

Wendet man auf (176) die Bilinearform an, so ist in elementarer Rechnung die geforderte Gleichung (175) zu verifizieren. Demnach stimmt in der Tat unsere Gleichung (174) für die erzwungenen Schwingungen, die wir durch Lösung der inhomogenen Integralgleichung (157) erhielten, mit unserer alten Lösung überein. Durch Hinzufügung der allgemeinen Lösung der inhomogenen Integralgleichung erhält man also auch hier wieder die frühere allgemeinste Lösung, so daß ein weiteres Eingehen darauf hier sich erübrigt.

145. Gedämpfte Schwingungen der Saite.

Die bisher behandelten Schwingungen der Saite waren sogenannte ungedämpfte, da bei der Herleitung der Gleichung von Reibungskräften abgesehen war. In Wirklichkeit sind diese immer vorhanden, und mögen sie auch vielfach sehr klein sein, so gibt es doch Fälle, in denen sie berücksichtigt werden müssen. Das trifft z. B. zu bei der erzwungenen Schwingung, wenn Resonanz vorliegt. Die ungedämpft schwingende Saite würde, wie bereits in Nr. 138 hervorgehoben wurde, in diesem Falle im stationären Zustande unendlich große Amplituden besitzen. Das ist nur ein anderer Ausdruck dafür, daß in diesem Falle die Dämpfung berücksichtigt werden müßte. Wir werden jetzt dazu übergehen, indem wir eine Reibungskraft einführen, die proportional der Geschwindigkeit ist; der Proportionalitätsfaktor k werde übrigens als klein angenommen. Dann erhalten wir für die freie Schwingung, wenn u irgend eine der möglichen Verschiebungen (ξ oder η oder ζ) und ε die lineare Dichtigkeit der Saite bedeuten:

(178) $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{k}{s}\frac{\partial u}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

mit den alten Randbedingungen $u(0) = u(1) = 0$, wobei die Länge wieder gleich 1 angenommen wird. Man gelangt zu einer Lösung der Gleichung (178) durch den folgenden Ansatz:

(179) $$u = e^{-\delta t} \cos n t \cdot \varphi(x),$$

wo δ und n zu bestimmende Konstanten sind. Damit erhält man:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\cos n t\, e^{-\delta t} \cdot \delta \cdot \varphi(x) - n \cdot \sin n t\, e^{-\delta t} \varphi(x);$$

also für

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = e^{-\delta t} \cos n t\, \varphi(x)(\delta^2 - n^2) + e^{-\delta t} \sin n t\, \varphi(x)\, 2\,\delta n;$$

ebenso für

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{-\delta t} \cdot \cos n t \cdot \varphi''(x).$$

Die Einführung dieser Werte in (178) liefert, wenn der gemeinsame Faktor $e^{-\delta t}$ gestrichen wird:

$$\cos n t \left\{+ \varphi(x)\left(\delta^2 - n^2 - \frac{\delta k}{s}\right) - \varphi''(x) \cdot c^2\right\}$$
$$+ \sin n t \left\{\varphi(x)\left(2\,\delta n - \frac{n k}{s}\right)\right\} = 0.$$

Da diese Gleichung für alle Zeiten Gültigkeit haben soll, müssen die Koeffizienten von $\cos nt$ und $\sin nt$ einzeln verschwinden, so daß man die beiden Gleichungen erhält:

(180) $$\begin{cases} \varphi(x)\left\{- n^2 + \delta^2 - \frac{\delta k}{s}\right\} - c^2 \varphi''(x) = 0, \\ \varphi(x)\left\{2\,\delta n - \frac{n k}{s}\right\} = 0. \end{cases}$$

Die letztere derselben liefert sofort den Wert für δ:

(181) $$\delta = \frac{k}{2s},$$

und damit folgt aus der ersteren:

(182) $$\begin{cases} \varphi''(x) + \lambda\, \varphi(x) = 0, \quad \text{wo:} \\ \lambda = \dfrac{n^2 + \frac{k^2}{4 s^2}}{c^2}. \end{cases}$$

Da zu (182) auch wieder die alten Randbedingungen $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ hinzutreten, so erkennt man, daß hier unser altes Randwertproblem von Nr. 135 vorliegt, das natürlich auch hier wieder auf dieselbe homogene Integralgleichung führt. Indem wir unsere alten Resultate hier übertragen, ergibt sich: (182) nebst Randbedingung ist nur lösbar für gewisse

Werte von λ, die Eigenwerte λ_ν; dieselben sind gleich $\nu^2\pi^2$. Die zugehörigen Eigenfunktionen sind auch hier $\sqrt{2}\sin\nu\pi x$, $(\nu = 1, 2 \ldots \infty)$. Man beachte jedoch folgendes: Es haben zwar die λ_ν die alten Werte $\nu^2\pi^2$, aber sie selbst sind hier anders definiert als in Nr. 185. Hier haben wir nach (182):

$$\lambda_\nu = \frac{n_\nu^2 + \frac{k^2}{4\varepsilon^2}}{c^2} = \nu^2\pi^2,$$

woraus für die Frequenz der ν^{ten} Eigenschwingungen folgt:

$$n_\nu^2 = c^2\nu^2\pi^2 - \frac{k^2}{4\varepsilon^2}, \tag{183}$$

während früher nach Gleichung (30) für die ungedämpfte Welle $n_\nu^2 = c^2\nu^2\pi^2$ war. Die Schwingungszahl ist also durch die Dämpfung verkleinert worden, genau so wie es für einen einzelnen Massenpunkt der Fall ist. Da jedoch k eine sehr kleine Zahl ist, so können wir nach (183) mit großer Annäherung die Schwingungszahl als ungeändert trotz der Dämpfung betrachten.

Für eine partikuläre Lösung u_ν erhalten wir nach (179) und (181), wenn wir für n_ν den ungeänderten Wert $c\nu\pi$ benutzen:

$$u_\nu = \sqrt{2}\, e^{-\frac{k}{2\varepsilon}t}\cdot\cos c\nu\pi t\cdot\sin\nu\pi x, \tag{184}$$

und das allgemeine Integral ist, wenn wir noch den zu (179) parallelen Ansatz benutzen, in dem $\cos nt$ durch $\sin nt$ ersetzt ist:

$$u = \sum_\nu^{1,\infty} u_\nu = \sqrt{2}\, e^{-\frac{k}{2\varepsilon}t}\sum_\nu^{1,\infty}\sin\nu\pi x\{A_\nu\sin c\nu\pi t + B_\nu\cos c\nu\pi t\}. \tag{185}$$

Diese Lösung kann unter den nämlichen Bedingungen, wie die der ungedämpften Schwingungen einem vorgeschriebenen Anfangszustande angepaßt werden.

Man erkennt aus (184) oder (185), daß die Schwingung nicht mehr streng periodisch ist, wegen des Faktors $e^{-\frac{k}{2\varepsilon}t}$, der ein allmähliches Abklingen der Saite verursacht; man pflegt derartige Schwingungen aber als „quasiperiodisch" zu bezeichnen, weil sie mit rein periodischen Vorgängen doch noch eine Anzahl von Eigenschaften gemeinsam haben.

Gehen wir jetzt zu den erzwungenen Schwingungen der Saite unter Berücksichtigung der Reibung über, so lautet die Differentialgleichung, indem man zu (178) eine störende Kraft $f(x)\cos nt$ hinzufügt (die Randbedingungen bleiben):

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{k}{\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial t} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x)\cdot\cos nt, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{186}$$

Hier machen wir den Ansatz:

(187) $$u = g(x) \cdot \cos nt + h(x) \cdot \sin nt,$$

wo n wieder eine feste Zahl ist; die Randbedingungen fordern:

(187a) $$g(0) = g(1) = h(0) = h(1) = 0.$$

Wir setzen (187) in (186) ein und ordnen nach $\cos nt$ und $\sin nt$. Dann folgt:

$$\cos nt \left\{ h(x)\frac{nk}{s} - g(x)\cdot n^2 - c^2 g''(x) - f(x) \right\}$$
$$+ \sin nt \left\{ - g(x)\frac{nk}{s} - h(x)\cdot n^2 - c^2 h''(x) \right\} = 0.$$

Da die Gleichung für alle Werte t gelten muß, müssen die Faktoren des Cosinus und Sinus einzeln verschwinden, was die beiden folgenden Gleichungen liefert:

(188) $$\begin{cases} c^2 g''(x) + n^2 g(x) - \frac{nk}{s} h(x) = - f(x), \\ c^2 h''(x) + n^2 h(x) + \frac{nk}{s} g(x) = 0. \end{cases}$$

Diese können durch einen Kunstgriff vereinigt werden. Wir multiplizieren die zweite mit $i = \sqrt{-1}$ und addieren; dann folgt:

(189) $$c^2 \left\{ g(x) + ih(x) \right\}'' + n^2 \left\{ g(x) + ih(x) \right\} + \frac{nki}{s} \left\{ g(x) + ih(x) \right\} = - f(x).$$

Setzen wir zur Abkürzung:

(190) $$g(x) + ih(x) = \Phi(x),$$

so liefert (189):

$$c^2 \Phi''(x) + \left(n^2 + \frac{nki}{s} \right) \Phi(x) = - f(x),$$

oder mit der Abkürzung:

(191) $$\Lambda = \frac{n^2 + \frac{nki}{s}}{c^2}$$

die erste der folgenden Gleichungen, zu der noch die aus (187a) fließenden Randbedingungen hinzutreten:

(192) $$\begin{cases} \Phi''(x) + \Lambda \Phi(x) = - \frac{1}{c^2} f(x), \\ \Phi(0) = \Phi(1) = 0. \end{cases}$$

Hier wollen wir nun, um das Problem möglichst einfach erledigen zu können, zur Integralgleichung nach der in den Gleichungen (149) bis (158) dargelegten Methode der Nr. 144 übergehen. Es sei dabei hervorgehoben, daß der Kern hier natürlich genau derselbe ist wie früher, da

wir es mit den nämlichen Eigenwerten und Eigenfunktionen zu tun haben. Wir haben also:

$$\Phi(\xi) = \chi(\xi) + \Lambda \int_0^1 K(x\,\xi)\Phi(x)\,dx, \tag{193}$$

wo

$$\chi(\xi) = \frac{1}{c^2}\int_0^1 K(x\,\xi) f(x)\,dx \quad \text{ist.} \tag{193a}$$

Nach der Schmidtschen Formel (168) können wir die Lösung schreiben:

$$\Phi(x) = \chi(x) + \Lambda \sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu - \lambda}\int_0^1 \chi(\xi)\,\varphi_\nu(\xi)\,d\xi. \tag{194}$$

An dieser Gleichung wollen wir gleich noch eine Vereinfachung anbringen, indem wir $\chi(x)$, das ja nach (193a) quellenmäßig dargestellt ist, nach Eigenfunktionen $\varphi_\nu(x)$ entwickeln. Wir haben dann:

$$\chi(x) = \sum_{\nu}^{1,\infty} d_\nu\,\varphi_\nu(x); \qquad d_\nu = \int_0^1 \chi(\xi)\,\varphi_\nu(\xi)\,d\xi. \tag{195}$$

Damit liefert (194):

$$\Phi(x) = \sum_{\nu}^{1,\infty} d_\nu\,\varphi_\nu(x)\cdot\frac{\lambda_\nu}{\lambda_\nu - \Lambda}. \tag{196}$$

Setzt man noch

$$\Lambda = \lambda + i\mu, \tag{197}$$

wo nach (191) $\lambda = \frac{n^2}{c^2}$, $\mu = \frac{n\,k}{s\,c^2}$ ist, so folgt unter Benutzung von (190):

$$g(x) + i\,h(x) = \sum_{\nu}^{1,\infty} d_\nu\,\varphi_\nu(x)\cdot\frac{\lambda_\nu}{\lambda_\nu - (\lambda + i\mu)}, \tag{198}$$

eine Gleichung, die in zwei zerfällt durch Trennung des Reellen vom Imaginären. Zur Vereinfachung der Rechnung setzen wir:

$$\begin{cases} \lambda_\nu - \lambda = \varrho_\nu \cos\delta_\nu, \\ \mu \qquad\;\, = \varrho_\nu \sin\delta_\nu, \end{cases} \tag{199}$$

woraus folgt:

$$\begin{cases} \varrho_\nu \;\;= \sqrt{(\lambda_\nu - \lambda)^2 + \mu^2}, \\ \operatorname{tg}\delta_\nu = \frac{\mu}{\lambda_\nu - \lambda}, \quad \lambda_\nu - \lambda - \mu i = \varrho_\nu e^{-i\delta_\nu}. \end{cases} \tag{200}$$

Damit wird (198):

$$g(x) + i\,h(x) = \sum_{\nu}^{1,\infty} d_\nu\,\varphi_\nu(x)\frac{\lambda_\nu e^{i\delta_\nu}}{\varrho_\nu},$$

oder, unter Trennung des reellen und imaginären Teiles:

$$
(201) \qquad \left\{
\begin{aligned}
g(x) &= \sum_{\nu}^{1,\infty} d_\nu \cdot \varphi_\nu(x) \frac{\lambda_\nu}{\varrho_\nu} \cdot \cos \delta_\nu , \\
h(x) &= \sum_{\nu}^{1,\infty} d_\nu \cdot \varphi_\nu(x) \frac{\lambda_\nu}{\varrho_\nu} \cdot \sin \delta_\nu .
\end{aligned}
\right.
$$

Für u ergibt sich daraus nach (187):

$$
u = \cos n t \cdot \sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{d_\nu \lambda_\nu}{\varrho_\nu} \varphi_\nu(x) \cdot \cos \delta_\nu + \sin n t \cdot \sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{d_\nu \lambda_\nu}{\varrho_\nu} \varphi_\nu(x) \cdot \sin \delta_\nu ,
$$

oder in anderer Schreibweise:

$$
(202) \qquad u = \sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{d_\nu \lambda_\nu}{\varrho_\nu} \varphi_\nu(x) \cdot \cos(n t - \delta_\nu).
$$

Setzt man noch für ϱ_ν den Wert nach (200) und für λ_ν den Wert $\frac{n_\nu^2}{s^2}$ ein, so folgt schließlich:

$$
(202\,\mathrm{a}) \qquad u = \sqrt{2} \sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{d_\nu n_\nu^2 \sin \nu \pi x \cdot \cos(n t - \delta_\nu)}{\sqrt{(n_\nu^2 - n^2)^2 + \frac{n^2 k^2}{s^2}}} .
$$

Diese Gleichung ergibt folgendes: Die Verrückung u setzt sich zusammen aus einer unendlichen Anzahl von Gliedern, die sämtlich die Frequenz n haben, die auch der störenden Kraft zukommt. Soweit stimmt (202a) überein mit der Lösung für die ungedämpfte Schwingung. Dagegen sind hier alle diese Partialschwingungen gegen die störende Kraft in der Phase um den Betrag δ_ν verzögert, was, wie die Gleichungen (191), (197), (200) ergeben, eine unmittelbare Folge des Reibungsfaktors ist, da $\operatorname{tang} \delta_\nu \sim k$ ist. Endlich sind die Amplitudenfaktoren jedes Gliedes der Reihe (202a):

$$
\frac{d_\nu n_\nu^2 \sin \nu \pi x}{\sqrt{(n_\nu^2 - n^2)^2 + \frac{n^2 k^2}{s^2}}}
$$

hier stets endlich, auch wenn $n = n_\alpha$, wo α einer der Werte ν ist, d. h. im Falle der Resonanz. Dann wird die Amplitude dieses Gliedes von der Form:

$$
\frac{s\, d_\alpha n_\alpha}{k} \cdot \sin \alpha \pi x .
$$

Man erkennt daraus, daß dieses Glied um so größer ist, je kleiner der Reibungsfaktor k genommen wird, d. h. die Resonanz ist um so beträchtlicher, je geringer die Reibungskraft ist.

(202a) stellt nur ein partikuläres Integral dar, da es keine disponiblen Konstanten besitzt. Man kann jedoch auch hier das allgemeine Integral erhalten, wenn man die Lösung (185) der freien gedämpften Schwingungen hinzu addiert. Dann können wir wieder jeden Anfangszustand mit der Lösung darstellen, vorausgesetzt, daß die betreffenden Funktionen den früher festgestellten Bedingungen gehorchen. Ein näheres Eingehen darauf erübrigt sich hier.

146. Kreisrunde Membran.

Wir gehen jetzt zur Untersuchung der einfachsten Fälle von Membranschwingungen über und betrachten zunächst eine kreisrunde Membran vom Radius 1. Der Rand der Membran liegt, wie bei der Saite, fest. Die Differentialgleichung der Transversalschwingung lautet nach (15):

(203) $$s\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = S\left\{\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right\},$$

wenn ζ die transversale Verrückung bedeutet und die Membran in der xy-Ebene ausgespannt ist; S ist die (konstante) Spannung der Membran.

Es liegt nahe, den Mittelpunkt der Membran als Anfangspunkt des kartesischen Koordinatensystems zu nehmen und ferner an Stelle von x und y ebene Polarkoordinaten r, ϑ einzuführen:

$$x = r\cos\vartheta,$$
$$y = r\sin\vartheta.$$

Nun wollen wir ferner uns auf den Fall beschränken, daß die Verrückungen ζ nur von r, nicht von ϑ abhängen. Wir setzen also axiale Symmetrie um die z-Achse voraus. Das ist freilich nur ein Spezialfall, aber immerhin ein wichtiger, der außerdem am einfachsten zu behandeln ist. Dann haben wir $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}$ in Polarkoordinaten auszudrücken. Man erhält:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\partial \zeta}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial \zeta}{\partial r}\frac{x}{r},$$

woraus durch nochmalige Differentiation nach x folgt:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2}\frac{x^2}{r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \zeta}{\partial r} - \frac{x^2}{r^3}\frac{\partial \zeta}{\partial r};$$

ebenso:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2}\frac{y^2}{r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \zeta}{\partial r} - \frac{y^2}{r^3}\frac{\partial \zeta}{\partial r},$$

also ist schließlich:

(204) $$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \zeta}{\partial r}.$$

Damit geht (203) über in:

$$(205)\qquad s\,\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = S\left\{\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial \zeta}{\partial r}\right\}.$$

Eine Randbedingung können wir nun leicht formulieren: für r gleich 1 muß $\zeta = 0$ sein, da die Membran am Rande befestigt ist. Es scheint allerdings zunächst, als ob außer dieser keine zweite Randbedingung vorhanden wäre. Wir werden jedoch bald erkennen, daß noch eine zweite Bedingung für $r = 0$ existiert; vorläufig lassen wir diese Frage beiseite.

Zur Integration von (203) machen wir den nämlichen Ansatz wie bei der Saite:

$$(206)\qquad \zeta = \varphi(r)\cos nt,$$

wo n eine zu bestimmende Größe ist. Setzt man dies in (205) ein, so folgt zur Bestimmung von $\varphi(r)$:

$$(207)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2\varphi}{dr^2} + \dfrac{1}{r}\,\dfrac{d\varphi}{dr} + \lambda\,\varphi(r) = 0, \quad \text{wo} \\[2ex] \lambda = \dfrac{s\,n^2}{S} \quad \text{ist.} \end{cases}$$

Führt man hier $\sqrt{\lambda}r$ als neue Variable ein, die wir einen Augenblick z nennen wollen, so geht (207) in die Form über:

$$(207\,\text{a})\qquad \frac{d^2\varphi}{dz^2} + \frac{1}{z}\,\frac{d\varphi}{dz} + \varphi = 0.$$

Diese Differentialgleichung ist unter dem Namen der Besselschen bekannt und ihre Integrale sind Reihen, die „Besselsche Funktionen“ erster und zweiter Art genannt werden, die wir durch $J(z)$ und $Y(z)$ bezeichnen. Die Definitionsgleichungen dafür sind:[1])

$$(208)\qquad \begin{cases} J(z) = 1 - \dfrac{\left(\frac{1}{2}z\right)^2}{1!^2} + \dfrac{\left(\frac{1}{2}z\right)^4}{2!^2} - \dfrac{\left(\frac{1}{2}z\right)^6}{3!^2} + \dots \\[3ex] Y(z) = J(z)\log\text{nat}\,z + \dfrac{\left(\frac{z}{2}\right)^2}{1!^2} - \dfrac{\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{z}{2}\right)^4}{2!^2} + \dfrac{\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\right)\left(\frac{z}{6}\right)^6}{8!^2} - \dots \end{cases}$$

Man erkennt aus diesen Gleichungen sofort folgende Eigenschaft: für $z = 0$ bleibt $J(z)$ endlich; es erhält nämlich den Wert 1; dagegen wird $Y(z)$ wegen des auftretenden Logarithmus unendlich groß. Das allgemeine Integral von (207) lautet daher, wenn wir für z seinen Wert $\sqrt{\lambda}\,r$ substituieren:

$$(209)\qquad \varphi = A_\lambda J\left(\sqrt{\lambda}\,r\right) + B_\lambda Y\left(\sqrt{\lambda}\,r\right).$$

---

[1]) Vgl. z. B. die Funktionentafeln mit Formeln und Kurven von E. Jahnke und F. Emde, pag. 90 und 94.

Aus der eben gemachten Bemerkung über $Y(0)$ erkennt man leicht, daß noch eine zweite Randbedingung für $r=0$ existieren muß: wir müssen nämlich selbstverständlich verlangen, daß die Membran im Mittelpunkte $r=0$ nur eine **endliche** Verschiebung erleidet. Das gibt also im ganzen die beiden Randbedingungen:

$$\zeta(0) \text{ endlich}; \quad \zeta(1) = 0.$$

Daraus folgt für φ:

(207b) $$\varphi(0) \text{ endlich}; \quad \varphi(1) = 0.$$

Hält man dies mit (209) zusammen, so sieht man sofort, daß der Koeffizient B_λ verschwinden muß, da sonst die Endlichkeit der Lösung nicht gewahrt bleiben könnte, also folgt:

(210) $$\varphi(r) = A_\lambda J(\sqrt{\lambda}\, r).$$

Nun ist noch die zweite Randbedingung (207b) zu erfüllen, nämlich $\varphi(1)=0$. Dies könnte durch die Annahme $A_\lambda = 0$ geschehen, doch hätte man dann die banale Lösung $\varphi(r)=0$. Schließen wir diese aus, so muß also gelten:

(211) $$J(\sqrt{\lambda}) = 0,$$

die **eine Bedingungsgleichung** für das **unbekannte** λ, d. h. für n **darstellt.** Alle Werte λ_ν, die dieser Bedingung gehorchen — es gibt deren unendlich viele — liefern mögliche Lösungen des Randwertproblems.

Die Funktionen $\varphi_\nu(r) = J(\sqrt{\lambda_\nu}\, r)$ sind demgemäß die (allerdings noch nicht normierten) **Eigenfunktionen**, die Werte $\lambda_\nu = \frac{s\, n_\nu^2}{S}$ die **Eigenwerte** des Problems. Da die Lösungen mit beliebigen Konstanten multipliziert werden können und die Differentialgleichung linear ist, so erhält man mit Rücksicht auf den Ansatz (206):

$$\zeta = \sum_\nu^{1,\infty} A_\nu J_1(\sqrt{\lambda_\nu}\, r) \cdot \cos n_\nu t.$$

Hätte man statt (206) angesetzt, was ebenso brauchbar ist, da der Cosinus und der Sinus gleichberechtigt sind:

$$\zeta = \varphi(r) \sin nt,$$

so hätte sich analog ergeben:

$$\zeta = \sum_\nu^{1,\infty} B_\nu J(\sqrt{\lambda_\nu}\, r) \cdot \sin n_\nu t.$$

Daher erhalten wir als allgemeinste Lösung:

(212) $$\zeta = \sum_\nu^{1,\infty} \{A_\nu \cos n_\nu t + B_\nu \sin n_\nu t\} J(\sqrt{\lambda_\nu} \cdot r).$$

Die disponiblen Konstanten A_ν und B_ν müssen so bestimmt werden, daß (212) für $t = 0$ die gegebenen Anfangsbedingungen erfüllt; es sei etwa:

$$\text{für } t = 0: \quad \begin{cases} \zeta = F(r), \\ \dfrac{\partial \zeta}{\partial t} = G(r). \end{cases}$$

Dann sind hier folgende Gleichungen zu erfüllen:

$$\zeta_{t=0} = \sum_{\nu}^{1,\infty} A_\nu J(\sqrt{\lambda_\nu}\, r) = F(r),$$

$$\left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)_{t=0} = \sum B_\nu \cdot n_\nu J(\sqrt{\lambda_\nu}\, r) = G(r).$$

Um diese Entwickelungsprobleme streng zu behandeln, geht man am einfachsten auch hier wieder zu einer homogenen Integralgleichung über, was ganz analog wie bei der Saite geschehen kann. Man erkennt aus dem dort gegebenen Gedankengange, daß alle Schlüsse im wesentlichen sich auch hier übertragen lassen, so daß ein genaueres Eingehen darauf sich erübrigt.

Wir wollen jetzt zur Besprechung der möglichen Schwingungsformen der Membran übergehen. Dazu genügt es, wenn wir in (212) die Größen B_ν gleich Null nehmen, so daß wir den einfacheren Ansatz haben:

$$(213) \quad \zeta = A_1 J(\sqrt{\lambda_1}\, r) \cos n_1 t + A_2 J(\sqrt{\lambda_2}\, r) \cos n_2 t + A_3 J(\sqrt{\lambda_3}\, r) \cdot \cos n_3 t + \ldots$$

Die Größen $\sqrt{\lambda_1}$, $\sqrt{\lambda_2}$ sind dabei nach (211) die Wurzeln der Gleichung $J(x) = 0$, die man Tabellen für Besselsche Funktionen entnehmen kann.[1] Man findet so:

ν	$\sqrt{\lambda_\nu}$
1	2,4048
2	5,5201
3	8,6537
4	11,7915
...	....
6	18,0711
...	....
15	46,8412
16	49,4826
...	....

Betrachten wir nun die Grundschwingung der Membran, indem wir das erste Glied von (213) allein nehmen:

[1]) Jahnke-Emde, l. c. pag. 122.

(214) $$\zeta_1 = A_1 J(\sqrt{\lambda_1}\, r) \cos n_1 t = A_1 J(2{,}4048\, r) \cos \sqrt{\frac{S}{s}\lambda_1}\, t,$$

oder wenn wir $\frac{S}{s}$ ein für allemal zur Abkürzung c^2 setzen:

(214a) $$\zeta_1 = A_1 J(2{,}4048\, r) \cdot \cos c\sqrt{\lambda_1}\, t.$$

Das ist eine Schwingung von der Frequenz $n_1 = c\sqrt{\lambda_1}$; dieselbe besitzt den Amplitudenfaktor $A_1 J(2{,}4048 r)$, wo 2,4048 nach der Tabelle die erste Wurzel der Gleichung $J(x) = 0$ ist. Da nun r auf der Membran stets zwischen 0 und 1 liegen muß, so wird $J(2{,}4048 r)$ erst für $r = 1$ zu Null,

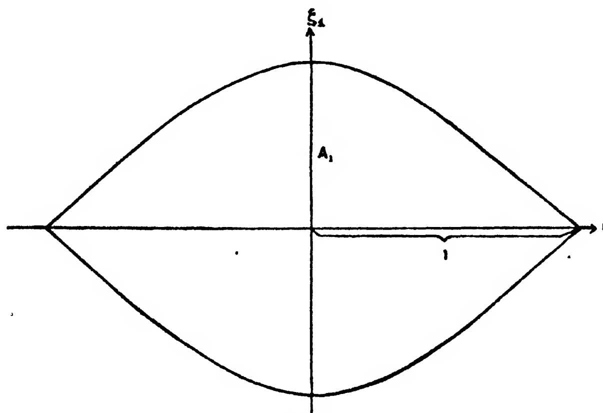


Fig. 175.

d. h. der Rand der Membran ist die einzige zu allen Zeiten dauernd festliegende Stelle. Für alle anderen Werte von r ist $J(2{,}4048 r)$ von Null verschieden, und die Deformation der Membran erreicht ihr Maximum für $r = 0$, d. h. im Zentrum. Die Grenzlagen der Membran sind also:

$$\pm A_1 J(2{,}4048\, r)$$

und das ergibt, graphisch dargestellt, das Bild der Fig. 175, die man ebenfalls dem zitierten Tabellenwerk entnehmen kann. Fig. 175 ist ein Schnitt durch die Membran in einer durch die z-Achse gehenden Ebene; durch Drehung um die z-Achse erhält man die Gestalt der ganzen Membran.

Für die erste Oberschwingung ergibt sich:

(215) $$\zeta_2 = A_2 J(5{,}5201\, r) \cdot \cos c\sqrt{\lambda_2}\, t.$$

Das ist eine Schwingung mit der Frequenz $n_2 = c\sqrt{\lambda_2} = 5{,}5201\, c$, die also keineswegs wie bei der Saite doppelt so groß ist wie n_1. Dem entspricht auch das Verhalten des Amplitudenfaktors

$$A_2 J(5{,}5201\, r),$$

wo 5,5201 die **zweite** Wurzel der Gleichung $J(x)=0$ ist. Daraus folgt also, daß zwischen 0 und 1 ein Wert r_1 existieren muß, derartig, daß $5{,}5201\, r_1 = 2{,}4048 = \sqrt{\lambda_1}$ ist, für den demgemäß die Amplitude dauernd verschwindet. An der Stelle $r = r_1 = \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} = \frac{2{,}4048}{5{,}5201}$ ist die Membran also dauernd in Ruhe, es bildet sich dort eine **kreisförmige Knotenlinie**. Man erkennt, daß durch den Wert r die Strecke von Null bis 1 keineswegs in zwei gleiche Teile geteilt wird, wie dies der Knoten der ersten Oberschwingung bei der Saite tut, sondern etwa im Verhältnis

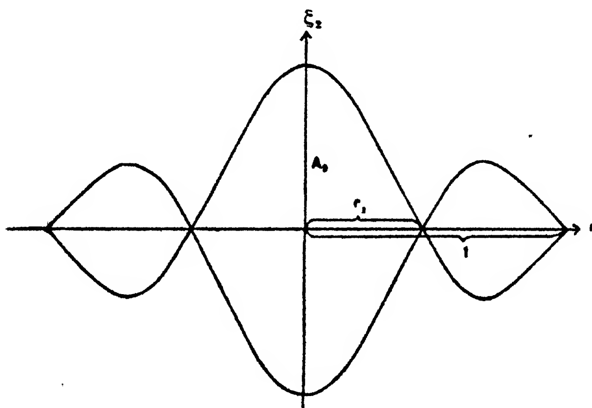


Fig. 176.

0,77 : 1. Man erhält also für die Extremlage der Membran folgendes Bild (Fig. 176), das man ebenfalls den Tabellen von **Jahnke-Emde** entnehmen kann. Fig. 176 stellt einen Schnitt durch die Membran dar in der nämlichen Weise, wie es bei Fig. 175 der Fall ist.

Ganz analog ist es mit der zweiten Oberschwingung:

$$\zeta_3 = A_3 J(8{,}6537\, r) \cos c \sqrt{\lambda_3}\, t. \tag{216}$$

Ihre Frequenz $n_3 = c\sqrt{\lambda_3} = 8{,}6537\, c$; sie steht ebenfalls in keinem einfachen Verhältnis zum Grundton. Der Amplitudenfaktor $J(8{,}6537\, r)$ hat innerhalb des Gebietes von $r=0$ bis $r=1$ **zwei** Nullstellen, da 8,6537 die **dritte** Wurzel von $J(x)=0$ ist. Man erhält dieselben aus der Beziehung:

$$8{,}6537\, r_1' = 2{,}4048,$$

$$8{,}6537\, r_2' = 5{,}5201;$$

oder allgemein:

$$r_1' = \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_3}},$$

$$r_2' = \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_3}}.$$

An diesen Stellen bleibt die Membran dauernd in Ruhe: es bilden sich also hier zwei kreisförmige Knotenlinien. Im Schnitt wird die Schwingungsform der Membran dargestellt durch Fig. 177, die ebenso zu verstehen ist, wie die Figg. 175 und 176. Diese Betrachtung gilt analog für die höheren Oberschwingungen.

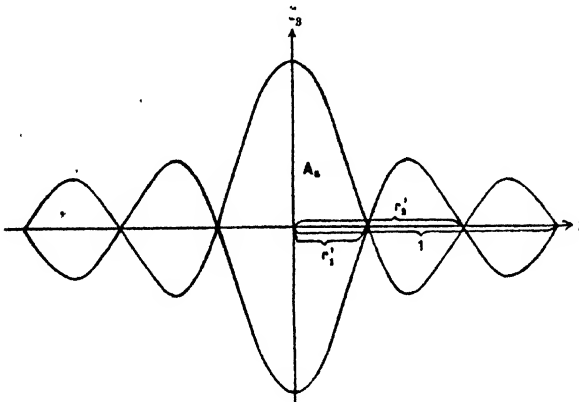


Fig. 177.

Man erkennt also, daß das allgemeine Integral (212) einen äußerst komplizierten Vorgang darstellt, da alle die einzelnen Schwingungen sich mit verschiedenen Amplituden übereinanderlagern. Das Vorhandensein derselben kann experimentell nachgewiesen werden.

Da die Schwingungszahlen der einzelnen Töne, die Werte n_ν, zueinander nicht in einfachen ganzzahligen Verhältnissen stehen wie bei der Saite, und da das Ohr solche Zusammenklänge als Dissonanzen empfindet, nennt man die Partialtöne der kreisförmigen Membran unharmonisch.

Die Untersuchung der erzwungenen Schwingungen, sowie die Berücksichtigung der Dämpfung, bietet keine prinzipiellen Schwierigkeiten.

147. Rechteckige Membran.

Wir wollen nunmehr den Fall untersuchen, daß die Membran rechteckige Gestalt besitzt; die Kantenlängen seien a und b. Den einen Eckpunkt des Rechteckes machen wir zum Anfangspunkt des in Fig. 178

angedeuteten Koordinatensystems. Dann bestehen folgende Randbedingungen:

(217) $$\zeta(0, y) = \zeta(a, y) = \zeta(x, 0) = \zeta(x, b) = 0,$$

die aussagen, daß längs der Begrenzungslinien:

$$x=0, \quad x=a, \quad y=0, \quad y=b$$

die Membran festgespannt ist. Zur Integration der Membrangleichung:

(218) $$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right)$$

machen wir den Ansatz:

(219) $$\zeta = \varphi(x, y) \cos nt \text{ oder } \zeta = \varphi(x, y) \sin nt,$$

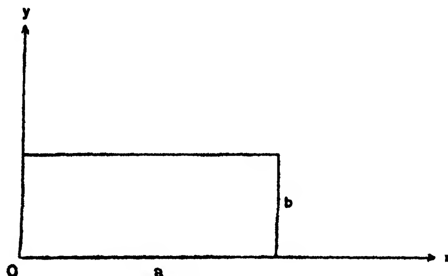


Fig. 178.

wo n eine zu bestimmende Größe ist. Dann liefert (218) in Verbindung mit (217):

(220) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \lambda \varphi = 0; \quad \lambda = \dfrac{n^2}{c^2}; \\ \varphi(0, y) = \varphi(a, y) = \varphi(x, 0) = \varphi(x, b) = 0. \end{cases}$$

Da in den Gleichungen (220) x und y als gleichberechtigt vorkommen, liegt folgender Ansatz nahe:

(221) $$\varphi(x, y) = A \sin \alpha x \cdot \sin \beta y + B \cos \alpha x \cdot \cos \beta y,$$

wo A, B, α, β zu bestimmende Konstante sind. Zunächst liefert die erste Gleichung (220), wenn man diesen Ansatz dort einsetzt:

(222) $$\alpha^2 + \beta^2 = \lambda,$$

und die Randbedingungen $\varphi(0, y) = \varphi(x, 0)$ fordern, daß sein muß:

$$B \cos \beta y = B \cos \alpha x = 0.$$

Das kann nur durch die Annahme $B = 0$ erfüllt werden, so daß wir schon etwas spezieller haben:

(221a) $$\varphi(x,y) = A \sin \alpha x \cdot \sin \beta y.$$

Nun ergibt sich aus den Randbedingungen (220) $\varphi(a,y) = \varphi(x,b) = 0$:

$$A \sin \alpha a \cdot \sin \beta y = A \sin \alpha x \cdot \sin \beta b = 0,$$

und dies kann nur dadurch erfüllt werden, wenn man den trivialen Fall $A = 0$ ausschließt, daß man setzt:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha a = \mu\pi \\ \beta b = \nu\pi \end{array}\right\} \begin{array}{l} \mu = 1, 2, 3 \ldots \infty, \\ \nu = 1, 2, 3 \ldots \infty. \end{array}$$

Das gibt unter Berücksichtigung von (222) folgende Werte für α, β, λ:

(223) $$\left\{\begin{array}{l} \alpha = \frac{\mu\pi}{a}, \quad \beta = \frac{\nu\pi}{b}, \\ \lambda_{\mu\nu} = \alpha^2 + \beta^2 = \pi^2\left(\frac{\mu^2}{a^2} + \frac{\nu^2}{b^2}\right). \end{array}\right.$$

Wir erhalten also als (nicht normierte) Eigenfunktionen:

(224) $$\varphi_{\mu\nu}(x,y) = \sin\frac{\mu\pi x}{a} \cdot \sin\frac{\nu\pi y}{b},$$

als Eigenwerte:

(225) $$\lambda_{\mu\nu} = \pi^2\left(\frac{\mu^2}{a^2} + \frac{\nu^2}{b^2}\right),$$

und nach (220) ergibt sich für die möglichen Schwingungszahlen der Membran:

(226) $$n_{\mu\nu} = c\sqrt{\lambda_{\mu\nu}} = c\pi\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2} + \frac{\nu^2}{b^2}}.$$

Als allgemeinstes Integral erhält man daher unter gleichmäßiger Berücksichtigung beider Ansätze (217):

(227) $$\zeta = \sum_{\mu}^{1,\infty}\sum_{\nu}^{1,\infty}\left\{A_{\mu\nu}\cos n_{\mu\nu}t + B_{\mu\nu}\sin n_{\mu\nu}t\right\}\sin\frac{\mu\pi}{a}x \cdot \sin\frac{\nu\pi}{b}y.$$

Man kann aus (227) in Verbindung mit den vorhergehenden Gleichungen folgendes unmittelbar ablesen:

Der tiefste Ton der Membran wird für $\mu = \nu = 1$ erhalten; also wenn wir der Einfachheit halber die $B_{\mu\nu} = 0$ setzen:

$$\zeta_{11} = A_{11}\cos c\pi\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}\,t \cdot \sin\frac{\pi x}{a} \cdot \sin\frac{\pi y}{b}.$$

Die Knotenlinien fallen hier mit der Begrenzung der Membran zusammen: Die Membran schwingt als Ganzes. Halten wir nun etwa $\nu = 1$ fest und lassen der Reihe nach μ die Werte 2, 3, ... annehmen, so erhält man eine erste Reihe von Obertönen:

$$\zeta_{21} = A_{21} \cos c \pi \sqrt{\frac{2}{a^2} + \frac{1}{b^2}}\, t \cdot \sin \frac{2 \pi x}{a} \cdot \sin \frac{\pi y}{b},$$

$$\zeta_{31} = A_{31} \cos c \pi \sqrt{\frac{3}{a^2} + \frac{1}{b^2}}\, t \cdot \sin \frac{3 \pi x}{a} \cdot \sin \frac{\pi y}{b},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\zeta_{M1} = A_{M1} \cos c \pi \sqrt{\frac{M}{a^2} + \frac{1}{b^2}}\, t \cdot \sin \frac{M \pi x}{a} \cdot \sin \frac{\pi y}{b}.$$

Die Knotenlinien sind dann folgende:

Für $\mu = 2$, $\nu = 1$ verschwindet der Faktor $\sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$ (außer am Rande, was wir in Zukunft nicht mehr erwähnen) für einen Wert $x_1 = \frac{a}{2}$; das liefert also eine Knotenlinie parallel zur y-Achse, durch die die Membran halbiert wird.

Für $\mu = 3$, $\nu = 1$ verschwindet der Amplitudenfaktor, wenn $x_1 = \frac{a}{3}$ und $x_2 = \frac{2a}{3}$ ist. Das sind wieder Parallele zur y-Achse, die das Feld der Membran in drei gleiche Teile teilen, usw.

Für $\mu = M$, $\nu = 1$ verschwindet der Amplitudenfaktor, wenn $x_1 = \frac{a}{M}$, $x_2 = \frac{2a}{M}$, $x_3 = \frac{3a}{M}$, ... $x_{M-1} = \frac{M-1}{M} a$ ist. Alles sind wieder Parallele zur y-Achse, die die Membran in M gleiche Teile teilen.

Ganz analog liegt natürlich die Sache, wenn wir bei festem μ die Zahl ν variieren lassen. Allgemein wird für $\mu = M$, $\nu = N$ die Membran durch Knotenlinien, von denen $(M-1)$ parallel zur y-Achse, $(N-1)$ parallel zur x-Achse sind, in MN gleiche rechteckige Felder geteilt.

Besonderheiten können indessen eintreten, wenn das Kantenverhältnis $\frac{b}{a}$ der Membran kommensurabel ist. Denn dann kann es passieren, daß man dieselbe Schwingungszahl $n_{\mu\nu}$ auf verschiedene Weise erhalten kann. Es sei etwa $b = \delta \cdot a$, wo δ der größte gemeinschaftliche Teiler von b und a ist. Dann ist nach (226):

$$n_{\mu\nu} = c \pi \sqrt{\frac{\mu^2}{a^2} + \frac{\nu^2}{\delta^2 \cdot a^2}} = \frac{c \pi}{\delta \cdot a} \sqrt{\delta^2 \cdot \mu^2 + \nu^2}.$$

Nehmen wir nun etwa $\mu = 1$, $\nu = 2\delta$, so wird:

$$n_{1,2\delta} = \frac{c\pi}{a\delta} \sqrt{\delta^2 + (2\delta)^2} = \frac{c\pi}{a} \sqrt{5}.$$

Genau denselben Wert von $n_{1,2\delta}$ erhält man aber, wenn man beispielsweise $\mu = 2$, $\nu = \delta$ wählt. Denn dann ist:

$$n_{2,\delta} = \frac{c\pi}{a\delta} \sqrt{4\delta^2 + \delta^2} = \frac{c\pi}{a} \sqrt{5} = n_{1,2\delta},$$

was zu beweisen war. Wir wollen uns im folgenden auf den einfachsten Fall beschränken, daß die Membran quadratisch ist, also $b = a$ setzen,

und schließlich der größeren Einfachheit halber noch beide Werte gleich 1 nehmen. Dann erhält man durch Spezialisierung der Gleichungen (224), (225), (226):

$$(228)\quad \begin{cases} \varphi_{\mu\nu}(x,y) = \sin\mu\pi x \cdot \sin\nu\pi y\,, \\ \lambda_{\mu\nu} = \pi^2(\mu^2+\nu^2), \\ n_{\mu\nu} = c\sqrt{\lambda_{\mu\nu}} = c\pi\sqrt{\mu^2+\nu^2}\,. \end{cases}$$

Endlich folgt aus (227):

$$(229)\quad \zeta = \sum_{\mu}^{1,\infty}\sum_{\nu}^{1,\infty}\left\{A_{\mu\nu}\cos n_{\mu\nu}t + B_{\mu\nu}\sin n_{\mu\nu}t\right\}\cdot\sin\mu\pi x\cdot\sin\nu\pi y\,.$$

Dem folgenden legen wir, was ja offenbar keine wesentliche Beschränkung ist, den aus (229) hervorgehenden einfachen Ausdruck zugrunde, wenn $B_{\mu\nu}=0$ gesetzt wird:

$$(229a)\quad \zeta = \sum_{\mu}^{1,\infty}\sum_{\nu}^{1,\infty} A_{\mu\nu}\cdot\cos n_{\mu\nu}t\cdot\sin\mu\pi x\cdot\sin\nu\pi y\,.$$

Hier sind nun, wie man sieht, die x- und y-Richtungen völlig gleichwertig, da die unterscheidenden Faktoren b und a in Fortfall gekommen sind.

Für die Grundschwingungen ($\mu=\nu=1$) treten, wie aus dem Früheren sich sofort ergibt, die einzigen Knotenlinien am Rande auf. Hier ist also alles beim alten. Jetzt wollen wir aber die Schwingung betrachten $\mu=2$, $\nu=1$. Das liefert nach (229a):

$$(230a)\quad \zeta_{21} = A_{21}\cos n_{21}t\cdot\sin 2\pi x\cdot\sin\pi y,$$

wo nach (228):

$$n_{21} = c\pi\sqrt{2^2+1^2} = c\pi\sqrt{5}\quad\text{ist.}$$

Diesen Fall betrachten wir zusammen mit demjenigen, wo umgekehrt $\mu=1$, $\nu=2$ ist. Dafür erhalten wir nach (229a):

$$(230b)\quad \zeta_{12} = A_{12}\cos n_{12}t\cdot\sin\pi x\cdot\sin 2\pi y,$$

wo nach (228)

$$n_{12} = c\pi\sqrt{1^2+2^2} = c\pi\sqrt{5}\quad\text{ist.}$$

Man erkennt aus den beiden Gleichungen (230), daß beide Schwingungen identisch sind, da ja nur die Bezeichnung eine andere ist. Wir wollen sie demgemäß zusammen betrachten:

$$\zeta = \zeta_{12}+\zeta_{21} = \cos n_{12}\cdot t\,\{A_{21}\sin 2\pi x\cdot\sin\pi y + A_{12}\sin\pi x\cdot\sin 2\pi y\}$$

und nach den Knotenlinien fragen. Dabei beschränken wir uns zunächst auf die vier einfachsten Fälle: $A_{21}=0$; $A_{12}=0$; $A_{21}=A_{12}$; $A_{21}=-A_{12}$.

1. Für $A_{21}=0$ ergibt sich, daß eine Knotenlinie, die parallel zur y-Achse ist, das Quadrat halbiert.

2. Für $A_{12}=0$ ergibt sich, daß eine Knotenlinie, die parallel zur x-Achse liegt, das Quadrat halbiert (vgl. die Figg. 179a und 179b).

3. Für $A_{21}=A_{12}$ ergibt sich:

$$\zeta = A_{12} \cos n_{12} \cdot t \{\sin 2\pi x \cdot \sin \pi y + \sin \pi x \cdot \sin 2\pi y\}.$$

Die Knotenlinie liegt dort, wo der Klammerausdruck verschwindet:

$$\sin 2\pi x \cdot \sin \pi y + \sin \pi x \cdot \sin 2\pi y = 0. \tag{231}$$

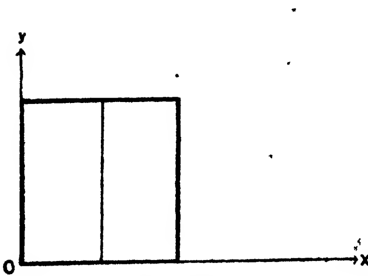


Fig. 179a.

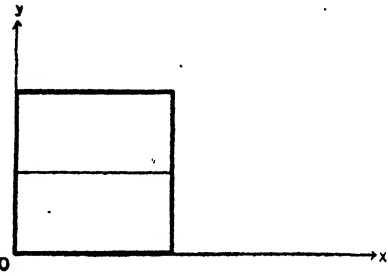


Fig. 179b.

(231) kann nun, indem man $\sin 2\pi x$ und $\sin 2\pi y$ nach bekannten trigonometrischen Formeln entwickelt, folgendermaßen geschrieben werden:

$$2 \sin \pi x \cdot \sin \pi y \{\cos \pi x + \cos \pi y\} = 0. \tag{231a}$$

Diese Gleichung kann erfüllt werden durch $\sin \pi x = 0$, oder durch $\sin \pi y = 0$, was die Knotenlinien am Rande liefert, oder endlich durch:

$$\cos \pi x + \cos \pi y = 0.$$

Schreibt man diese Gleichung in der Form:

$$2 \cos \frac{\pi}{2}(x+y) \cdot \cos \frac{\pi}{2}(x-y) = 0,$$

so muß entweder

$$x+y=1, \text{ oder } x-y=1$$

sein. Da aber x und y auf das Intervall von 0 bis 1 beschränkt sind, so kann nur die erste Gleichung erfüllt werden, und man erhält als Gleichung der Knotenlinie:

$$x+y=1, \tag{232}$$

die in Fig. 180a dargestellt ist.

4. Für $A_{21}=-A_{12}$ ergibt sich:

$$\zeta = A_{21} \cos n_{12} t \{\sin 2\pi x \cdot \sin \pi y - \sin \pi x \cdot \sin 2\pi y\}.$$

Hier erhält man als Bedingung für Knotenlinien, daß:

(233) $$\sin 2\pi x \sin \pi y - \sin \pi x \cdot \sin 2\pi y = 0$$

sein muß, oder in anderer Form:

$$2 \sin \pi x \cdot \sin \pi y \{\cos \pi x - \cos \pi y\} = 0.$$

Durch Annullieren von $\sin \pi x$ oder $\sin \pi y$ erhält man die Knotenlinien am Rande, und als Gleichung für die dritte ergibt sich:

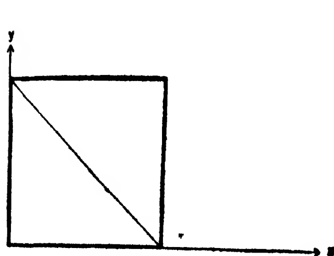


Fig. 180a.

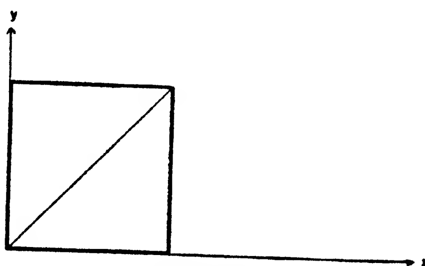


Fig. 180b.

$$\cos \pi x - \cos \pi y = 0,$$

oder:

$$\sin \frac{\pi}{2}(x + y) \cdot \sin \frac{\pi}{2}(x - y) = 0.$$

Das liefert entweder:

$$x + y = 0, \text{ oder } x - y = 0,$$

und da x und y positive echte Brüche sind, ist nur die zweite Gleichung möglich; man erhält also als Gleichung der Knotenlinie:

(234) $$x - y = 0,$$

die in Fig. 180b dargestellt ist. Man erkennt, daß in den Fällen 3 und 4 die Knotenlinien anders verlaufen, als man auf den ersten Blick erwarten sollte.

Sind diese vier einfachen Fälle nicht erfüllt, so wird doch natürlich die Knotenlinie noch immer bestimmt durch die Gleichung:

(235) $$A_{21} \sin 2\pi x \cdot \sin \pi y + A_{12} \sin \pi x \cdot \sin 2\pi y = 0,$$

und diese liefert im allgemeinen gekrümmte Kurven. Alle diese Knotenlinien haben das gemeinsam, daß sie durch den Mittelpunkt der Membran gehen, dessen Koordinaten ($x = y = \frac{1}{2}$) die Gleichung (235) offenbar befriedigen. Die letzteren Betrachtungen erhalten eine besondere Wichtigkeit durch folgende Überlegung: Die Stellen der Membran, an denen sich Knotenlinien befinden, d. h. an denen sie zu allen Zeiten in Ruhe ist,

können nun auch dauernd fixiert werden, ohne daß der Schwingungszustand gestört wird. Daher stellen z. B. die unter 3 und 4 besprochenen Schwingungszustände mögliche Schwingungsformen für die entsprechende dreieckig begrenzte Membran vor. Erwägt man, daß im allgemeinen Falle die Knotenlinien gekrümmt verlaufen, so erhellt, daß man mit verhältnismäßig geringen mathematischen Hilfsmitteln die verschiedensten Membranformen beherrschen kann.

Wenn man die allgemeinste Lösung (227) oder (229) einem Anfangszustande anpassen will, so ist es wiederum zweckmäßig, zu einer Integralgleichung überzugehen. Natürlich liegen die Verhältnisse hier komplizierter, da wir es hier mit einem zweidimensionalen Problem zu tun haben, und ein genaueres Eingehen darauf würde den Rahmen dieses Werkes überschreiten. Der Leser sei etwa auf Knesers Lehrbuch über die Theorie der Integralgleichungen verwiesen.

Die Untersuchung der erzwungenen Schwingungen, sowie die Einführung der Dämpfung bieten keine grundsätzlichen Schwierigkeiten mehr so daß ein Eingehen darauf sich erübrigt.

Fünfzehntes Kapitel.

Schwingungen von Stäben und Platten.

148. Longitudinalschwingungen von Stäben.

Wir gehen in diesem Kapitel über zu den Schwingungen von Stäben und Platten, die eine naturgemäße Erweiterung der Untersuchungen des vorhergehenden Kapitels darstellen. Denn streng genommen sind ja Saiten und Membranen, so wie sie in der Rechnung zugrunde gelegt wurden, nur Idealisierungen, während alle realen Saiten und Membranen im Grunde sehr dünne Stäbe und sehr dünne Platten sind.

Wir wollen hier zur Ableitung der Schwingungsgleichungen durchgehends eine andere Methode verwenden, nämlich das Hamiltonsche Prinzip [vgl. Nr. 54, pag. 215 ff.], das wir in der Form schreiben:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (L - \Phi)\, dt = 0. \tag{1}$$

Darin bedeuten L und Φ kinetische und potentielle Energie, als Funktionen der Koordinaten und der Geschwindigkeiten; t_0 und t_1 sind zwei Zeiten, für die die Variationen der Koordinaten verschwinden. Diese Festsetzung ist bekanntlich notwendig, damit die linke Seite der Gleichung (1) den Wert Null annimmt. Die Variation erstreckt sich, wie in Nr. 54 ausführlich auseinandergesetzt, nicht auf die Zeit t, die vielmehr unvariiert bleibt.

Unsere Aufgabe ist es also, für die uns hier interessierenden Probleme die Ausdrücke L und Φ wirklich herzustellen. Dies ist in allen in Betracht kommenden Fällen sehr leicht möglich mit Hilfe der Untersuchungen des XII. Kapitels. Dort haben wir in Nr. 119 den Fall einseitigen Druckes auf einen Zylinder, in Nr. 120 die Torsion eines Kreiszylinders, in Nr. 121 endlich die Biegung eines Stabes behandelt. Für alle diese Fälle sind dort die Komponenten der Dehnung x_x, y_y, z_z und der Gleitung y_z, z_x, x_y angegeben, aus denen unmittelbar der Wert des elastischen Potentials folgt. Durch Integration des letzteren über das Gesamtvolumen des betreffenden Körpers erhält man in jedem der drei Fälle sehr einfach die potentielle Energie.

Wir gehen zunächst über zur Untersuchung der Longitudinalschwingungen eines Stabes, bei denen ein periodisch wechselnder

Druck in Richtung der Stabachse ausgeübt wird. Dadurch gelangt der Stab zum Schwingen unter dem gemeinsamen Einfluß der elastischen und Trägheitskräfte.

Um die potentielle Energie zu berechnen, haben wir also die Formeln der Nr. 119 hier anzuwenden. Die dortigen Gleichungen (39) auf pag. 526 lauten folgendermaßen:

$$(2)\qquad \begin{cases} \xi = -\dfrac{K}{q}\dfrac{x}{E}, \\ \eta = +\dfrac{K}{q}\dfrac{y}{E}\sigma, \\ \zeta = +\dfrac{K}{q}\dfrac{z}{E}\sigma. \end{cases}$$

Daraus folgt sofort:

$$(3)\qquad \begin{cases} x_x = \quad -\dfrac{K}{qE}, \\ y_y = z_z = \dfrac{K}{q}\dfrac{\sigma}{E} \end{cases}$$

und daraus weiter:

$$(4)\qquad y_y = z_z = -\sigma x_x = -\sigma\frac{\partial \xi}{\partial x}.$$

Nach Gleichung (33) des XII. Kapitels auf pag. 524 hat man ferner:

$$(5)\qquad y_z = z_x = x_y = 0.$$

Nun lautet für isotrope Körper der Ausdruck des elastischen Potentials:

$$(6)\qquad f = \tfrac{1}{2}\lambda\{x_x + y_y + z_z\}^2 + \mu\{x_x^2 + y_y^2 + z_z^2 + \tfrac{1}{2}y_z^2 + \tfrac{1}{2}z_x^2 + \tfrac{1}{2}x_y^2\}.$$

Benutzt man darin die Werte (4) und (5), so erhält man:

$$f = \frac{1}{2}\lambda\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2\left(1 - 2\sigma\right)^2 + \mu\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2\left(1 + 2\sigma^2\right)$$

oder:

$$f = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2\left\{\lambda - 4\sigma\lambda + 4\sigma^2\lambda + 2\mu + 4\mu\sigma^2\right\}.$$

Nun bestehen aber zwischen λ, μ, E und σ folgende Relationen [Gleichung (45) des XI. Kapitels auf pag. 513]:

$$(7)\qquad \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} = E, \quad \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} = \sigma.$$

Die Ausrechnung der geschweiften Klammer ergibt dann für das elastische Potential den einfachen Ausdruck:

$$(8)\qquad f = \frac{1}{2}E\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2.$$

Wird ferner der Querschnitt des Stabes mit q, ein Element der Länge, die wir der Einfachheit halber gleich 1 nehmen wollen, mit dx

bezeichnet, so ist ein Volumelement des Stabes $d\tau = q\,dx$. Also erhält man für die potentielle Energie:

(9)
$$\Phi = \int f\,d\tau = \frac{1}{2} E q \int_0^1 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 dx.$$

Die kinetische Energie L erhalten wir folgendermaßen: Da ξ die Verrückung eines Punktes parallel der x-Achse darstellt, so ist $\frac{\partial \xi}{\partial t}$ die Geschwindigkeit; bedeutet ε die Dichte, so ist $\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2$ die kinetische Energie der Volumeinheit; also durch Integration über das ganze Stabvolumen:

(10)
$$L = \frac{\varepsilon}{2} q \int_0^1 \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 dx.$$

Allerdings ist der Ausdruck (10) für die kinetische Energie nicht ganz exakt, da ja nach Gleichung (2) auch Verrückungen η und ζ senkrecht zur Stabachse vorhanden sind. Dieselben spielen jedoch nur eine unwesentliche Rolle und können deshalb vernachlässigt werden.

Wir haben also nach (1) den Ausdruck zu bilden:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\varepsilon}{2} q \int_0^1 \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 dx - \frac{E}{2} q \int_0^1 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 dx\right] dt = 0,$$

oder unter Vertauschung der Integration nach der Zeit mit der Variation:

(11)
$$\frac{\varepsilon}{2} q \int_{t_0}^{t_1} dt \cdot \delta \int_0^1 \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 dx = \frac{E q}{2} \int_{t_0}^{t_1} dt \cdot \delta \int_0^1 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 dx.$$

Wir wollen zunächst die Variation rechts ausführen. Wir erhalten nacheinander:

$$\delta \int_0^1 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 dx = \int_0^1 \delta \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 dx = 2 \int_0^1 \frac{\partial \xi}{\partial x}\, \delta \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot dx = 2 \int_0^1 \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \delta \xi}{\partial x} dx.$$

Dieser letzte Ausdruck wird durch partielle Integration umgestaltet:

$$2 \int_0^1 \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \delta \xi}{\partial x} dx = 2 \overline{\frac{\partial \xi}{\partial x} \delta \xi}_{x=0}^{x=1} - 2 \int_0^1 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \delta \xi \cdot dx.$$

Für den Term $2 \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \delta \xi$ sind die Werte am Anfang und Ende des Stabes einzusetzen. Hier gibt es verschiedene Möglichkeiten: Der Stab kann, wie die Saite, an beiden Enden fest sein; dann ist $\delta \xi$ an beiden Enden gleich Null und der betreffende Ausdruck verschwindet. Oder beide

Enden sind frei; dann verschwindet, da ja keine Kräfte am Ende wirken, die Dehnung $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ an beiden Enden, und der in Rede stehende Ausdruck ist wieder gleich Null; oder endlich ein Ende ist fest, ein Ende frei. Dann verschwindet an dem einen Ende $\frac{\partial \xi}{\partial x}$, am anderen Ende $\delta\xi$ und der Ausdruck verschwindet abermals, also erhalten wir allgemein:

$$\delta \int_0^1 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 dx = -2 \int_0^1 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \delta \xi \cdot dx,$$

und für die rechte Seite der Gleichung (11) folgt:

$$\text{(12)} \qquad \frac{Eq}{2} \int_{t_0}^{t_1} dt \cdot \delta \int_0^1 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 dx = -Eq \int_{t_0}^{t_1} dt \int_0^1 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \delta \xi \cdot dx.$$

Ganz analog verfahren wir mit der linken Seite von (11). Wir erhalten dort nacheinander:

$$\frac{\varepsilon q}{2} \delta \int_{t_0}^{t_1} dt \int_0^1 \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 dx = \frac{\varepsilon q}{2} \int_{t_0}^{t_1} dt \cdot \delta \int_0^1 \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 dx = \varepsilon q \int_{t_0}^{t_1} dt \int_0^1 \frac{\partial \xi}{\partial t} \delta \frac{\partial \xi}{\partial t} dx$$

$$= \varepsilon q \int_{t_0}^{t_1} dt \int_0^1 \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial \delta \xi}{\partial t} dx.$$

In dem letzten Ausdruck integriert man partiell nach t und erhält:

$$\varepsilon q \int_0^1 dx \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial \delta \xi}{\partial t} dt = \varepsilon q \int_0^1 dx \left[\frac{\partial \xi}{\partial t} \delta \xi\right]_{t=t_0}^{t=t_1} - \varepsilon q \int_0^1 dx \cdot \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \cdot \delta \xi \cdot dt.$$

Der Ausdruck $\frac{\partial \xi}{\partial t} \cdot \delta\xi$ ist für die Zeitgrenzen t_0 und t_1 zu bilden. Dafür verschwinden aber die Variationen $\delta\xi$, gemäß den Bedingungen des **Hamiltonschen** Prinzips, und das betreffende Glied gelangt in Fortfall. Also erhält man schließlich für die linke Seite von (11):

$$\text{(13)} \qquad \frac{\varepsilon q}{2} \delta \int_{t_0}^{t_1} dt \int_0^1 \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 dx = -\varepsilon q \int_{t_0}^{t_1} dt \int_0^1 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \delta \xi \cdot dx.$$

Setzt man nach (11) die rechten Seiten von (12) und (13) einander gleich so resultiert die Gleichung:

$$\text{(14)} \qquad \int_{t_0}^{t_1} dt \int_0^1 dx \left\{\varepsilon q \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - Eq \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\right\} \delta \xi = 0.$$

Und da die Verrückungen $\delta\xi$ gänzlich beliebig sind, so kann diese Gleichung nur bestehen, wenn die Klammer verschwindet, d. h. wenn ist

(15) $$\varepsilon \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - E \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0.$$

Dieser Gleichung gehorchen also die Longitudinalschwingungen des Stabes, die sich, wie man sofort sieht, mit der Geschwindigkeit

$$c = \sqrt{\frac{E}{\varepsilon}}$$

in dem Stabe fortpflanzen. Man erkennt leicht durch Vergleich, daß Gleichung (15) vollkommen übereinstimmt mit der ersten Gleichung (14) des vorhergehenden Kapitels (pag. 581), die die Longitudinalschwingungen der Saite darstellt. Man muß nur dabei beachten, daß in der dortigen Gleichung (14) ε nicht die gewöhnliche Dichte, sondern die lineare Dichte (Masse pro Längeneinheit) bedeutet. Würden wir hier auch die Randbedingungen der Saite zugrunde legen, so hätten wir genau dieselben Folgerungen zu ziehen wie dort, und ein weiteres Eingehen auf diesen Fall erübrigt sich hier.

Dagegen bieten sich neue Resultate für den Fall, daß beide Enden des Stabes frei sind. Wir betrachten also neben (15) die Randbedingungen:

(15a) $$\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_{x=0} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_{x=1} = 0.$$

Setzt man hier zur Lösung an:

(16) $$\xi = \varphi(x) \cos nt \quad \text{oder} \quad \xi = \varphi(x) \sin nt,$$

wo n zu bestimmen ist, so folgt aus (15) und (15a):

(17) $$\begin{cases} \varphi''(x) + \lambda \varphi(x) = 0; \quad \lambda = \dfrac{\varepsilon n^2}{E}; \\ \varphi'(0) = \varphi'(1) = 0. \end{cases}$$

In diesen Gleichungen ist λ unbekannt, d. h. es sind diejenigen Werte λ_ν zu bestimmen, die mit den Randbedingungen verträglich sind. Ohne Rücksicht auf die letzteren würde die allgemeine Lösung der Gleichung (17) lauten:

(18) $$\varphi(x) = A_\lambda \cos \sqrt{\lambda}\, x + B_\lambda \sin \sqrt{\lambda}\, x.$$

Aus (18) folgt durch Differentiation:

$$\frac{d\varphi}{dx} = -A_\lambda \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}\, x + B_\lambda \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}\, x.$$

Da nun $\varphi'(0) = 0$ sein soll, so muß B_λ verschwinden mit Ausnahme derjenigen Werte B_λ, für die λ selbst etwa gleich Null ist. In beiden Fällen bleibt nur der einfache Ansatz übrig:

(19) $$\varphi(x) = A_\lambda \cos \sqrt{\lambda}\, x.$$

Denn wenn auch einige Werte B_λ, die zu verschwindenden λ-Werten gehören, von Null verschieden sind, so ist doch $B_\lambda \sin \sqrt{\lambda} x$ für diese Werte gleich Null. Nach der zweiten Randbedingung $\varphi'(1) = 0$ muß nach (19) sein:

$$A_\lambda \sqrt{\lambda} \cdot \sin \sqrt{\lambda} = 0,$$

was, wenn die banale Lösung $\varphi = 0$ ausgeschlossen wird, nur durch die Annahme

$$\sqrt{\lambda} = \nu \pi \quad (\nu = 0, 1, 2 \ldots \infty) \tag{20}$$

befriedigt werden kann. Wir haben also eine unendliche Reihe von Werten λ, die wir wieder λ_ν nennen wollen, die sogenannten Eigenwerte, die eine Lösung des Randproblems (17) ermöglichen. Die zugehörigen Eigenfunktionen $\varphi_\nu(x)$ sind, wenn C den Normierungsfaktor bedeutet, $\varphi_\nu(x) = C \cos \nu \pi x$. Aus dem Früheren ist leicht ersichtlich, daß $C = \sqrt{2}$ sein muß für die von Null verschiedenen Werte von ν; für $\nu = 0$ ist offenbar $C = 1$ zu nehmen. Also haben wir:

$$\begin{cases} \lambda_\nu = \nu^2 \pi^2 \quad (\nu = 0, 1, \ldots \infty), \\ \underset{\nu > 0}{\varphi_\nu(x)} = \sqrt{2} \cos \nu \pi x; \quad \varphi_0(x) = 1. \end{cases} \tag{21}$$

Durch die Werte λ_ν sind ferner die möglichen Schwingungszahlen n_ν bestimmt, da nach Gleichung (17) $\frac{s n^2}{E} = \lambda$. Also erhält man:

$$n_\nu = \sqrt{\frac{E}{s} \lambda_\nu} = \nu \pi \sqrt{\frac{E}{s}}. \tag{21a}$$

Als partikuläres Integral ergibt sich unter gleichmäßiger Berücksichtigung beider Ansätze (16):

$$\xi_\nu = \sqrt{2} \cos \nu \pi x \{A_\nu \cos n_\nu t + B_\nu \sin n_\nu t\}, \tag{22}$$

und folglich als allgemeines Integral:

$$\xi = \sqrt{2} \sum_\nu^{0,\infty} \cos \nu \pi x \{A_\nu \cos n_\nu t + B_\nu \sin n_\nu t\}; \tag{23}$$

in dem Gliede, für das $\nu = 0$ ist, ist nach (21) der Faktor $\sqrt{2}$ fortzudenken.

149. Greensche Funktion im weiteren Sinne; Bildung einer Integralgleichung.

Die Lösung (23) muß nun dem gegebenen Anfangszustande angepaßt werden; für $t = 0$ soll etwa sein:

$$\begin{cases} \xi = G(x), \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} = H(x). \end{cases} \tag{24}$$

Diese Entwicklungsprobleme werden wieder am einfachsten mit Hilfe der Theorie der Integralgleichungen behandelt. Doch bietet der vorliegende Fall eine Besonderheit, die uns nötigt, etwas näher darauf einzugehen.

Es ist nämlich wohl zu beachten, daß hier ein Unterschied des Randwertproblems gegen früher darin sich zeigt, daß nunmehr auch der Wert $\nu=0$ zugelassen werden muß. Denn die zugehörige Eigenfunktion $\varphi_0(x)$ hat den Wert 1. Früher, als wir die Eigenfunktionen $\sqrt{2}\sin\nu\pi x$ für die schwingende Saite hatten, war der Wert $\nu=0$ dadurch ausgeschlossen, daß wir die Lösung $\varphi=0$ ausschlossen. Denn für $\nu=0$ wäre ja damals die Eigenfunktion $\varphi_0=0$ geworden. Dieser Umstand, daß einer der Eigenwerte hier gleich Null ist, bringt die oben erwähnten Sondereigenschaften dieses Falles mit sich. Man erkennt dies unmittelbar z. B. aus der Betrachtung der Bilinearform für den Kern. Die Existenz derselben setzt offenbar voraus, daß alle $\lambda_\nu \neq 0$ sein müssen, da sie im anderen Falle unendlich groß werden würde.

Die Eigenart dieses Falles äußert sich nun darin, daß man hier keine Greensche Funktion in der bisher üblichen Weise erhalten kann. Bisher war die Greensche Funktion (der Kern) eine stetige Lösung der Differentialgleichung für den stationären Zustand, die die Randbedingungen des Problems befriedigt und an der Stelle $x=\alpha$ eine Unstetigkeit des ersten Differentialquotienten vom Betrage 1 aufweist. Das würde hier die Gleichungen ergeben:

$$(26)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\xi}{dx^2} = 0, \\ \dfrac{d\xi}{dx}\Big|^0 = \dfrac{d\xi}{dx}\Big|^1 = 0; \quad \dfrac{d\xi}{dx}\Big|_{\alpha+0}^{\alpha-0} = 1. \end{cases}$$

Wir wollen uns nun überzeugen, daß eine diesen Bedingungen genügende Funktion hier nicht existiert. Nach der ersten Gleichung (26) hat man für die beiden Teile des Intervalles von 0 bis α resp. α bis 1:

$$\xi_1 = A_1 x + B_1; \quad \xi_2 = A_2 x + B_2.$$

Aus der zweiten Gleichung (26) folgt dann:

$$\left(\frac{d\xi_1}{dx}\right)_{x=0} = A_1 = 0; \quad \left(\frac{d\xi_2}{dx}\right)_{x=1} = A_2 = 0;$$

also würde man erhalten:

$$\xi_1 = B_1; \quad \xi_2 = B_2,$$

und wegen der Stetigkeit im Punkte $x=\alpha$ würde noch $B_1 = B_2$ sein. Mit diesen Werten kann aber die dritte Gleichung (26) nicht erfüllt werden, d. h. es existiert keine Greensche Funktion im bisher üblichen Sinne des Wortes. Dies ist auch unmittelbar aus mechanischen Gründen ersichtlich. Denn eine am Punkte $x=\alpha$ angreifende Kraft von der Intensität 1, die uns früher die spezielle Verrückung, die wir als Kern

nahmen, erzeugte, würde hier, da beide Enden des Stabes frei sind, gar keinen Gleichgewichtszustand erzeugen können, sondern müßte den Stab als Ganzes fortbewegen. Dabei ist es natürlich ausgeschlossen, daß der erste Differentialquotient an der Stelle $x = \alpha$ eine Unstetigkeit aufweist, die für uns zur Berechnung der Funktion im Punkte α notwendig ist.

Hier muß deshalb ein anderes Verfahren eingeschlagen werden, und zwar sucht man nach Stekloff und Hilbert jetzt Lösungen der folgenden Gleichungen:

(27)
$$\begin{cases} \dfrac{d^2\xi}{dx^2} - 1 = 0, \\ \dfrac{d\xi}{dx}\Big|^0 = \dfrac{d\xi}{dx}\Big|^1 = 0, \\ \dfrac{d\xi}{dx}\Big|^{\alpha-0}_{\alpha+0} = 1. \end{cases}$$

Für die beiden Intervalle folgt nun aus der ersten Gleichung sofort:

(28a)
$$\begin{cases} \text{für } x < \alpha: & \xi_1 = \dfrac{x^2}{2} + A_1 x + B_1; \\ \text{für } x > \alpha: & \xi_2 = \dfrac{x^2}{2} + A_2 x + B_2. \end{cases}$$

Die zweiten Gleichungen (27) verlangen, daß sein muß:

$$\left(\frac{d\xi_1}{dx}\right)_0 = 0 = (x + A_1)_0 = A_1; \quad \left(\frac{d\xi_2}{dx}\right)_1 = 0 = (x + A_2)_1 = 1 + A_2,$$

d. h.

(28b)
$$\begin{cases} A_1 = 0, \\ A_2 = -1; \end{cases}$$

also folgt nach (28a):

(28c)
$$\begin{cases} \text{für } x < \alpha: & \xi_1 = \dfrac{x^2}{2} + B_1; \\ \text{für } x > \alpha: & \xi_2 = \dfrac{x^2}{2} - x + B_2. \end{cases}$$

Die dritte Gleichung (27) ist dadurch bereits erfüllt, wovon man sich durch Differentiation leicht überzeugt. Nun sollen weiter für $x = \alpha$ beide Lösungen ξ_1 und ξ_2 stetig ineinander übergehen. Das liefert nach (28c):

$$\frac{\alpha^2}{2} + B_1 = \frac{\alpha^2}{2} - \alpha + B_2,$$

oder:

(28d)
$$B_1 = B_2 - \alpha,$$

und damit wird aus (28c), wenn wir wieder die Bezeichnung $K(x, \alpha)$ einführen:

(28e)
$$\begin{cases} x < \alpha: & K(x\alpha) = \dfrac{x^2}{2} - \alpha + B_2, \\ x > \alpha: & K(x\alpha) = \dfrac{x^2}{2} - x + B_2. \end{cases}$$

Zur Bestimmung der Konstanten B_2 muß nun offenbar noch eine Bedingung zugefügt werden. Als solche kann man beispielsweise die folgende wählen:

(27a)
$$\int_0^1 K(x\,\alpha)\,d\,x = 0,$$

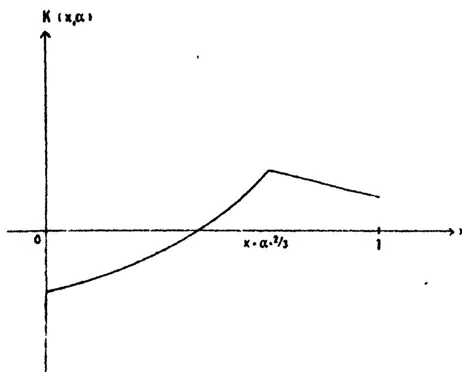


Fig. 181.

deren physikalische Bedeutung wir später erörtern werden. Das liefert für unseren Fall:

$$\int_0^\alpha \left(\frac{x^2}{2} - \alpha + B_2\right) d\,x + \int_\alpha^1 \left(\frac{x^2}{2} - x + B_2\right) d\,x = 0,$$

oder:

$$\frac{\alpha^3}{6} - \alpha^2 + B_2\,\alpha + \frac{1}{6}(1 - \alpha^3) - \frac{1}{2}(1 - \alpha^2) + B_2\,(1 - \alpha) = 0,$$

und daraus folgt sofort:

(28f)
$$B_2 = \frac{\alpha^2}{2} + \frac{1}{3}.$$

Endgültig ergibt sich somit aus (28e) für die Greensche Funktion im weiteren Sinne:

(29)
$$\begin{cases} x < \alpha: & K(x\,\alpha) = \dfrac{x^2 + \alpha^2}{2} - \alpha + \dfrac{1}{3}, \\ x > \alpha: & K(x\,\alpha) = \dfrac{x^2 + \alpha^2}{2} - x + \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Es ist nützlich, sich klar zu machen, durch welche eigentümliche Kräfteverteilung im Stabe die spezielle Deformation (29) zustande kommt.

Zu dem Zwecke wollen wir uns zunächst einmal den Kern $K(x, \alpha)$ graphisch darstellen. Man erhält dann etwa das Bild der Fig. 181, wobei $\alpha = {}^2/_3$ angenommen ist.

Ferner wollen wir nach (29) die Deformationskomponenten ausrechnen, die sich hier offenbar auf $x_x = \frac{\partial \xi}{\partial x}$ reduzieren. Man erhält, wenn wir für einen Augenblick $K(x\alpha)$ durch den seiner Bedeutung als Verrückung entsprechenden Buchstaben ξ bezeichnen:

$$\text{(29a)} \quad \begin{cases} \text{für } x < \alpha: \frac{\partial \xi}{\partial x} = x, \\ \text{für } x > \alpha: \frac{\partial \xi}{\partial x} = x - 1. \end{cases}$$

Das ergibt graphisch dargestellt das Bild der Figur 182. Das ist, wie selbstverständlich, eine Kurve, deren Ordinaten an der Stelle $x = \alpha$ die geforderte Unstetigkeit 1 haben. Man erkennt speziell, daß $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ für $x < \alpha$ positiv, für $x > \alpha$ negativ ist. Unterhalb α haben wir daher eine Dilatation des Stabes, oberhalb eine Kompression.

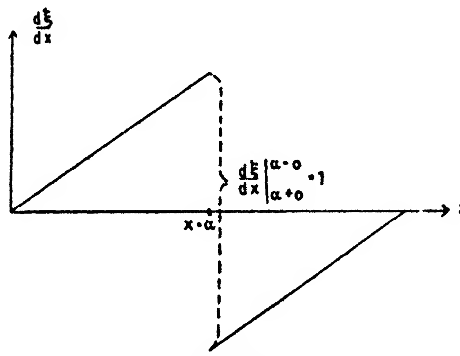


Fig. 182.

Es ist nun leicht möglich, aus den allgemeinen Prinzipien der Elastizitätstheorie die Massen- und Flächenkräfte zu berechnen, die eine derartige Deformation hervorrufen. Zunächst haben wir nach den Gleichungen (43) des XI. Kapitels auf pag. 512 für die Spannungskomponenten:

$$\text{(30)} \quad \begin{cases} X_x = -(\lambda + 2\mu)x_x; \quad Y_y = -\lambda x_x; \quad Z_z = -\lambda x_x; \\ Z_y = X_z = Y_x = 0. \end{cases}$$

Diese Spannungen nehmen nach (29a) folgende Werte im Stabe an:

(31)

Hauptspannungen	$x < \alpha$	$x > \alpha$
$X_x =$	$-(\lambda + 2\mu)x$	$-(\lambda + 2\mu)(x - 1)$
$Y_y =$	$-\lambda x$	$-\lambda(x - 1)$
$Z_z =$	$-\lambda x$	$-\lambda(x - 1)$

Dadurch sind nach den allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen (6) des X. Kapitels auf pag. 488 die Massenkräfte bestimmt:

$$(32)\quad \begin{cases} \varepsilon X = \dfrac{\partial X_x}{\partial x} = -(\lambda + 2\mu), \\ \varepsilon Y = \dfrac{\partial Y_y}{\partial y} = 0, \\ \varepsilon Z = \dfrac{\partial Z_z}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

Wir erhalten also zunächst das Resultat, daß parallel der Stabachse eine konstante Massenkraft wirkt, die auf die Volumeinheit bezogen den Wert $-(\lambda+2\mu)$ besitzt; daß dieselbe negativ ist, bedeutet offenbar, daß die Kraftrichtung der Richtung der positiven x-Achse entgegengesetzt ist. Die Gesamtkraft gewinnt man durch Integration über das Stabvolumen; da der Querschnitt q, die Länge 1 ist, so ergibt sich für die Gesamtkraft: $-q(\lambda + 2\mu)$. Eine derartige Kraft könnte z. B. mit Hilfe der Erdschwere realisiert werden, wie im Problem der Nr. 123.

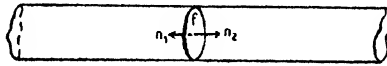


Fig. 183.

Dieser Massenkraft wird nun das Gleichgewicht gehalten durch gewisse Flächenkräfte. Nach den allgemeinen Spannungsgleichungen (10) des X. Kapitels auf pag. 488 ist für eine beliebige Richtung n in geeigneter Spezialisierung:

$$(33)\quad \begin{cases} X_n = X_x \cos(nx), \\ Y_n = Y_y \cos(ny), \\ Z_n = Z_z \cos(nz). \end{cases}$$

Wenden wir diese Gleichung auf irgendeine Fläche f im Innern des Stabes an, so hat man im allgemeinen folgendes (Fig. 183): Es sei n_1 die Normale nach der einen, n_2 die Normale nach der anderen Seite der Fläche. Wählen wir, wie es in der Figur angedeutet ist, speziell f senkrecht zur Stabachse, so nehmen die Kosinusse offenbar folgende Werte an:

$$\cos(n_1 x) = -1;\quad \cos(n_1 y) = \cos(n_1 z) = 0,$$
$$\cos(n_2 x) = +1;\quad \cos(n_2 y) = \cos(n_2 z) = 0.$$

Also folgt aus (33):

$$(34)\quad \begin{cases} X_{n_1} = -X_x, \\ X_{n_2} = +X_x, \end{cases}$$

und daraus:

$$X_{n_1} + X_{n_2} = 0,$$

wie es dem Reaktionsprinzip entspricht, da jeder der beiden durch die Fläche f geschiedenen Körperteile auf den anderen die nämliche, aber entgegengesetzt gerichtete Kraft ausübt. Das wird jedoch anders, wenn wir die Fläche f im Punkte $x = \alpha$ untersuchen. Denn für den Teil des Körpers links von f ist $X_x = -(\lambda + 2\mu)x$, für den Teil rechts von f ist $X_x = -(\lambda + 2\mu)(x-1)$ nach den Gleichungen (31). Also für $x = \alpha$ selbst erhält man nach (33):

$$(35) \quad \begin{cases} X_{n_1} = -(X_x)_{x=\alpha-0} = (\lambda + 2\mu)\alpha; \\ X_{n_2} = +(X_x)_{x=\alpha+0} = -(\lambda + 2\mu)(\alpha - 1). \end{cases}$$

Also gilt für die Stelle $x = \alpha$:

$$(36) \quad (X_{n_1} + X_{n_2})_{x=\alpha} = \lambda + 2\mu.$$

Die Gesamtflächenkraft, die dort wirkt, erhalten wir durch Multiplikation mit dem Querschnitt q zu $q(\lambda + 2\mu)$. Sie ist also gleich und entgegengesetzt der konstanten Massenkraft und hält mit ihr zusammen den Stab im elastischen Gleichgewicht. Damit ist die Kraftverteilung, die unseren Kern erzeugt, völlig aufgeklärt. Dieses Kräftesystem könnte etwa in der Weise realisiert werden, daß man den Stab am Punkte $x = \alpha$ aufhängt (etwa einen Nagel dort hindurchschlägt) und unter der Wirkung der Schwere frei herabhängen läßt. Dann erkennt man leicht, daß der obere Teil ($x > \alpha$) durch die Schwere komprimiert, der untere Teil dilatiert wird, wie es Fig. 182 fordert.

Aus den Gleichungen (29) erkennt man unmittelbar wieder die Symmetrie der Greenschen Funktion, d. h. die Gleichung $K(x\alpha) = K(\alpha x)$.

Zur Integralgleichung gelangt man nun leicht folgendermaßen: Die beiden Gleichungen:

$$\varphi_\nu''(x) + \lambda_\nu \varphi_\nu(x) = 0,$$
$$K''(x\alpha) - 1 = 0$$

erweitert man mit resp. $K(x\alpha)$ und $\varphi_\nu(x)$ und subtrahiert. Dann folgt:

$$\frac{d}{dx}\left[\varphi_\nu'(x)K(x\alpha) - K'(x\alpha)\varphi_\nu x)\right] + \lambda_\nu \varphi_\nu(x)K(x\alpha) - \varphi_\nu(x) = 0.$$

Integriert man von Null bis 1, wobei man, genau wie früher, für das erste Glied das Integrationsintervall in die beiden Teile 0 bis $\alpha - 0$ und $\alpha + 0$ bis 1 teilt, um der Unstetigkeit von $K'(x\alpha)$ im Punkte $x = \alpha$ gerecht zu werden, so erhält man:

$$(37) \quad \varphi_\nu(\alpha) = \lambda_\nu \int_0^1 K(x\alpha)\varphi_\nu(x)\,dx + \int_0^1 \varphi_\nu(x)\,dx.$$

Diese Gleichung läßt sich aber vereinfachen. Denn wenn wir für $\varphi_\nu(x)$ nach (21) den Wert $\sqrt{2}\cos\nu\pi x$ einsetzen, so können wir die Größe des letzten Integrals angeben. Wenn zunächst $\nu > 0$ ist, so hat man offenbar:

$$\int_0^1 \varphi_\nu(x)\,d\,x = \sqrt{2}\int_0^1 \cos\nu\pi x = 0\,.$$

Ist dagegen $\nu = 0$, so ist $\varphi_\nu(x) = 1$ und der Wert des Integrals ist ebenfalls 1. Man erhält daher aus (37) für alle Werte $\nu > 0$:

$$(39) \qquad \varphi_{\substack{\nu\\ \nu>0}}(\alpha) = \lambda_\nu \int_0^1 K(x\,\alpha)\,\varphi_\nu(x)\,d\,x$$

und für $\nu = 0$ die Identität:

$$\varphi_0(a) = 1\,.$$

Gleichung (39) ist aber nichts anderes wie die uns bereits bekannte Form der homogenen Integralgleichung. Aus dieser ergibt sich nun genau wie früher zunächst die Orthogonalitätseigenschaft für die Eigenfunktionen $\varphi_\nu(x)$, wobei vorläufig der Wert $\nu = 0$ noch ausgeschlossen werden muß. Da aber $\varphi_0(x)$ lediglich eine Konstante ist und nach (38) ein über das Grundgebiet erstrecktes Integral über die Eigenfunktion $\varphi_{\nu>0}(x)$ verschwindet, so erkennt man, daß auch der Wert $\nu = 0$ zugelassen werden kann. Es gilt also allgemein, da auch alle $\varphi_\nu(x)$ normiert sind:

$$(40) \qquad \left\{\begin{aligned} &\int_0^1 \varphi_\nu(x)\,\varphi_\mu(x)\,d\,x = 0\,,\\ &\int_0^1 \varphi_\nu^2(x)\,d\,x \qquad = 1\,, \end{aligned}\right\} \nu = 0, 1, 2 \ldots \infty\,.$$

Danach kann man erwarten, daß eine beliebige Funktion $F(x)$ auf die Fouriersche Weise nach den Eigenfunktionen $\sqrt{2}\cos\nu\pi x$ entwickelt werden kann, indem man ansetzt:

$$(41) \qquad F(x) = \sum_\nu^{0,\infty} A_\nu\,\varphi_\nu(x)\,,$$

wo mittels (40):

$$(42) \qquad A_\nu = \int_0^1 F(\alpha)\,\varphi_\nu(\alpha)\,d\,\alpha$$

ist. Speziell für $\nu = 0$ ergibt sich aus (42):

$$(42\,\text{a}) \qquad A_0 = \int_0^1 F(\alpha)\,\varphi_0(\alpha)\,d\,\alpha\,.$$

Da nun aber hier $\varphi_0(\alpha)$ eine Konstante ist, so kann man $\varphi_0(\alpha) = 1$ in (42a) vor das Integralzeichen ziehen und erhält etwas einfacher:

(42b) $$A_0 = \int_0^1 F(\alpha)\,d\alpha.$$

Hat also die zu entwickelnde Funktion $F(x)$ speziell die Eigenschaft, daß

(43) $$\int_0^1 F(\alpha)\,d\alpha = 0$$

ist, so verschwindet nach (42b) der erste Koeffizient A_0 und man hat dann genau den früheren Ansatz, der mit $\nu = 1$ beginnt:

(44) $$F(x) = \sum_\nu^{1,\infty} A_\nu\,\varphi_\nu(x).$$

Für den Kern (29) gilt nun nach (27a) in der Tat die Gleichung (43). Man darf also für den Kern die Entwicklung erwarten:

$$K(x\alpha) = \sum_\nu^{1,\infty} B_\nu\,\varphi_\nu(x),$$

wo nach (40) ist:

$$B_\nu = \int_0^1 K(x\alpha)\,\varphi_\nu(x)\,dx.$$

Zieht man nun in Betracht, daß gemäß der homogenen Integralgleichung (39) die rechte Seite der letzten Formel $= \frac{\varphi_\nu(\alpha)}{\lambda_\nu}$ ist, so gewinnt man auch in diesem Falle die bilineare Formel für den Kern:

(45) $$K(x\alpha) = \sum_\nu^{1,\infty} \frac{\varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu(\alpha)}{\lambda_\nu}.$$

Würde man bei der Bestimmung des Kerns für denselben nicht die Gleichung (27a) $\int_0^1 K(x\alpha)\,dx = 0$ gefordert haben, sondern etwa $\int_0^1 K(x\alpha)\,dx = g(\alpha)$, was lediglich auf eine andere Bestimmung der noch verfügbaren Konstanten des Kerns herauskäme, so würde der Koeffizient A_0 natürlich nicht verschwinden und die bilineare Formel (45) erhielte noch ein konstantes Glied. Wir können jetzt weiter den Begriff der quellenmäßig dargestellten Funktion, ganz analog wie im vorigen Kapitel, bilden:

(46) $$F(x) = \int_0^1 K(x\alpha)\,f(\alpha)\,d\alpha,$$

wo $f(\alpha)$ wieder als stückweise stetige Funktion angenommen werde. Man erhält dann durch Differentiation nach x genau wie früher [Gleichung (99) des XIV. Kapitels auf pag. 604]:

(47) $$F'(x) = \int_0^1 K'(x\alpha) f(\alpha)\, d\alpha.$$

Will man nochmals differentiieren, so muß man das Intervall, ebenfalls genau wie früher, teilen:

$$F'(x) = \int_0^{x-0} K'(x\alpha) f(x)\, d\alpha + \int_{x+0}^1 K(x\alpha) f(\alpha)\, d\alpha.$$

Dann ergibt die Differentiation:

$$F''(x) = \int_0^{x-0} K''(x\alpha) f(\alpha)\, d\alpha + \int_{x+0}^1 K''(x\alpha) f(\alpha)\, d\alpha$$
$$+ K'(x, x-0) f(x) - K'(x, x+0) f(x),$$

oder:

$$F''(x) = \int_0^1 K''(x\alpha) f(\alpha)\, d\alpha - f(x),$$

und das ergibt mit Rücksicht auf die Differentialgleichung des Kerns nach (27):

(48) $$F''(x) = \int_0^1 f(\alpha)\, d\alpha - f(x),$$

während wir früher auf der rechten Seite einfach $-f(x)$ erhalten haben. Will man daher die frühere Gleichung wieder erhalten, so muß man der stückweise stetigen Funktion $f(x)$ noch die Forderung auferlegen:

$$\int_0^1 f(\alpha)\, d\alpha = 0.$$

Dann erhält man wie früher:

(48a) $$F''(x) = -f(x).$$

Will man diese Beschränkung von $f(x)$ vermeiden, so ist auf jeden Fall nach (48) $\int_0^1 f(x)\, dx = \text{Const}$, und man erkennt aus (46), (47), (48) oder (48a), daß auch hier die quellenmäßig dargestellte Funktion nebst ihrer ersten Ableitung stetig ist, die Randbedingungen des Problems erfüllt und eine stückweise stetige zweite Ableitung besitzt. Umgekehrt läßt sich hier genau

wie dort zeigen, daß auch jede Funktion mit diesen Eigenschaften quellenmäßig dargestellt werden kann.

Jetzt kann man, genau wie früher, weiter schließen, daß jede quellenmäßig dargestellte Funktion auf die Fouriersche Weise nach Eigenfunktionen entwickelt werden kann und zum Beweise dieses Entwickelungsproblems ist wieder nur das eine zu zeigen, daß die bilineare Formel für den Kern gleichmäßig oder gleichmäßig und absolut konvergiert. Ist speziell die quellenmäßig dargestellte Funktion $F(x)$ derartig, daß $\int\limits_0^1 F(x)\,dx = 0$ ist, so hat man:

$$F(x) = \sum_{\nu}^{1,\infty} A_\nu \varphi_\nu(x); \quad A_\nu = \int\limits_0^1 F(\alpha)\varphi_\nu(\alpha)\,d\alpha. \tag{50}$$

Ist diese letztere Bedingung nicht erfüllt, so tritt noch ein konstantes Glied entsprechend der Eigenfunktion $\varphi_0(x)$ hinzu.

Die gleichmäßige und absolute Konvergenz der Bilinearform (45) ist nun leicht zu beweisen. Wir haben in unserem Falle zu zeigen, daß:

$$\left\{\begin{aligned} &\text{für } x < \alpha: \quad \frac{x^2+\alpha^2}{2} - \alpha + \frac{1}{3} = \frac{2}{\pi^2}\sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\cos\nu\pi x\cos\nu\pi\alpha}{\nu^2}, \\ &\text{für } x > \alpha: \quad \frac{x^2+\alpha^2}{2} - x + \frac{1}{3} = \frac{2}{\pi^2}\sum \frac{\cos\nu\pi x\cos\nu\pi\alpha}{\nu^2}. \end{aligned}\right. \tag{51}$$

Setzen wir zunächst voraus, daß $x < \alpha$ sei, dann wählen wir zwei Werte x_0 und x_1 im Intervalle von 0 bis π und wenden darauf die Gleichung (133) des vorigen Kapitels (pag. 622) an:

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\cos\nu x_0}{\nu^2} = \frac{\pi^2}{6} + \frac{x_0^2}{4} - \frac{\pi x_0}{2} \quad \text{und} \\ &\sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\cos\nu x_1}{\nu^2} = \frac{\pi^2}{6} + \frac{x_1^2}{4} - \frac{\pi x_1}{2}, \end{aligned}\right. \tag{52}$$

deren Addition liefert:

$$2\sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\cos\frac{\nu}{2}\left(x_0+x_1\right)\cdot\cos\frac{\nu}{2}\left(x_0-x_1\right)}{\nu^2} = \frac{\pi^2}{3} + \frac{x_0^2+x_1^2}{4} - \frac{\pi}{2}\left(x_0+x_1\right). \tag{53}$$

Setzen wir nun, genau wie früher [Gleichung (135) des XIV. Kapitels auf pag. 622]:

$$\left.\begin{aligned} x_0 + x_1 &= 2\pi\alpha \\ -x_0 + x_1 &= 2\pi x \end{aligned}\right\} x_1 > x_0, \tag{54}$$

so folgt:

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= \pi x + \pi\alpha, \\ x_0 &= -\pi x + \pi\alpha. \end{aligned}\right. \tag{54a}$$

Da nach Voraussetzung x_0 und x_1 kleiner als π sein sollen, so stimmt dieser Ansatz damit überein, daß α und x positive echte Brüche sein müssen, da das Grundgebiet von 0 bis 1 reicht; ferner genügt der Ansatz der Bedingung, daß $x < \alpha$ sein soll. Setzt man diese Werte ein, so ergibt sich:

$$2\sum_{\nu}^{1,\infty}\frac{\cos\nu\pi\alpha\cdot\cos\nu\pi x}{\nu^2} = \frac{\pi^2}{3} + \frac{\pi^2}{4}\left\{(x+\alpha)^2 + (\alpha - x)^2\right\} - \frac{\pi}{2}\cdot 2\pi\alpha,$$

oder endlich:

$$\frac{2}{\pi^2}\sum_{\nu}^{1,\infty}\frac{\cos\nu\pi x\cdot\cos\nu\pi\alpha}{\nu^2} = \frac{x^2+\alpha^2}{2} - \alpha + \frac{1}{3}.$$

Das ist aber in der Tat, wie ein Blick auf die erste Gleichung (51) lehrt, die zu beweisende Bilinearform für $x < \alpha$, die auch gleichmäßig und absolut konvergiert, was man auf dieselbe Weise wie in Nummer 142 erkennt. Für $x > \alpha$ erhält man ebenso die zweite Gleichung (51), wenn man nur in (54) die Bedeutung von x_0 und x_1 vertauscht. Da dies genau so ist wie früher, braucht darauf nicht näher eingegangen zu werden.

Mit den obigen Ausführungen ist gleichzeitig gezeigt, daß jede quellenmäßig dargestellte Funktion in eine gleichmäßig und absolut konvergente Reihe nach den hier auftretenden Eigenfunktionen entwickelt werden kann, und danach kann die Möglichkeit der beiden Entwickelungsprobleme (25) beurteilt werden. Sind die darzustellenden Funktionen $G(x)$ und $H(x)$ quellenmäßig dargestellt, so ist ihre Entwickelung nach Eigenfunktionen bewiesen. Dies dürfte für zahlreiche physikalische Anwendungen bereits genügen. Man kann diese Resultate, wie Untersuchungen von Kneser gezeigt haben, jedoch noch ausdehnen auf den Fall, daß $G(x)$ und $H(x)$ selbst nur stückweise stetig sind und nur mehr stückweise stetige erste Ableitungen besitzen. Endlich kann auch noch davon abgesehen werden, daß die beiden darzustellenden Funktionen die Randbedingungen der Eigenfunktionen erfüllen müßten. Ein genaueres Eingehen auf diese weitergehenden Resultate würde jedoch hier zu weit führen.

150. Mögliche Schwingungsformen des an beiden Enden freien Stabes.

In Gleichung (23) wollen wir der Einfachheit halber alle Koeffizienten $B_\nu = 0$ nehmen, was keine Beschränkung der Allgemeinheit ist. Dann haben wir in ausführlicher Schreibweise:

$$(55)\quad \left\{ \begin{aligned} \xi = A_0 + A_1\sqrt{2}\cos\pi x\cos n_1 t + A_2\sqrt{2}\cos 2\pi x\cos n_2 t \\ + A_3\sqrt{2}\cos 3\pi x\cos n_3 t + \dots. \end{aligned}\right.$$

Wir gehen zur Untersuchung der den einzelnen Gliedern entsprechenden Schwingungsformen über. Zunächst haben wir:

$$(56)\qquad \xi_0 = A_0.$$

Dieses Glied tritt allerdings, wie bereits früher hervorgehoben, nur dann auf, wenn die Funktion $G(x)$ in Gleichung (25) nicht der Bedingung unterworfen wird $\int_0^1 G(x)\,dx = 0$. (56) stellt eine gemeinsame Translation des ganzen Stabes längs der x-Achse, mithin keine eigentlich elastische Deformation dar. Durch die Forderung $\int_0^1 G(x)\,dx = 0$ wird auch $A_0 = 0$, d. h. der Körper wird als Ganzes nicht verschoben. Das ist auch die physikalische Bedeutung der entsprechenden

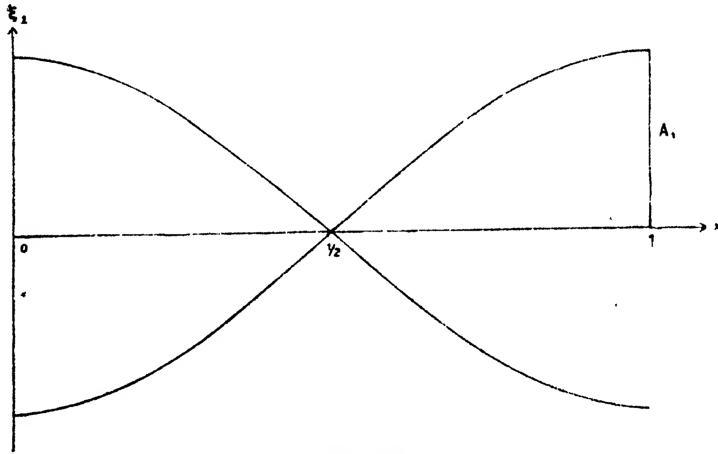


Fig. 184.

Bedingung (27a), die wir dem Kern $K(x\alpha)$ auferlegt haben; die spezielle Verrückung, die den Kern darstellt, ist demnach so beschaffen, daß keine gemeinschaftliche Translation des Stabes auftritt. Das zweite Glied in (55) ergibt, wenn wir vom Faktor $\sqrt{2}$, der irrelevant ist, absehen:

(57) $$\xi_1 = A_1 \cos \pi x \cos n_1 t.$$

Unabhängig von der Zeit ist nach dieser Gleichung nur ein Punkt des Stabes in Ruhe, nämlich $x = 1/2$. Umgekehrt wie bei der Saite treten dagegen an den Enden $x = 0$ und $x = 1$ maximale Bewegungen auf; so daß man das in Fig. 184 gegebene Bild der Grenzlagen des Stabes bekommt.

An den Enden liegt also je ein Bauch der stehenden Welle.

Ganz ebenso stellt das dritte Glied von (55)

(58) $$\xi_2 = A_2 \cos 2\pi x \cdot \cos n_2 t$$

eine Schwingung mit zwei Knoten und drei Bäuchen dar. Die ersteren liegen an den Stellen $x = 1/4$ und $x = 3/4$, da für diese Werte $\cos 2\pi x$ verschwindet; die letzteren an den Stellen $x = 0$, $x = 1/2$, $x = 1$, da für diese Werte $\cos 2\pi x$, absolut genommen, seinen maximalen Wert hat. Also erhalten wir folgendes Bild der Grenzlagen für die erste Oberschwingung (Fig. 185):

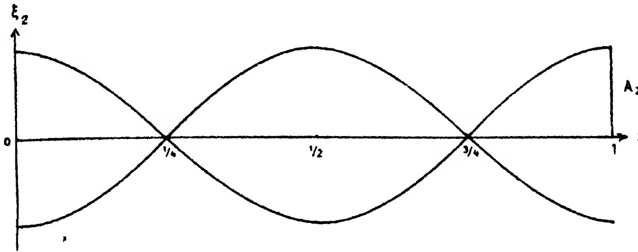


Fig. 185.

Endlich betrachten wir noch das vierte Glied:

(59) $$\xi_3 = A_3 \cos 3\pi x \cdot \cos n_3 t,$$

das eine Schwingung mit drei Knoten ($x = 1/6, 1/2, 5/6$) und vier Bäuchen

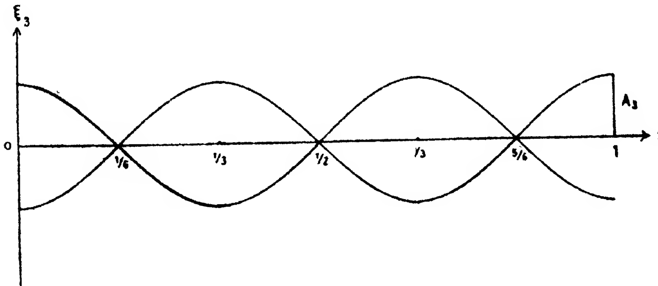


Fig. 186.

($x = 0, 1/3, 2/3, 1$) darstellt (Fig. 186); und so fort. Allgemein stellt das $(\nu + 1)^{\text{te}}$ Glied

(60) $$\xi_\nu = A_\nu \cos \nu\pi x \cdot \cos n_\nu t$$

eine Schwingung mit ν Knoten $\left(x = \frac{1}{2\nu}, \frac{3}{2\nu}, \dots \frac{2\nu - 1}{2\nu}\right)$ und $(\nu + 1)$ Bäuchen $\left(x = 0, \frac{1}{\nu}, \frac{2}{\nu}, \frac{3}{\nu}, \dots \frac{\nu - 1}{\nu}, 1\right)$ dar.

Alle diese Vorgänge lagern sich im allgemeinen Falle mit verschiedenen Amplituden übereinander, so daß die resultierende Schwingung

des Stabes im allgemeinen einen äußerst komplizierten Vorgang darstellt.

Für die Schwingungszahlen $n_1, n_2, n_3 \ldots n_\nu$ der möglichen Töne ergeben sich nach (21a) folgende Werte:

$$(61)\quad \begin{cases} n_1 = \sqrt{\frac{E}{\varepsilon}}\,\pi, \\ n_2 = \sqrt{\frac{E}{\varepsilon}}\cdot 2\pi, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ n_\nu = \sqrt{\frac{E}{\varepsilon}}\cdot \nu\pi. \end{cases}$$

Man erkennt, daß die Zahlen $n_1 . n_2, \ldots n_\nu$ sich wie die **aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen verhalten**: Die Eigentöne des longitudinal schwingenden Stabes sind also **harmonisch** zueinander. Man erkennt ferner, daß die Schwingungszahlen, wie auch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $c = \sqrt{\frac{E}{\varepsilon}}$ der Wellen **unabhängig vom Querschnitt** des Stabes sind. Dies ist experimentell von Wichtigkeit. Denn da massive Stäbe durch Reiben schwer zum Tönen zu bringen sind, so gestattet der oben ausgesprochene Satz, dieselben hohl zu machen.

Endlich ist noch folgende Bemerkung von großer Wichtigkeit. An den Knotenstellen, die ja dauernd in Ruhe sind, kann der Stab festgeklemmt werden, ohne daß die betreffende Schwingung dadurch gestört wird. Wir können also etwa den Stab gemäß Fig. 184 in der Mitte festklemmen, er führt dann ungestört die dort verzeichnete Schwingung aus; ebenso kann sich auch die Schwingung Fig. 186 ausbilden, da diese ebenfalls in der Mitte einen Knoten besitzt, während anderseits die in Fig. 185 dargestellte Schwingung unterdrückt wird, die in der Mitte einen Bauch erzeugen würde. Dies gilt offenbar ganz allgemein. Betrachten wir in Fig. 184 nun überhaupt nur noch die eine Stabhälfte, indem wir die andere etwa abgeschnitten denken, so bleibt ein Stab von der Länge $^1/_2$ übrig, der an dem einen Ende fest, an dem anderen frei ist. Nach dem oben ausgesprochenen Prinzip kann **derselbe alle Schwingungen des an beiden Enden freien Stabes von doppelter Länge ausführen, die in der Mitte einen Knoten ergeben würden, d. h. denen die oben mit $n_1, n_3, n_5 \ldots$ bezeichneten Schwingungszahlen zukommen.** So erkennt man, daß die Schwingungszahlen der Eigentöne eines solchen Stabes sich verhalten, **wie die aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen.** Die Figuren 187a bis c bringen einige dieser Schwingungsformen zur Darstellung. Eine gesonderte Behandlung des an einem Ende festen Stabes ist daher nicht erforderlich.

Endlich ist noch folgender Punkt von Interesse: Die hier untersuchten Longitudinalschwingungen haben, wie bereits mehrfach erwähnt, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit

$$c = \sqrt{\frac{E}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{(\lambda + \mu)\varepsilon}}. \tag{62}$$

Nun haben wir bereits im XIII. Kapitel in Nr. 129 longitudinale Wellen in einem unendlich ausgedehnten elastischen Medium be-

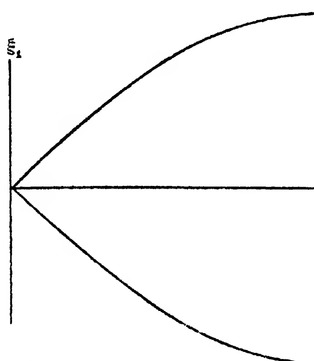


Fig. 187a. Grundschwingung n_1.

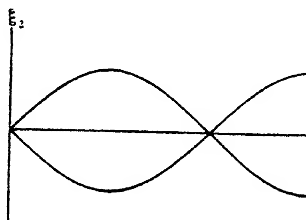


Fig. 187b. Erster Oberton n_3.

handelt, deren Geschwindigkeit sich nach Gleichung (26) des XIII. Kapitels auf pag. 560 zu

$$c = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\varepsilon}} \tag{63}$$

ergab. Woher kommt die auf den ersten Blick auffällige Differenz dieser beiden Geschwindigkeiten? Um dies einzusehen, beachte man, daß bei

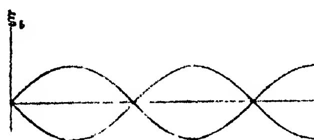


Fig. 187c. Zweiter Oberton n_5.

einer Dilatation des seitlich begrenzten Stabes, wie wir ihn soeben behandelt haben, stets gleichzeitig eine Querkontraktion eintritt, die wir auch bei Bildung des Ausdruckes für die potentielle Energie berücksichtigt haben, wie die Gleichungen (3) bis (8) zeigen. Diese Querkontraktion kann in einem allseitig ausgedehnten Medium

nicht eintreten, weil dasselbe sonst zerreißen würde. Die dort behandelten Dilatationswellen sind mithin andere wie die beim begrenzten Stabe auftretenden. An einem Stabe könnten derartige querkontraktionsfreie Dehnungswellen nur dann auftreten, wenn auf die Seitenflächen desselben geeignete Kräfte wirkten, die in jedem Moment die Querkontraktionen kompensierten. Diese Kräfte werden in einem unendlich ausgedehnten Medium von den umgebenden Teilen des Körpers ausgeübt. Übrigens sollte man erwarten, da die in Wirklichkeit vorkommenden elastischen Medien doch nur eine begrenzte Festigkeit haben, daß beim Hindurchsenden sehr intensiver Longitudinalwellen durch ein unendlich ausgedehntes Medium Risse in Richtung der Fortpflanzungsrichtung auftreten könnten. Es ist mir jedoch kein Experiment dieser Art bekannt.

151. Torsionsschwingungen von Stäben.

Ein Stab kann auch in der Weise zum Schwingen gebracht werden, daß man ein Drehmoment in einer zur Stabachse senkrechten Ebene auf ihn wirken läßt, dann tritt eine Torsion auf, die wir in Nr. 120 im XII. Kapitel auf pag. 528 ff. ausgiebig besprochen haben. Hebt man das Drehmoment plötzlich auf, so geht der Stab nicht in seine Ruhelage zurück, sondern wegen seiner Trägheit darüber hinaus; m. a. W.: er vollführt Torsionsschwingungen, zu deren Untersuchung wir uns nun wenden.

Wir legen wiederum die Anordnung der Figur 151 zugrunde. Demgemäß erhalten wir für die Deformationen die Gleichungen (47) des XII. Kapitels (pag. 529):

$$(64)\qquad \begin{cases} \xi = -\dfrac{y z \psi_0}{l}, \\ \eta = +\dfrac{x z \psi_0}{l}, \\ \zeta = \quad 0. \end{cases}$$

Dabei ist ψ_0 die Verdrehung des obersten Querschnittes, l die Länge des Stabes. Die Drehung ψ, die ein im Abstande z von der xy-Ebene befindlicher Querschnitt erfährt, ist nach Gleichung (44) ibidem:

$$(65)\qquad \psi = \frac{z \psi_0}{l}.$$

Damit können die Deformationsgleichungen (64) geschrieben werden:

$$(66)\qquad \begin{cases} \xi = -y \cdot \psi, \\ \eta = +x \cdot \psi, \\ \zeta = 0. \end{cases}$$

Zu beachten ist, daß nach (65) ψ Funktion von z ist. Aus den Gleichungen (66) können nun die Deformationskomponenten sofort gefunden

werden. Man sieht, daß $x_x = y_y = z_z = 0$ sind. Es bleiben also nur die „Gleitungen" übrig. Man erhält dafür folgende Werte:

$$
(67)\quad \begin{cases}
x_y = \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \\
y_z = \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} = - x \frac{\partial \psi}{\partial z}, \\
z_x = \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z} = - y \frac{\partial \psi}{\partial z}.
\end{cases}
$$

Setzt man diese Werte in den Ausdruck des elastischen Potentials f ein, so erhält man:

$$f = \frac{1}{2} \mu \left\{ x^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 + y^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 (x^2 + y^2). \right.$$

Führt man ebene Polarkoordinaten (r, φ) ein, so ist

$$x = r \cos \varphi,$$

$$y = r \sin \varphi;$$

also wird das elastische Potential:

$$(68)\quad f = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 r^2.$$

Der **Radius** des Stabquerschnittes werde durch R bezeichnet, und die Länge des Stabes werde der Einfachheit halber wieder gleich 1 angenommen. Dann ist ein Volumelement desselben $d\tau = r\, dr\, d\varphi\, dz$, und man erhält für die potentielle Energie:

$$\Phi = \frac{1}{2} \mu \int_0^1 \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 dz \int_0^R r^3\, dr \int_0^{2\pi} d\varphi,$$

und die Ausrechnung der Integrale liefert den endgültigen Wert:

$$(69)\quad \Phi = \frac{\pi \mu R^4}{4} \int_0^1 \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 dz.$$

Ebenso leicht ist die kinetische Energie zu berechnen. Die Geschwindigkeit eines im Abstande r von der Stabachse befindlichen Volumelementes $d\tau$ ist $r \frac{\partial \psi}{\partial t}$, wo $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ die Winkelgeschwindigkeit ist. Ist ε die Dichte, so ist die kinetische Energie dieses Volumenelementes:

$$\frac{\varepsilon}{2} r^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 d\tau = \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 r^3\, dr\, d\varphi\, dz,$$

und die gesamte kinetische Energie ergibt sich durch Integration über das Stabvolumen zu:

$$L = \frac{\varepsilon}{2}\int_0^1 \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2 dz \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\varphi .$$

Die Ausrechnung liefert:

(70) $$L = \frac{\varepsilon \pi R^4}{4}\int_0^1 \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2 dz .$$

Die Kenntnis von L und Φ gestattet nun wieder ohne weiteres die Anwendung des Hamiltonschen Prinzips; wir haben also anzusetzen:

(71) $$\delta \int_{t_0}^{t_1} \varepsilon\, dt \int_0^1 \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2 dz = \delta \int_{t_0}^{t_1} \mu\, dt \int_0^1 \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2 dz .$$

Die Ausrechnung erfolgt hier genau so wie bei den Longitudinalschwingungen [vgl. die Formeln (11) bis (14)], und man erhält schließlich als Gleichung der Torsionsschwingungen:

(72) $$\varepsilon \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} ,$$

zu der nun noch die betreffenden Grenzbedingungen, die das Problem vollständig charakterisieren, hinzuzutreten haben.

Man erkennt aus (72) sofort, daß sich im Stabe Torsionswellen (oder wie wir auch sagen können, da dieselben ohne Dilatation, aber mit Rotation der einzelnen Stabquerschnitte vor sich gehen, Rotationswellen) mit der Geschwindigkeit

(73) $$c = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

fortpflanzen. Es sind überdies, wie man leicht erkennt, Transversalwellen. Genau dieselben Wellen können auch bei unendlich ausgedehnten Medien auftreten, wie im XII. Kapitel ausführlich gezeigt wurde. Die Verhältnisse liegen also hier einfacher wie bei den longitudinalen Dehnungsschwingungen. Dies liegt offenbar daran, daß bei einem kreisförmigen Zylinder durch Torsionsschwingungen die Mantelform nicht geändert wird, was bei Longitudinalschwingungen wegen der Querkontraktion doch der Fall ist.

Als Grenzbedingungen kommen wieder in Frage: $\psi(0) = \psi(1) = 0$ (beide Enden fest) oder: $\frac{d\psi(0)}{dz} = \frac{d\psi(1)}{dz} = 0$ (beide Enden frei) oder endlich: $\psi(0) = \frac{d\psi(1)}{dz} = 0$ (ein Ende fest, das andere frei). Daraus erkennt man, daß man je nach Wahl der Grenzbedingungen genau dieselben Probleme und Schlüsse vor sich hat, wie entweder bei der Saite oder bei den longitudinalen Schwingungen des Stabes. Ein detaillierteres Eingehen auf diese Schwin-

gungen erübrigt sich also. Es sei nur noch hervorgehoben, daß auch hier der Querschnitt keinen Einfluß auf die Vorgänge hat.

Sind beide Enden frei, so sind analog wie beim longitudinal schwingenden Stabe Schwingungen mit folgenden Schwingungszahlen möglich [vgl. Gleichung (61)]:

$$(74)\qquad \begin{cases} n_1 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,\pi, \\ n_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,2\pi, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ n_\nu = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,\nu\pi. \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{cases}$$

Diese Werte gehen aus den für die Longitudinalschwingungen des Stabes geltenden Gleichungen (61) hervor, wenn man, wie es Gleichung (72) fordert, dort an Stelle des Youngschen Moduls E den Torsionsmodul μ setzt. Als Verhältnis zweier entsprechender Schwingungszahlen erhalten wir also aus (61) und (74):

$$\frac{n_\nu^l}{n_\nu^t} = \sqrt{\frac{E}{\mu}},$$

wobei die Indizes „l" und „t" die Art der Schwingungen bezeichnen sollen. Oder, wenn man die Gleichung (46) des XI. Kapitels auf pag. 513 berücksichtigt, indem man den Querkontraktionskoeffizienten σ einführt:

$$(75)\qquad \frac{n_\nu^l}{n_\nu^t} = \sqrt{2(1+\sigma)}.$$

Da man Schwingungszahlen experimentell sehr genau bestimmen kann, so bietet sich hier eine genaue Methode dar, das früher für die verschiedenen Theorien der Elastizität so wichtige Verhältnis σ zu bestimmen. Nach der alten Poisson-Navierschen Theorie sollte ja $\sigma = {}^1/_4$ sein, während Wertheim experimentell $\sigma = {}^1/_3$ für alle Körper gefunden zu haben glaubte. Nach neueren Versuchen[1]) ist es anderseits wahrscheinlich, daß sehr viele Körper in der Nähe ihres Schmelzpunktes einen Wert σ annehmen, der vom Maximalwert ${}^1/_2$ nicht weit entfernt ist. Für einen Körper endlich, der gar keine Querkontraktion aufweist — eine zwar niemals realisierte, aber bei gewissen Problemen der Elastizität von einigen Autoren zur Vereinfachung gemachte Annahme — wäre $\sigma = 0$. Für diese vier Werte von σ nimmt das Verhältnis $\frac{n_\nu^l}{n_\nu^t}$ folgende Werte an:

[1]) C. Schaefer, Ann. d. Phys. 5, pag. 226; 1901; 9, pag. 1124; 1902.

	$\sigma = 0$	$\sigma = \frac{1}{4}$	$\sigma = \frac{1}{3}$	$\sigma = \frac{1}{2}$
$\frac{n_\nu^l}{n_\nu^t} =$	1,41	1,58	1,63	1,73

Die möglichen Werte, die das Schwingungsverhältnis annehmen kann, liegen also zwischen 1,41 und 1,73. Das musikalische Intervall ist in ersterem Falle kleiner, in letzterem Falle größer als das einer Quinte zum Grundton, das bekanntlich den Wert 1,50 besitzt. Auch derartige Versuche haben zur Evidenz bewiesen, daß σ weder $^1/_4$ noch $^1/_3$ für alle Körper ist, sondern von Körper zu Körper variiert.

152. Biegungsschwingungen von Stäben rechteckigen Querschnittes.

Ein Stab kann schließlich noch in der folgenden Weise zu Schwingungen angeregt werden: er sei etwa an einem Ende befestigt und es werde am anderen ein Drehmoment auf ihn ausgeübt von der Beschaffenheit, daß wir das Problem der Nr. 121 auf pag. 532ff. des XII. Kapitels vor uns haben. Hebt man plötzlich die Wirkung des Drehmomentes auf, so schwingt der Stab in seine Ruhelage zurück und wegen der Trägheit über dieselbe hinaus. Er vollführt „Biegungsschwingungen". Diese Vorgänge wollen wir nun genauer untersuchen.

Es handelt sich wieder um Berechnung der potentiellen und kinetischen Energie.

Die erstere finden wir durch eine kleine Änderung der Betrachtung der Nr. 121. Nach den Gleichungen (59), (60) und (62a) des XII. Kapitels auf pag. 534 ist dort:

$$(76)\qquad \begin{cases} x_x = -\dfrac{\varphi}{l}\, z, \\ y_y = z_z = \dfrac{\sigma\varphi}{l}\, z; \quad y_z = z_x = x_y = 0. \end{cases}$$

Dabei bedeutet l die Länge des Stabes im undeformierten Zustande, oder was dasselbe ist, die Länge der auch im deformierten Zustande ungeändert bleibenden „neutralen" Faser; φ ist die Neigung der Stabenden gegeneinander. Wir haben also die Verhältnisse, die in Fig. 188 dargestellt sind. Die Schwingungen erfolgen der Zeichnung gemäß parallel der xz-Ebene.

Bezeichnet man den Krümmungsradius der neutralen Faser durch R, so ist offenbar $l = R\varphi$, und damit gehen die Formeln (76) in die folgenden über:

$$(77)\qquad x_x = -\frac{z}{R}, \quad y_y = z_z = \frac{\sigma z}{R}.$$

Diese wollen wir nun, da wir jetzt nicht mehr voraussetzen dürfen, daß bei unserem Problem der Krümmungsradius R räumlich konstant sei, auf ein unendlich kleines Stabelement von der Länge dl anwenden;

die Neigung der Enden des Elementes werde entsprechend $d\varphi$ benannt; dann ist offenbar:

(78) $$\frac{d\varphi}{dl} = \frac{1}{R}$$

die Krümmung des betreffenden Elementes. Für das elastische Potential ergibt sich aus (77) und (78):

$$f = \tfrac{1}{2}\lambda\{x_x + y_y + z_z\}^2 + \mu\{x_x^2 + y_y^2 + z_z^2\}$$
$$= \tfrac{1}{2}x_x^2\{(1-2\sigma)^2\lambda + \mu(1+2\sigma^2)\}.$$

Die geschweifte Klammer hat nach dem Früheren den Wert E. Also ist:

(79) $$f = \frac{1}{2}E\frac{z^2}{R^2}.$$

Nun ist ferner nach den Gleichungen (63) des XII. Kapitels:

(80) $$\begin{cases} \xi = -\dfrac{zx}{R}, \\ \eta = \dfrac{\sigma z y}{R}, \\ \zeta = \dfrac{1}{2R}\{x^2 + \sigma z^2 - \sigma y^2\}, \end{cases}$$

und aus der letzten derselben gewinnt man durch zweimalige Differentiation nach x:

(81) $$\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} = \frac{1}{R},$$

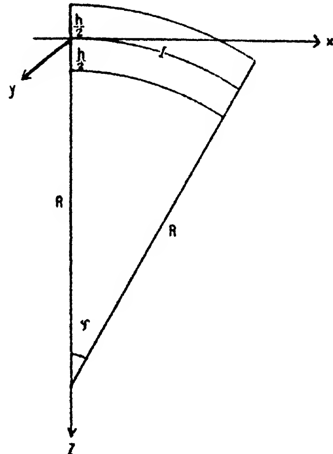


Fig. 188.

welcher Ausdruck die Krümmung des betreffenden Stabelementes darstellt. Damit wird das elastische Potential:

(82) $$f = \frac{E}{2}\,z^2\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right)^2.$$

Durch Integration über das Stabvolumen folgt dann die potentielle Energie. Der Stab habe, wie früher, die Höhe h $\left(\text{von } z = -\frac{h}{2} \text{ bis } z = +\frac{h}{2}\right)$, die Breite b, und der Einfachheit halber wieder die Länge $l = 1$. Dann ist $d\tau = b\,dz\,dx$, und man hat

$$\Phi = \int f\,d\tau = \frac{Eb}{2}\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}\int_0^1 z^2\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial z^2}\right)dz\,dx.$$

Darin ist $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}$, das sich auf die neutrale Faser bezieht, offenbar in bezug auf die Integration nach z als konstant zu behandeln. Es folgt also:

$$\Phi = \frac{E b}{2} \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\right) d x \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2 \, d z = \frac{E b h^3}{24} \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\right) d x. \tag{83}$$

Für die kinetische Energie machen wir wieder eine ähnliche Vernachlässigung wie beim longitudinal schwingenden Stabe, indem wir nur die parallel der z-Achse vor sich gehenden Verschiebungen ζ in Rechnung setzen. Außerdem führt in Wirklichkeit jeder Querschnitt noch eine Rotation aus, deren kinetische Energie streng genommen mit in Betracht gezogen werden müßte. Die Erfahrung hat jedoch gezeigt, daß in den meisten Fällen dadurch kein merklicher Fehler entsteht. Unter dieser vereinfachten Annahme ist die kinetische Energie der Volumeinheit $\frac{1}{2} \varepsilon \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)^2$, und die gesamte ergibt sich durch Integration über das Stabvolumen. Es folgt also:

$$L = \frac{\varepsilon b}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \int_0^1 \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)^2 dz\, dx,$$

und da h, die Höhe des Stabes, eine kleine Größe ist, innerhalb deren $\frac{\partial \zeta}{\partial t}$ als konstant betrachtet werden darf, so ist endlich:

$$L = \frac{\varepsilon b h}{2} \int_0^1 \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)^2 dx. \tag{84}$$

Mit den beiden Ausdrücken (83) und (84) setzen wir wieder das **Hamiltonsche** Prinzip an:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L\, dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} \Phi\, dt.$$

Zunächst haben wir ebenso wie früher nach (84):

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L\, dt = \varepsilon b h \int_{t_0}^{t_1} \int_0^1 \frac{\partial \zeta}{\partial t} \frac{\partial \delta \zeta}{\partial t} dt\, dx.$$

Durch partielle Integration nach der Zeit kann dieser Ausdruck umgestaltet werden. Wir haben:

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \zeta}{\partial t} \frac{\partial \delta \zeta}{\partial t} dt = \overline{\frac{\partial \zeta}{\partial t} \delta \zeta}\Big|_{t=t_0}^{t=t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \delta \zeta \cdot dt.$$

Damit wird die gesuchte Variation:

(85) $$\delta \int_{t_0}^{t_1} L\,dt = -\varepsilon b h \int_{t_0}^{t_1} dt \int_0^1 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}\,\delta\zeta \cdot dx,$$

da für $t = t_0$ und $t = t_1$ nach Voraussetzung $\delta\zeta$ gleich Null sein und daher der Ausdruck, der außerhalb des Integralzeichens steht, verschwinden muß. Ebenso ist zu berechnen:

(86a) $$\delta \int_{t_0}^{t_1} \Phi\,dt = \frac{E b h^3}{12} \int_{t_0}^{t_1} dt \int_0^1 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 \delta\zeta}{\partial x^2}\,dx.$$

Wir formen den Ausdruck $\int_0^1 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 \delta\zeta}{\partial x^2}\,dx$ durch partielle Integration um. Zunächst ist:

(86b) $$\int_0^1 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 \delta\zeta}{\partial x^2}\,dx = \left[\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\,\frac{\partial \delta\zeta}{\partial x}\right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3}\,\frac{\partial \delta\zeta}{\partial x}\,dx,$$

und indem nochmals partiell integriert wird, folgt für das letzte Integral von (86b):

(86c) $$\int_0^1 \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3}\,\frac{\partial \delta\zeta}{\partial x}\,dx = \left[\frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3}\,\delta\zeta\right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4}\,\delta\zeta \cdot dx.$$

Setzt man diese Werte in (86b) ein, so erhält man schließlich:

(86d) $$\int_0^1 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 \delta\zeta}{\partial x^2}\,dx = \left[\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\,\frac{\partial \delta\zeta}{\partial x}\right]_{x=0}^{x=1} - \left[\frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3}\,\delta\zeta\right]_{x=0}^{x=1} + \int_0^1 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4}\,\delta\zeta \cdot dx,$$

und damit wird nach (86a) die Variation der potentiellen Energie:

(87) $$\delta \int_{t_0}^{t_1} \Phi\,dt = \frac{E b h^3}{12} \int_{t_0}^{t_1} dt \left|\left[\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\,\delta\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3}\,\delta\zeta\right]_{x=0}^{x=1} + \int_0^1 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4}\,\delta\zeta \cdot dx\right|.$$

Die Werte der beiden ersten Ausdrücke im Integranden sind für die Grenzen $x = 0$ und $x = 1$ zu bilden, d. h. es sind die Werte für Anfang und Ende des Stabes einzusetzen, die durch die Randbedingungen bestimmt werden. Die wichtigsten der möglichen Fälle sind nun folgende:

1. **Der Stab ist an beiden Enden festgeklemmt.** Dann ist für $x = 0$ und $x = 1$ sowohl $\zeta = 0$ als auch $\frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0$, da durch die Einklemmung die Stabenden auch in Richtung der x-Achse festgehalten werden. Daher verschwindet der betreffende Ausdruck.

2. Der Stab ist an beiden Enden frei. Dann ist für $x=0$ und $x=1$ sowohl $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}=0$, als auch $\frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3}=0$, d. h. die Stabenden besitzen keine Krümmung und die Änderung der Krümmung ist gleichfalls Null, weil die Enden völlig frei sind. Daher verschwindet der betreffende Ausdruck.

3. Der Stab ist am Ende $x=0$ festgeklemmt, am andern ($x=1$) frei. Für $x=0$ verschwinden dann ζ und $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$, für $x=1$ ebenso $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3}$. Also verschwindet der Ausdruck wiederum.

4. Der Stab ist an beiden Enden „gehalten". Darunter versteht man eine solche Befestigung der Enden, daß ζ und $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}$ verschwinden, während $\frac{\partial \zeta}{\partial x} \neq 0$ bleibt. Wie dieser Fall experimentell zu realisieren ist, wird später zu erörtern sein. Jedenfalls sieht man, daß der fragliche Ausdruck wiederum verschwindet.

Man hat also in allen diesen Fällen einfacher:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \Phi\, dt = \frac{E b h^3}{12} \int_{t_0}^{t_1} dt \int_0^1 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4}\, \delta \zeta \cdot dx. \tag{88}$$

Nach dem Hamiltonschen Prinzip folgt nun aus (85) und (88):

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \int_0^1 dx \left[\varepsilon b h \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \frac{E b h^3}{12} \cdot \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4}\right] \cdot \delta \zeta = 0,$$

und dies kann nur erfüllt werden, weil die $\delta\zeta$ ganz willkürlich sind, indem die eckige Klammer verschwindet. Das liefert die folgende Differentialgleichung für die Biegungsschwingungen eines Stabes:

$$\varepsilon \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \frac{E h^2}{12} \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} = 0. \tag{89}$$

153. An einem Ende eingeklemmter, am anderen freier Stab.

Wir wollen jetzt den Fall behandeln, daß das Ende $x=0$ festgeklemmt, das Ende $x=1$ frei ist. Das liefert nach dem obigen folgende Randbedingungen:

$$\begin{cases} (\zeta)_{x=0} = 0, & \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)_{x=0} = 0, \\ \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\right)_{x=1} = 0, & \left(\frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3}\right)_{x=1} = 0. \end{cases} \tag{89a}$$

Zur Integration von (89) setzt man, wie üblich, an:

$$\zeta = \varphi(x) \cdot \cos nt \quad \text{oder} \quad \zeta = \varphi(x) \cdot \sin nt, \tag{90}$$

wo n eine zu bestimmende Größe ist. Dieser Ansatz liefert nach (89) und (89a) folgende Gleichungen zur Bestimmung von φ:

$$(91)\quad \begin{cases} \text{a)} & \dfrac{d^4\varphi}{dx^4} - \lambda\,\varphi(x) = 0; \quad \lambda = \dfrac{12\,s\,n^2}{E\,h^2}; \\ \text{b)} & \varphi(0) = \varphi'(0) = 0; \\ \text{c)} & \varphi''(1) = \varphi'''(1) = 0. \end{cases}$$

Dabei sind die zulässigen Werte λ, die Eigenwerte, zu bestimmen. Die Gleichung (91a) kann, da sie linear und homogen ist und konstante Koeffizienten besitzt, durch den Ansatz integriert werden:

$$(92)\qquad \varphi(x) = e^{\tau x},$$

wo τ eine zu bestimmende Konstante ist. Man erhält aus (91a) mit diesem Ansatz:

$$(93)\qquad \tau^4 - \lambda = 0,$$

und daraus folgt für τ:

$$\tau = \pm\sqrt{\pm\sqrt{\lambda}}.$$

Verstehen wir unter $\sqrt[4]{\lambda}$ die positive vierte Wurzel, so können die vier sich aus der letzten Formel ergebenden τ-Werte geschrieben werden:

$$(94)\quad \begin{cases} \tau_1 = \sqrt[4]{\lambda}, \\ \tau_2 = -\sqrt[4]{\lambda}, \\ \tau_3 = i\sqrt[4]{\lambda}, \\ \tau_4 = -i\sqrt[4]{\lambda}, \quad \text{wo } i = \sqrt{-1} \text{ ist.} \end{cases}$$

Wir erhalten also nach (92), wenn wir noch $\sqrt[4]{\lambda} = s$ setzen, für $\varphi(x)$ die folgenden partikulären Lösungen:

$$(95)\quad \begin{cases} \varphi^{(1)} = e^{sx}, \\ \varphi^{(2)} = e^{-sx}, \\ \varphi^{(3)} = e^{+isx}, \\ \varphi^{(4)} = e^{-isx}. \end{cases}$$

Da die Gleichung für $\varphi(x)$ linear ist, so können an Stelle der Lösungen (95) auch beliebige lineare Aggregate derselben als partikuläre Lösungen verwendet werden und zwar wollen wir, um rein reelle Lösungen zu gewinnen, folgende Kombinationen benutzen:

$$\frac{\varphi^{(1)} + \varphi^{(2)}}{2}, \quad \frac{\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}}{2}, \quad \frac{\varphi^{(3)} + \varphi^{(4)}}{2}, \quad \frac{\varphi^{(3)} - \varphi^{(4)}}{2i}.$$

Dies hat den Vorteil, daß wir dann auf die trigonometrischen und die hyperbolischen Kosinusse und Sinusse geführt werden. Es ist nämlich:

$$(96)\quad \begin{cases} \dfrac{e^{sx}+e^{-sx}}{2} = \mathfrak{Cof}(s\,x), & \dfrac{e^{isx}+e^{-isx}}{2} = \cos(s\,x), \\ \dfrac{e^{sx}-e^{-sx}}{2} = \mathfrak{Sin}(s\,x), & \dfrac{e^{isx}-e^{-isx}}{2i} = \sin(s\,x). \end{cases}$$

Diesen Aggregaten wollen wir nun die Bezeichnung φ_{I} bis φ_{IV} beilege

$$(97)\quad \begin{cases} \varphi_{\mathrm{I}}(x) = \mathfrak{Cof}(s\,x), \\ \varphi_{\mathrm{II}}(x) = \mathfrak{Sin}(s\,x), \\ \varphi_{\mathrm{III}}(x) = \cos(s\,x), \\ \varphi_{\mathrm{IV}}(x) = \sin(s\,x). \end{cases}$$

Demgemäß lautet die allgemeine Lösung für φ:

$$(98)\quad \varphi(x) = A\,\mathfrak{Cof}(\sqrt[4]{\lambda}\,x) + B\,\mathfrak{Sin}(\sqrt[4]{\lambda}\,x) + C\cos(\sqrt[4]{\lambda}\,x) + D\sin(\sqrt[4]{\lambda}\,x),$$

wobei die Konstanten A bis D, sowie die zulässigen Werte λ aus d Randbedingungen (91 b) und (91 c) zu bestimmen sind.

Es wird nützlich sein, folgende Formeln für die hyperbolischen Fun tionen anzugeben[1]), die aus (96) leicht zu verifizieren sind:

$$(99)\quad \begin{cases} \mathfrak{Cof}(0) = 1; & \mathfrak{Sin}(0) = 0; \\ \dfrac{d}{dx}\mathfrak{Cof}\,x = +\mathfrak{Sin}\,x; & \dfrac{d}{dx}\mathfrak{Sin}\,x = +\mathfrak{Cof}\,x; \\ \mathfrak{Cof}^2 x - \mathfrak{Sin}^2 x = 1. \end{cases}$$

Die Randbedingung (91 b) fordert $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$. Gleichung (98) liefe dafür unter Berücksichtigung von (99):

$$(100)\quad \begin{cases} \varphi(0) = A + C = 0, \\ \varphi'(0) = s(B + D) = 0. \end{cases}$$

Ebenso liefern die Gleichungen (91 c), die $\varphi''(1) = \varphi'''(1) = 0$ verlangen

$$(101)\quad \begin{cases} \varphi''(1) = s^2\{A\,\mathfrak{Cof}\,s + B\,\mathfrak{Sin}\,s - C\cos s - D\sin s\} = 0, \\ \varphi'''(1) = s^3\{A\,\mathfrak{Sin}\,s + B\,\mathfrak{Cof}\,s + C\sin s - D\cos s\} = 0. \end{cases}$$

Mit Hilfe von (100) können die Beziehungen (101) durch Eliminatio von C und D so formuliert werden:

$$(102)\quad \begin{cases} A\{\mathfrak{Cof}\,s + \cos s\} + B\{\mathfrak{Sin}\,s + \sin s\} = 0, \\ A\{\mathfrak{Sin}\,s - \sin s\} + B\{\mathfrak{Cof}\,s + \cos s\} = 0. \end{cases}$$

Da diese Gleichungen in bezug auf A und B als Unbekannte homoge **sind, so können sie nach diesen Unbekannten nur aufgelöst** werden, wen **die Determinante verschwindet:**

[1]) **Jahnke-Emde, pag. 7 u. 12.**

(103)
$$\begin{vmatrix} \mathfrak{Cof}\, s + \cos s, & \mathfrak{Sin}\, s + \sin s \\ \mathfrak{Sin}\, s - \sin s, & \mathfrak{Cof}\, s + \cos s \end{vmatrix} = 0.$$

Da λ, und somit s, verfügbar ist, kann diese Gleichung erfüllt werden; ihre Lösungen stellen eben die möglichen λ- resp. s-Werte, d. h. die Eigenwerte λ_ν dar. Ausführlich geschrieben lautet (103):

$$(\mathfrak{Cof}\, s + \cos s)^2 - (\mathfrak{Sin}\, s + \sin s)(\mathfrak{Sin}\, s - \sin s) = 0,$$

oder:

$$\mathfrak{Cof}^2 s + \cos^2 s + 2\,\mathfrak{Cof}\, s \cos s - \mathfrak{Sin}^2 s + \sin^2 s = 0,$$

was mit Rücksicht auf die letzte der Gleichung (99) liefert:

(104)
$$\mathfrak{Cof}\, s \cdot \cos s = -1.$$

Das ist eine transzendente Gleichung für s resp. λ. Ihre Wurzeln kann man aus den Funktionentafeln von Jahnke-Emde[1]) entnehmen. Man findet dort für die vier ersten Wurzeln die Werte angegeben:

(105) $s_1 = 1{,}8751$; $s_2 = 4{,}6941$; $s_3 = 7{,}8548$; $s_4 = 10{,}9955$.

Für alle Werte $\nu > 4$ erhält man die Wurzeln mit großer Näherung aus der Gleichung:

(105a)
$$\underset{\nu > 4}{s_\nu} = \tfrac{1}{2}(2\nu - 1)\pi.$$

Die vierten Potenzen der obigen Werte s_ν stellen nun die Eigenwerte λ_ν dar, und damit erhalten wir nach der Gleichung (91a) auch die möglichen Schwingungszahlen n_ν:

(106)
$$n_\nu = \sqrt{\frac{E h^2}{12 \varepsilon}}\, \lambda_\nu = s_\nu^2 \sqrt{\frac{E h^2}{12 \varepsilon}}.$$

Für die so erhaltenen Werte s_ν sind die Gleichungen (102) lösbar; sie geben das Verhältnis $A : B$, und zwar, da infolge des Verschwindens der Determinante beide Gleichungen identisch sind, beide Gleichungen denselben Wert des Verhältnisses. Den zu s_ν gehörigen Wert $\frac{A}{B}$ wollen wir durch $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ bezeichnen. Dann ergibt sich nach (102):

(107)
$$\frac{A_\nu}{B_\nu} = -\frac{\mathfrak{Sin}\, s_\nu + \sin s_\nu}{\mathfrak{Cof}\, s_\nu + \cos s_\nu}.$$

A_ν bleibt also willkürlich und kann etwa zur Normierung benützt werden; wir wollen es in Zukunft durch C bezeichnen. Damit erhalten wir unter Berücksichtigung von (100) und (98) für die Eigenfunktionen:

(108)
$$\varphi_\nu(x) = C \left\{ \begin{matrix} (\mathfrak{Cof}\, s_\nu + \cos s_\nu)\left(\mathfrak{Sin}(s_\nu x) - \sin(s_\nu x)\right) - \\ (\mathfrak{Sin}\, s_\nu + \sin s_\nu)\left(\mathfrak{Cof}(s_\nu x) + \cos(s_\nu x)\right) \end{matrix} \right\}.$$

[1]) Jahnke-Emde, pag. 3.

Eine Lösung ζ_ν der ursprünglichen Differentialgleichung (89) erhält man daraus nach (90) durch Multiplikation mit $\cos n_\nu t$ oder $\sin n_\nu t$; also ist allgemein:

$$\zeta_\nu = \varphi_\nu(x)\{\alpha_\nu \cos n_\nu t + \beta_\nu \sin n_\nu t\}, \tag{109}$$

wo α_ν und β_ν beliebige Konstanten sind. Die allgemeinste Lösung erhält man durch Summation aller Werte ζ_ν zu:

$$\zeta = \sum_\nu^{1,\infty} \zeta_\nu = \sum_\nu^{1,\infty} \varphi_\nu(x)\{\alpha_\nu \cos n_\nu t + \beta_\nu \sin n_\nu t\}, \tag{110}$$

wobei die Konstanten dem gegebenen Anfangszustande anzupassen sind. Wir wollen jedoch auf die hiermit zusammenhängenden Probleme nicht näher eingehen, da sie naturgemäß komplizierter sind und mehr Rechnung verlangen wie früher. Es sei nur bemerkt, daß man auch hier am einfachsten eine Integralgleichung bildet und von da zunächst auf dem nämlichen Wege wie früher die Möglichkeit beweist, quellenmäßig darstellbare Funktionen nach den Eigenfunktionen (108) zu entwickeln. Von den hierin steckenden Einschränkungen kann man sich nachträglich ebenso wie früher leicht befreien. Auch auf die verschiedenen Schwingungsformen wollen wir nicht näher eingehen. Denn um Knoten und Bäuche zu finden, hat man die Nullstellen und die Maxima resp. Minima von $\varphi_\nu(x)$ aufzusuchen. Das erfordert aber die immerhin umständliche Diskussion einer transzendenten Gleichung, wie aus (108) hervorgeht. Der Leser findet eine solche Diskussion durchgeführt in Rayleighs „Theorie des Schalles" Bd. I, Kapitel „Transversalschwingungen von Stäben".

Nur den Schwingungszahlen der Eigentöne wollen wir eine kurze Betrachtung widmen. Wir finden nach (105a), (105b) und (106):

$$\left\{\begin{aligned} n_1 &= \sqrt{\frac{E h^2}{12 \varepsilon}}\; 1{,}8751^2, \\ n_2 &= \sqrt{\frac{E h^2}{12 \varepsilon}}\; 4{,}6941^2, \\ n_3 &= \sqrt{\frac{E h^2}{12 \varepsilon}}\; 7{,}8548^2, \\ n_4 &= \sqrt{\frac{E h^2}{12 \varepsilon}}\; 10{,}9955^2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ n_\nu &= \sqrt{\frac{E h^2}{12 \varepsilon}}\; \frac{1}{4}(2\nu - 1)^2 \pi^2. \end{aligned}\right. \tag{111}$$

Man erkennt daraus, daß die Eigentöne unharmonisch sind, da sie nicht im Verhältnis kleiner ganzer Zahlen zueinander stehen. Die höheren ($\nu > 4$) Eigentöne verhalten sich mit großer Annäherung wie die Quadrate der ungeraden Zahlen. Die Schwingungszahlen wachsen also viel rascher in die Höhe, als z. B. bei der Saite.

154. Erweiterung der Resultate für beliebige Querschnittsform.

Die in der vorigen Nummer abgeleiteten Resultate gelten zunächst nur für Stäbe von rechteckigem Querschnitt. Man kann dieselben jedoch leicht erweitern auf Stäbe von beliebig gestaltetem Querschnitt, von denen wir hier besonders kreisförmige Querschnitte ins Auge fassen wollen.

Für das elastische Potential ergab sich in Gleichung (82):

(82)
$$f = \frac{E}{2} z^2 \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\right).$$

Um die potentielle Energie zu gewinnen, muß dieser Ausdruck mit $d\tau = dq\,dx$ multipliziert und über das Stabvolumen integriert werden; dq ist ein Element des Querschnittes, dx eines der Länge des Stabes. Für den rechteckigen Stab war mit den früheren Bezeichnungen $d\tau = b\,dz\,dx$, und die Ausrechnung ergab nach (83)

$$\int f\,d\tau = \frac{E\,b\,h^3}{24}\int_0^1 \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\right) d\,x.$$

Für einen kreisförmigen Querschnitt würde sein $d\tau = dq\,dx = r\,dr\,d\varphi\cdot dx$, wenn r und φ Polarkoordinaten in der yz-Ebene bedeuten; R sei der Radius des Querschnittes. Dann ist in (82) $z = R\sin\varphi$ zu setzen, und man erhält für einen kreisförmigen Querschnitt:

(83a)
$$\int f\,d\tau = \frac{E}{2}\int_0^1 \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\right)^2 d\,x \int_0^R \int_0^{2\pi} r^3 \sin^2\varphi\,d\,r\,d\,\varphi = \frac{E\,R^4\,\pi}{8}\int_0^1 \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\right)^2 d\,x.$$

Die beiden Ausdrücke (83) und (83a) können auf eine gemeinsame Form gebracht werden, indem man den Begriff des „Flächenträgheitsmomentes“ einführt. Darunter versteht man den Ausdruck:

(112)
$$\Theta = \int d\,q\cdot r^2,$$

der analog dem gewöhnlichen Trägheitsmoment gebildet ist, nur daß an Stelle des Massenelementes dm hier dq steht, woraus auch der Name sich leicht erklärt.

Wir wollen für beide Querschnitte das Flächenträgheitsmoment um diejenige Achse berechnen, um die tatsächlich bei den Schwingungen (vgl. z. B. Fig. 188) die kleinen Rotationen der Querschnitte erfolgen, d. h. um eine den Querschnitt halbierende Parallele zur y-Achse. Also erhalten wir folgende Zeichnung (Fig. 189a, b).

In Fig. 189a erhalten wir für das Flächenträgheitsmoment des rechteckigen Querschnittes um die y-Achse:

$$(113) \qquad \Theta_1 = \int dq \cdot r^2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} b\,dz \cdot z^2 = \frac{b\,h^3}{12}.$$

In Fig. 189b folgt ähnlich für Θ_2:

$$(114) \qquad \Theta_2 = \int dq \cdot r^2 = \int dq \cdot z^2 = \int_0^R \int_0^{2\pi} \varrho^3 d\varrho \sin^2\varphi\, d\varphi = \frac{R^4 \pi}{4}.$$

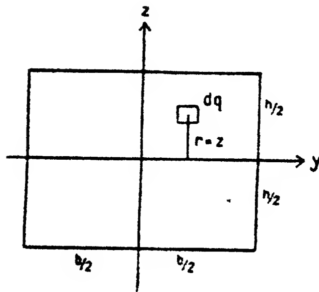


Fig. 189a.

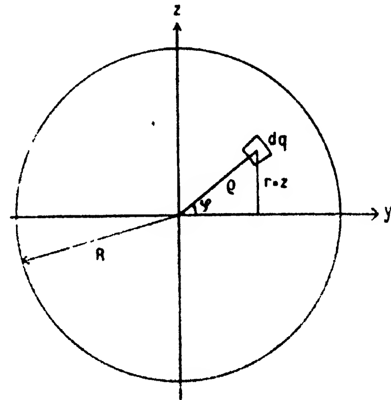


Fig. 189b.

Setzt man diese Ausdrücke in (83) und (83a) ein, so folgt:

$$\int f\,d\tau = \frac{E\,\Theta_1}{2}\int_0^1 \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\right)^2 dx \quad \text{resp.} \quad \frac{E\,\Theta_2}{2}\int_0^1 \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\right)^2 dx.$$

Das gilt ganz allgemein, so daß wir für die potentielle Energie des gegebenen Stabes setzen können:

$$(115) \qquad \Phi = \frac{E\,\Theta}{2}\int_0^1 \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\right)^2 dx.$$

Setzen wir schließlich die Größe des Querschnittes $= q$, so wird die kinetische Energie nach (84):

$$(116) \qquad L = \frac{s\,q}{2}\int_0^1 \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)^2 dx,$$

und aus beiden folgt nach dem Hamiltonschen Prinzip die Differentialgleichung der Biegungsschwingungen:

$$(117) \qquad s\,q\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + E\,\Theta\frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} = 0.$$

Damit sind alle möglichen Fälle auf den in der vorigen Nummer behandelten reduziert; man hat nur statt des Ausdruckes $\frac{h^2}{12}$ in Gleichung (89) den allgemeinen $\frac{\Theta}{q}$ einzuführen.

155. An beiden Enden gehaltener Stab; Einfluß gleichmäßiger Belastung.

Wir wollen nun einen besonders einfachen Fall betrachten, in dem beide Enden gehalten sind. Das soll heißen, daß für $x=0$ und $x=1$ die Verrückungen $\zeta=0$ sein müssen; aber der Stab soll nicht eingeklemmt sein, so daß auch für $x=0$ und $x=1$ die Richtung $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$ nicht $=0$, sondern beliebig ist. Dagegen soll die Krümmung der Stabenden verschwinden. Man kann dies etwa erreichen, wenn man die Enden des Stabes gegen eine rauhe Fläche stützt, die die Enden festhält, aber Richtungsänderungen erlaubt. Dann treten zu (117) die Bedingungen hinzu:

$$(118)\qquad \begin{cases} \zeta(0) = \zeta(1) = 0. \\ \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\right)_0 = \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\right)_1 = 0. \end{cases}$$

Zur Lösung setzen wir genau wie früher:

$$(119)\qquad \zeta = \varphi(x) \cos nt,$$

woraus sich für φ die Gleichungen ergeben:

$$(120)\qquad \begin{cases} \frac{d^4 \varphi}{d x^4} - \lambda \varphi(x) = 0; \quad \lambda = \frac{\varepsilon n^2 q}{E \Theta}, \\ \varphi(0) = \varphi(1) = 0, \\ \varphi''(0) = \varphi''(1) = 0. \end{cases}$$

Für φ erhalten wir zunächst aus der ersten Gleichung (120) genau wie früher [vgl. Formel (92)—(98)]:

$$(121)\qquad \varphi(x) = A \operatorname{Cof}(\sqrt[4]{\lambda}\, x) + B \operatorname{Sin}(\sqrt[4]{\lambda}\, x) + C \cos(\sqrt[4]{\lambda}\, x) + D \sin(\sqrt[4]{\lambda}\, x).$$

Zur Bestimmung der Konstanten A, B, C, D liefern die Randbedingungen die folgenden vier Gleichungen:

$$(122)\qquad \begin{cases} A + C = 0, \\ A \operatorname{Cof}(\sqrt[4]{\lambda}) + B \operatorname{Sin}(\sqrt[4]{\lambda}) + C \cos(\sqrt[4]{\lambda}) + D \sin(\sqrt[4]{\lambda}) = 0, \\ A - C = 0, \\ A \operatorname{Cof}(\sqrt[4]{\lambda}) + B \operatorname{Sin}(\sqrt[4]{\lambda}) - C \cos(\sqrt[4]{\lambda}) - D \sin(\sqrt[4]{\lambda}) = 0. \end{cases}$$

Die erste und dritte liefert $A = C = 0$; damit erhält man aus der zweiten und vierten:

$$(123)\qquad \begin{cases} B\,\mathfrak{Sin}\,(\sqrt[4]{\lambda}) + D\sin(\sqrt[4]{\lambda}) = 0\,, \\ B\,\mathfrak{Sin}\,(\sqrt[4]{\lambda}) - D\sin(\sqrt[4]{\lambda}) = 0\,. \end{cases}$$

Diese Gleichungen könnten durch $B = D = 0$ befriedigt werden, was aber die banale Lösung 0 liefern würde. Schließen wir diese wie immer aus, so haben wir nur folgende Möglichkeit:

$$B = 0\,, \quad \text{und} \quad \sin(\sqrt[4]{\lambda}) = 0\,,$$

was für das unbekannte λ liefert:

$$(124)\qquad \lambda_\nu = \nu^4 \pi^4 \qquad (\nu = 1, 2 \ldots \infty).$$

Gleichung (124) stellt die Eigenwerte dar. Für die Eigenfunktionen erhält man, wenn man zur Normierung $D = \sqrt{2}$ setzt, nach (121) bis (124):

$$(125)\qquad \varphi_\nu(x) = \sqrt{2} \cdot \sin \nu \pi x\,.$$

Das sind also die nämlichen Eigenfunktionen wie bei der Saite. Dennoch sind die Schwingungszahlen hier ganz andere. Denn nach der ersten Gleichung (120) und (124) ist

$$(126)\qquad \begin{cases} \dfrac{\lambda_\nu E\,\Theta}{s q} = n_\nu^2 = \dfrac{E\,\Theta\,\nu^4 \pi^4}{s q}\,; \quad \text{also} \\ n_\nu = \nu^2 \pi^2 \sqrt{\dfrac{E\,\Theta}{s q}}\,, \end{cases}$$

d. h. die möglichen Schwingungszahlen verhalten sich wie die Quadrate der ganzen Zahlen; sie wachsen also viel rascher wie bei der Saite. Dagegen sind natürlich die Knoten- und Bauchlagen dieselben wie bei der Saite, weshalb ein Eingehen darauf sich erübrigt.

Wir wollen jetzt denselben Fall behandeln, nur daß wir den Stab in seiner ganzen Länge mit Masse belasten, so daß auf jede Längeneinheit die Masse m entfällt. Die Biegsamkeit soll dadurch nicht geändert werden. Dann bleibt die potentielle Energie dieselbe, und die kinetische Energie wird offenbar:

$$(127)\qquad L = \frac{s q}{2} \int_0^1 \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)^2 dx + \frac{m}{2} \int_0^1 \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)^2 dx = \frac{s q + m}{2} \int_0^1 \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)^2 dx\,.$$

Demgemäß tritt in Gleichung (117) und in allen folgenden an Stelle von $s q$ die Summe $(s q + m)$, die wir der Kürze halber mit M bezeichnen wollen. Wir erhalten also als Differentialgleichung des gleichmäßig belasteten Stabes:

$$(128)\qquad M \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + E\,\Theta \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} = 0\,.$$

wozu hier die Randbedingungen (118) hinzutreten. Demgemäß erhält man hier statt (126) für die möglichen Eigenfrequenzen:

$$n_\nu = \nu^2 \pi^2 \sqrt{\frac{E\,\Theta}{M}}\,. \tag{129}$$

Dies Resultat wird bei dem in der folgenden Nummer behandelten Problem verwertet.

156. Deformation eines um seine Längsachse rotierenden gleichmäßig belasteten Stabes.

Die Resultate der vorigen Nummer wollen wir nun auf ein technisch interessantes Problem anwenden, das von Stodola und Kneser behandelt worden ist. Wir wollen einen Stab um seine Längsachse

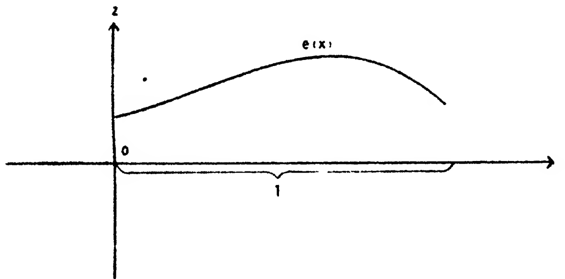


Fig. 190.

(x-Achse) rotieren lassen. Dabei müßte er seine geradlinige Gestalt beibehalten, wenn die Massenverteilung gleichmäßig wäre, d. h. wenn die Schwerpunkte aller Querschnitte auf der Rotationsachse lägen. Wir wollen annehmen, dies sei bei dem unbelasteten Stabe der Fall; nun werde er jedoch pro Längeneinheit mit der Masse m belastet, und zwar so, daß der Schwerpunkt jedes Querschnittes x um das Stück $e(x)$ von der x-Achse abweicht. Wir wollen der Einfachheit halber annehmen, daß die Abweichungen $e(x)$ alle in einer Ebene liegen, die wir zur xz-Ebene wählen, wie es die Fig. 190 zeigt.

Wenn nun der Stab mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω rotiert, so wird die Zentrifugalkraft den Stab verbiegen. Es handelt sich um die Bestimmung dieser Ausbiegung. Es ist zweckmäßig, in diesem Falle das Koordinatensystem mitrotieren zu lassen, so daß der Stab diesem gegenüber eine relative Gleichgewichtslage einnimmt. Wir haben hier einen eigentümlichen Fall von erzwungenen

Schwingungen vor uns, für den wir die Differentialgleichung erhalten, wenn wir in (128) auf der rechten Seite noch eine äußere Kraft $f(x)$ (in unserem Falle die Zentrifugalkraft) hinzufügen. Es wird also allgemein:

$$M\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}+E\Theta\frac{\partial^4\zeta}{\partial x^4}=f(x). \tag{130}$$

Nun zeigt sich der Vorteil, der aus der Mitrotation des Koordinatensystems entspringt: der Stab ist relativ zu diesem System im Gleichgewicht, also müssen in (130) die Ableitungen nach der Zeit verschwinden; mithin reduziert sich letztere Gleichung auf:

$$E\Theta\frac{\partial^4\zeta}{\partial x^4}=f(x), \tag{131}$$

wo jetzt nur noch $f(x)$ auszudrücken ist. Im ruhenden Zustande ist die Abweichung des Schwerpunktes von der x-Achse $e(x)$, während der Rotation wird sie $\zeta+e(x)$. Nach bekannten Sätzen ist also die im Schwerpunkte angreifende Zentrifugalkraft pro Längeneinheit:

$$f(x)=M\omega^2[\zeta+e(x)]; \tag{132}$$

also folgt schließlich:

$$E\Theta\frac{\partial^4\zeta}{\partial x^4}=M\omega^2\zeta+M\omega^2e(x). \tag{133}$$

Dazu treten noch die Randbedingungen, etwa um die Sache möglichst einfach zu machen, für einen an beiden Enden „gehaltenen" Stab:

$$\left\{\begin{aligned}\zeta(0)&=\zeta(1)=0,\\ \left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right)_0&=\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right)_1=0.\end{aligned}\right. \tag{134}$$

Wir wollen nun zunächst, um die Lösung möglichst einfach zu erhalten, die Funktion $e(x)$, die die Ausweichung der Schwerpunkte darstellt, nach den Eigenfunktionen des „gehaltenen" Stabes entwickeln. Diese sind nach den Ergebnissen der vorigen Nummer die Größen $\sqrt{2}\sin\nu\pi x$. Also dürfen wir setzen:

$$e(x)=\sum_{\nu}^{1,\infty}A_\nu\sqrt{2}\cdot\sin\nu\pi x;\quad A_\nu=\sqrt{2}\int_0^1\sin\nu\pi\alpha\cdot e(\alpha)\,d\alpha. \tag{135}$$

Dann geht Gleichung (133) über in die folgende:

$$E\Theta\frac{\partial^4\zeta}{\partial x^4}-M\omega^2\zeta=M\omega^2\sum_{\nu}^{1,\infty}A_\nu\sqrt{2}\cdot\sin\nu\pi x. \tag{136}$$

und es liegt nahe, wie früher bei den erzwungenen Schwingungen, zur Integration zu setzen:

(137) $$\zeta = \sqrt{2}\sum_{\nu}^{1,\infty} B_\nu \sin \nu\pi x,$$

wo die B_ν unbekannte Konstanten sind, da ja ζ unbekannt, d. h. zu bestimmen ist. Das Einsetzen ergibt folgendes:

$$\sqrt{2}\sum_{\nu}^{1,\infty} E\,\Theta\,\nu^4\pi^4 B_\nu \sin \nu\pi x - M\omega^2\sqrt{2}\sum_{\nu}^{1,\infty} B_\nu \sin\nu\pi x$$
$$= M\omega^2\sqrt{2}\sum_{\nu}^{1,\infty} A_\nu \sin\nu\pi x,$$

und diese Gleichung kann nur bestehen, wenn für alle Werte ν die Beziehung gilt:

$$B_\nu\{E\,\Theta\,\nu^4\pi^4 - M\omega^2\} = M\omega^2 A_\nu,$$

d. h. zur Bestimmung der unbekannten Größen B_ν folgt die Gleichung:

(138) $$B_\nu = \frac{M\omega^2 A_\nu}{E\,\Theta\,\nu^4\pi^4 - M\omega^2},$$

und demgemäß folgt aus (137) als Lösung für die gesuchte Deformation:

(139) $$\zeta = M\omega^2\sqrt{2}\sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{A_\nu \sin\nu\pi x}{E\,\Theta\,\nu^4\pi^4 - M\omega^2}.$$

Man erkennt, daß die Deformationen ζ im allgemeinen endlich sind, mit Ausnahme der Fälle, wo der Nenner eines der Glieder von (139) verschwindet. Ist dies der Fall, d. h. ist

$$E\,\Theta\,\nu^4\pi^4 = M\omega_\nu^2,$$

oder ist

(140) $$\omega_\nu = \sqrt{\frac{E\,\Theta}{M}}\,\nu^2\pi^2 \quad (\nu = 1, 2 \ldots \infty),$$

so übersteigen die Deformationen jede endliche Größe, oder praktisch gesprochen: die Achse zerbricht. Die so bestimmten Geschwindigkeiten ω_ν nennt man die „kritischen Geschwindigkeiten"; sie sind identisch, wie ein Blick auf (129) lehrt, mit den Eigenfrequenzen n_ν des belasteten Stabes. Wir haben also hier einen Fall von **Resonanz** vor uns.

Es ist nun interessant, daß man unter Umständen eine oder mehrere kritische Geschwindigkeiten unschädlich machen kann. Denn man erkennt leicht, daß, wenn A_ν selbst Null ist, die Geschwindigkeit ω_ν kein Unendlichwerden des betreffenden Gliedes verursachen kann, da das betreffende Glied dann einfach gleich Null ist. Wie kann man nun das Verschwinden eines oder mehrerer der Entwickelungskoeffizienten A_ν von $e(x)$ erreichen? Offenbar einfach dadurch, daß man die Funktion $e(x)$ durch Verschiebung der Massenanordnung passend verändert. Dieser Massenausgleich kann natürlich nur experimentell geschehen.

Das vorstehend behandelte Problem ist in der Praxis insofern von Wichtigkeit, als bei schnell laufenden Wellen mit aufgesetzten Rädern, die z. B. bei Turbinen vorkommen, schon geringe Abweichungen von der genauen Schwerpunktszentrierung starke Zentrifugalkräfte hervorrufen können. Tatsächlich hat Stodola experimentell die vier niedrigsten kritischen Geschwindigkeiten beobachten können; dabei wurden Umdrehungszahlen von 10000 bis 30000 pro Minute angewendet.

157. Fortpflanzung von Biegungswellen in einem unendlich ausgedehnten Stabe.

Von Interesse ist noch eine Untersuchung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Biegungswellen. In den früheren Problemen über Schwingungen (Saite, longitudinal schwingender Stab, tordierter Stab) stießen wir auf eine Differentialgleichung von folgender Gestalt:

$$\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - B \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

wo ε die Dichtigkeit, B eine vom Material und den Dimensionen abhängige Konstante bedeutete. Die Gleichung läßt sich nach den allgemeinen Auseinandersetzungen des XIII. Kapitels durch den Ansatz integrieren:

$$u = f(x \pm c\,t),$$

wo $c = \sqrt{\frac{B}{\varepsilon}}$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit darstellt, die demnach von der Wellenlänge als unabhängig sich erweist. Gleichzeitig pflanzt sich die Störung $f(x)$ undeformiert fort, welches auch der Charakter der Funktion $f(x)$ sei. Dies ist bei den Biegungsschwingungen des Stabes anders. Zunächst ist die Differentialgleichung für diesen Fall nach (117):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{E\Theta}{\varepsilon q} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0 \tag{141}$$

von der vierten Ordnung, und das schließt in sich, wie wir sofort sehen werden, daß sie im allgemeinen nicht durch den Ansatz $u = f(x \pm ct)$ integriert werden kann. In der Tat, setzen wir versuchsweise

$$u = f(x \pm c\,t), \tag{142}$$

so ist, wenn die Ableitungen nach dem Argument durch Striche bezeichnet werden:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 f''; \qquad \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = f''''.$$

Damit also obiger Ansatz brauchbar sein sollte, müßte nach (141) sein:

$$c^2 f'' + \frac{E\Theta}{\varepsilon q} f'''' = 0, \tag{143}$$

und diese Gleichung ist natürlich durch beliebige Funktionen f nicht erfüllbar. Man könnte allerdings daran denken, sie durch die speziellen Annahmen zu erfüllen:

$$(144)\qquad \begin{cases} c^2 = \dfrac{E\Theta}{\varepsilon q}, \\ f'' + f'''' = 0. \end{cases}$$

Dies ist jedoch unzulässig, da c^2 eine andere Dimension besitzt wie $\frac{E\Theta}{\varepsilon q}$. In der Tat, unserem Ansatz (142) zufolge hat c^2 die Dimension eines Geschwindigkeitsquadrates; anderseits ergibt sich für $\frac{E\Theta}{\varepsilon q}$ folgendes: E hat die Dimension eines Druckes $\left[\frac{M L T^{-2}}{L^2}\right]$, ε die Dimension einer Masse pro Kubikzentimeter $[ML^{-3}]$, q ist das Quadrat einer Länge $[L^2]$, und Θ als Flächenträgheitsmoment von der Dimension der vierten Potenz einer Länge $[L^4]$. Also haben wir die Dimensionsgleichung:

$$\left[\frac{E\Theta}{\varepsilon q}\right] = \left[\frac{L^4}{T^2}\right] = \left[\frac{L^2}{T^2}\right][L^2],$$

d. h. $\frac{E\Theta}{\varepsilon q}$ ist gleich einem Geschwindigkeitsquadrat $\frac{L^2}{T^2}$, multipliziert mit dem Quadrat einer Länge. Wir dürfen also den Ansatz (144) nicht machen, sondern müssen allgemeiner setzen, indem wir unter L eine Größe von der Dimension einer Länge verstehen, deren physikalischer Charakter später aufzuklären sein wird:

$$(145)\qquad \begin{cases} c^2 L^2 = \dfrac{E\Theta}{\varepsilon q}, \\ f'' + L^2 f'''' = 0. \end{cases}$$

Setzen wir zur Abkürzung $f'' = F$, $x \pm ct = z$, so lautet die letzte Gleichung:

$$(146)\qquad \frac{d^2 F}{d z^2} + \frac{1}{L^2} F = 0,$$

und diese hat zur Lösung:

$$(147)\qquad F = \cos\frac{z}{L} \quad \text{oder} \quad F = \sin\frac{z}{L}.$$

Und daraus ergibt sich, unter Fortlassung belangloser Konstanten:

$$(148)\qquad f = \begin{cases} \cos\dfrac{1}{L}(x \pm ct), \\ \sin\dfrac{1}{L}(x \pm ct). \end{cases}$$

Durch Einsetzen dieses Wertes in (141) finden wir als Lösung:

$$(149)\qquad u = \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} \cdot \left\{\frac{1}{L}\left(x \pm \frac{1}{L}\sqrt{\frac{E\Theta}{\varepsilon q}}\, t\right)\right\},$$

d. h. aber: nicht eine beliebige Funktion $f(x \pm ct)$ löst die Differentialgleichung (141), sondern nur ganz bestimmte Funktionen, nämlich ein Kosinus oder ein Sinus des betreffenden Arguments.

Physikalisch bedeutet dies: Beliebige Störungen vermögen sich nicht undeformiert fortzupflanzen, sondern einzig und allein rein periodische Störungen.

Man kann diesen Sachverhalt etwas anders ausdrücken: wir wollen die Bedeutung der Konstanten L in (148) resp. (149) bestimmen. Lassen wir x um den Betrag einer Wellenlänge λ zunehmen, so darf der Kosinus resp. Sinus sich nicht ändern, d. h. es muß sein:

$$\frac{\lambda}{L} = 2\pi, \quad \text{d.h.} \quad L = \frac{\lambda}{2\pi}.$$

Die Konstante L ist also, abgesehen vom Faktor $\frac{1}{2\pi}$, gleich der Wellenlänge. Dann erkennt man aus (149), daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle den Wert hat:

$$c = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\frac{E\Theta}{\varepsilon q}}, \tag{150}$$

und diese Gleichung, die offenbar dimensionsrichtig ist, lehrt folgendes: Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist hier nicht nur von den Materialkonstanten abhängig, sondern auch noch von der Wellenlänge, der sie nach (150) umgekehrt proportional ist. Je kleiner die Wellenlänge, d. h. je größer die Schwingungszahl, desto größer ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Wir haben hier diejenige Erscheinung vor uns, welche in der Optik die Farbenzerstreuung hervorruft und als „Dispersion" bezeichnet wird.

Denken wir uns jetzt eine beliebige Störung von der hier betrachteten Art erzeugt, so kann dieselbe nach dem Fourierschen Theorem in eine Reihe rein periodischer Störungen von verschiedener Wellenlänge zerlegt werden. Da die letzteren sich aber mit verschiedener Geschwindigkeit fortpflanzen, so muß sich die Gestalt der Störung beim Fortschreiten im Stabe ändern, mit anderen Worten: Eine beliebige Störung kann sich nicht undeformiert fortpflanzen; und das ist das nämliche Resultat, was wir bereits oben erhalten hatten.

158. Sätze über Krümmung schwachgekrümmter Flächen.

Bevor wir uns nun zur Untersuchung der uns noch verbleibenden Plattenschwingungen wenden, wird es gut sein, in dieser Nummer einige geometrische Sätze über Krümmung von Flächen zusammenzustellen, speziell auch in der Form, die sie für schwach gekrümmte Flächen annehmen, welcher Fall bei den Plattenschwingungen vorliegt.

Eine Fläche sei in der expliziten Form gegeben:

(151) $$z = f(x, y).$$

Verstehen wir unter (x_0, y_0, z_0) einen beliebigen Punkt P der Fläche und bezeichnen wir einen benachbarten Flächenpunkt durch $x_0+\xi$, $y_0+\eta$, $z_0+\zeta$, so ist offenbar auch

(151a) $$z_0 + \zeta = f(x_0+\xi,\ y_0+\eta)$$

als Gleichung der betreffenden Fläche in der Umgebung des festen Punktes (x_0, y_0, z_0) zu betrachten; ξ, η, ζ sind die neuen Variablen,

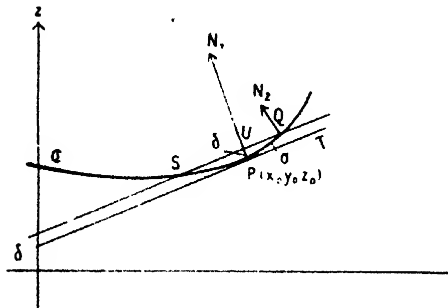


Fig. 191.

die sogenannten relativen Koordinaten. Wenn wir diese Gleichung nach dem **Taylorschen** Lehrsatze entwickeln und beiderseits $z_0 = f(x_0, y_0)$ abziehen, so hat man mit hinreichender Genauigkeit:

$$\zeta = \frac{\partial f}{\partial x}\xi + \frac{\partial f}{\partial y}\eta + \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\xi^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\xi\eta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\eta^2\right\}.$$

Nur etwas anders geschrieben lautet diese Gleichung:

(152) $$\zeta = \frac{\partial \zeta}{\partial x}\xi + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\eta + \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\xi^2 + 2\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y}\xi\eta + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\eta^2\right\}.$$

Dabei beziehen sich die Ableitungen $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$, $\frac{\partial \zeta}{\partial y}$ usw. alle auf den Punkt (x_0, y_0, z_0). Auch diese Gleichung kann als Gleichung der betreffenden Fläche in der Umgebung von (x_0, y_0, z_0) bezeichnet werden.

Wir wollen jetzt in dem schon betrachteten Punkte P (x_0, y_0, z_0) die Tangentialebene an die Fläche ziehen. In Fig. 191 stelle die Kurve $\mathfrak{C}$ einen Schnitt durch die Fläche dar. T sei die Tangentialebene an den Punkt P. Ihre Gleichung lautet bekanntlich, wenn die laufenden Koordinaten mit $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ bezeichnet werden und A eine noch zu bestimmende Konstante bedeutet:

$$\mathfrak{z} = \frac{\partial \zeta}{\partial x}\mathfrak{x} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\mathfrak{y} + A.$$

A kann dadurch eliminiert werden, daß man für $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ den Wert (x_0, y_0, z_0) einsetzt, da ja der Punkt P der Tangentialebene angehört, also seine Koordinaten ihre Gleichung befriedigen müssen. Es ist also auch:

$$z_0 = \frac{\partial \zeta}{\partial x} x_0 + \frac{\partial \zeta}{\partial y} y_0 + A.$$

Und durch Subtraktion von der letzten Gleichung folgt als endgültige Gleichung der Tangentialebene im Punkte (x_0, y_0, z_0):

(153) $$\mathfrak{z} - z_0 = \frac{\partial \zeta}{\partial x}(\mathfrak{x} - x_0) + \frac{\partial \zeta}{\partial y}(\mathfrak{y} - y_0).$$

Im Punkte P ziehen wir ferner die Normale N_1. Diese wird im allgemeinen nicht in der Papierebene, d. h. nicht in der Ebene unseres Schnittes liegen. Nehmen wir aber die Papierebene so an, daß sie auch die Normale enthält, so haben wir einen sogenannten „Normalschnitt" vor uns. Diese Annahme wollen wir hier machen. Die Normale N_1 hat natürlich im allgemeinen eine andere Richtung wie die z-Achse. Denn nach bekannten Formeln der analytischen Geometrie ist der Kosinus des Winkels, den die Normale mit der z-Achse bildet:

$$\cos(n\,z) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2}}.$$

Ist aber die Fläche so schwach gekrümmt, — dies wird bei den Plattenschwingungen der Fall sein — daß die Quadrate von $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$ und $\frac{\partial \zeta}{\partial y}$ gegen 1 vernachlässigt werden dürfen, so ist der Kosinus angenähert gleich 1 zu setzen (in der Fig. 191 ist die Krümmung natürlich stark übertrieben). Auf der Normale tragen wir von P aus bis zum Punkte U ein sehr kleines Stück δ ab und ziehen durch U eine Parallele zur Tangentialebene. Nach dem Obigen ist dann das aus der z-Achse herausgeschnittene Stück zwischen den beiden Ebenen ebenfalls bis auf Größen höherer Ordnung gleich δ, und die Gleichung dieser Ebene lautet einfach nach (153):

(154) $$\mathfrak{z} - z_0 - \delta = \frac{\partial \zeta}{\partial x}(\mathfrak{x} - x_0) + \frac{\partial \zeta}{\partial y}(\mathfrak{y} - y_0).$$

Diese Ebene schneidet die Fläche in einer Kurve, die mit dem Namen „Dupinsche Indikatrix" bezeichnet wird. Diese Kurve ist in unserer Zeichnung zu zwei Punkten S, Q verkürzt; speziell wollen wir die relativen Koordinaten des Punktes Q durch ξ_0, η_0, ζ_0, seine absoluten also durch $x_0+\xi_0$, $y_0+\eta_0$, $z_0+\zeta_0$ bezeichnen.

Da dieser Punkt auf der durch (154) dargestellten Ebene liegt, so muß durch Einsetzen der absoluten Koordinaten desselben an Stelle von

$\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ diese Gleichung befriedigt werden. Man gewinnt daher die Relation aus (154):

$$(155)\qquad \zeta_0 - \delta = \frac{\partial \zeta}{\partial x} \xi_0 + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \eta_0 .$$

Den Bogen PQ bezeichnen wir durch σ und errichten in Q ebenfalls die Normale N_2. Der Schnittpunkt der beiden Normalen N_1 und N_2 ist

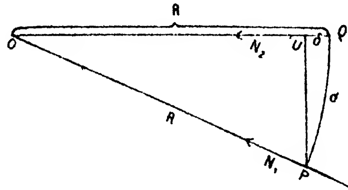


Fig. 192.

der Mittelpunkt O des Krümmungskreises, dessen Radius R sei (Fig. 192). Dann ist nach Fig. 192:

$$\sigma^2 = \delta^2 + \overline{UP}^2 ,$$

und ferner

$$(R - \delta)^2 + \overline{UP}^2 = R^2 ;$$

also folgt schließlich:

$$(156)\qquad R = \frac{\sigma^2}{2\delta} .$$

Wir wollen nun die Größen σ und δ ausdrücken, um so den Wert für R zu erhalten. Es ist offenbar

$$\sigma^2 = \xi_0^2 + \eta_0^2 + \zeta_0^2 ,$$

und wenn wir für ζ_0 den Wert aus (152) (die ja auch natürlich für die Werte $\xi = \xi_0$, $\eta = \eta_0$, $\zeta = \zeta_0$ gilt) einsetzen und hinter den quadratischen Gliedern abbrechen:

$$(157)\qquad \sigma^2 = \xi_0^2 \left\{1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2\right\} + \eta_0^2 \left\{1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2\right\} + 2\,\xi_0\,\eta_0 \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x}\,\frac{\partial \zeta}{\partial y} ;$$

für schwach gekrümmte Flächen können wieder die Quadrate von $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$ und $\frac{\partial \zeta}{\partial y}$, sowie Produkte dieser Größen vernachlässigt werden; dafür wird also einfach:

$$(158)\qquad \sigma^2 = \xi_0^2 + \eta_0^2 .$$

Für δ erhalten wir aus (155) die Gleichung:

$$\delta = \zeta_0 - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \xi_0 - \frac{\partial \zeta}{\partial y} \eta_0 ,$$

oder nach (152):

$$(159) \qquad 2\,\delta = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\,\xi_0^{\,2} + 2\,\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x\,\partial y}\,\xi_0\,\eta_0 + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\,\eta_0^{\,2}.$$

Demnach folgt unter Benutzung von (156) für die Krümmung des Normal schnittes im Punkte P:

$$(160) \qquad \frac{1}{R} = \frac{\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\,\xi_0^{\,2} + 2\,\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x\,\partial y}\,\xi_0\,\eta_0 + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\,\eta_0^{\,2}}{\xi_0^{\,2} + \eta_0^{\,2}}.$$

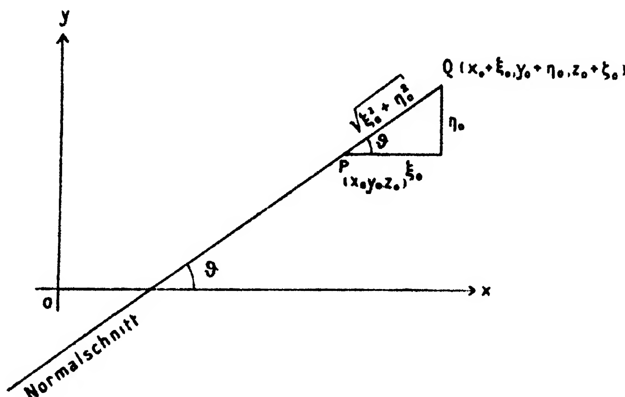


Fig. 193.

Wir wollen nun den Winkel, den der Normalschnitt mit der x-Achse bildet, durch ϑ bezeichnen (Fig. 193).

Dann ist offenbar

$$(161) \qquad \left\{ \begin{aligned} \cos\vartheta &= \frac{\xi_0}{\sqrt{\xi_0^{\,2} + \eta_0^{\,2}}}, \\ \sin\vartheta &= \frac{\xi_0}{\sqrt{\xi_0^{\,2} + \eta_0^{\,2}}}. \end{aligned} \right.$$

Demgemäß erhalten wir für die Krümmung des Normalschnittes, der mit der x-Achse den Winkel ϑ bildet:

$$(162) \qquad \frac{1}{R_\vartheta} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\cos^2\vartheta + 2\,\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x\,\partial y}\cos\vartheta\sin\vartheta + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\sin^2\vartheta.$$

Wir wollen nun einen zweiten Normalschnitt durch den Punkt P betrachten, der mit der x-Achse den Winkel $\left(\vartheta + \frac{\pi}{2}\right)$ bildet, also senkrecht auf dem ersten Normalschnitt steht. Dann ist nach (162):

$$(163) \qquad \frac{1}{R_{\vartheta + \frac{\pi}{2}}} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\sin^2\vartheta - 2\,\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x\,\partial y}\cos\vartheta\sin\vartheta + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\cos^2\vartheta,$$

und durch Addition der beiden letzten Gleichungen folgt der wichtige Satz:

(164) $$\frac{1}{R_\vartheta} + \frac{1}{R_{\vartheta + \frac{\pi}{2}}} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2};$$

in Worten ausgedrückt: Die Summe der Krümmungen zweier zueinander senkrechter Normalschnitte ist konstant.

Wir fragen jetzt nach den Normalschnitten, in denen die Krümmung einen Extremwert (Maximum oder Minimum) erreicht. Zu dem Zwecke formen wir (162) etwas um; es ist

$$\frac{1}{R_\vartheta} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}(1 + \cos 2\vartheta) + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y}\sin 2\vartheta + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}(1 - \cos 2\vartheta),$$

oder

$$\frac{1}{R_\vartheta} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right\} + \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right\}\cos 2\vartheta + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y}\sin 2\vartheta.$$

Setzt man zur Abkürzung, was immer möglich ist:

(165) $$\left\{\begin{aligned} \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right\} &= D\cos\alpha, \\ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} &= D\sin\alpha, \end{aligned}\right.$$

woraus

(166) $$\left\{\begin{aligned} D &= +\sqrt{\frac{1}{4}\left\{\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right\}^2 + \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y}\right)^2}; \\ \operatorname{tang}\alpha &= \frac{2\dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y}}{\dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}}, \end{aligned}\right.$$

so folgt für die Krümmung:

(167) $$\frac{1}{R} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right\} + D\cos(2\vartheta - \alpha).$$

Die rechte Seite erreicht, da $D > 0$, ein Maximum für $2\vartheta - \alpha = 0$, ein Minimum für $2\vartheta - \alpha = \pi$; die diesen Richtungen des Normalschnittes entsprechenden Werte der Krümmungsradien, die sogenannten Hauptkrümmungsradien seien R_1 und R_2. Dann ist:

$$\text{für } \frac{1}{R_1}: \quad \vartheta_1 = \frac{\alpha}{2};$$

$$\text{für } \frac{1}{R_2}: \quad \vartheta_2 = \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2};$$

d. h. die beiden Hauptkrümmungsradien gehören zwei zueinander senkrechten Normalschnitten an; also ist nach (164):

(168) $$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}.$$

Für die Hauptkrümmungen selbst erhält man:

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right\} + D,$$

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right\} - D,$$

und demzufolge für den Ausdruck $\frac{1}{R_1 R_2}$, die sogenannte „Krümmung der Fläche" im Punkte P:

(169) $$\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y}\right)^2.$$

159. Die zweidimensionalen Greenschen Sätze.

Es sei $\frac{\partial F}{\partial x}$ eine eindeutige und stetige Funktion von x und y innerhalb eines ebenen Gebietes S (Fig. 194).

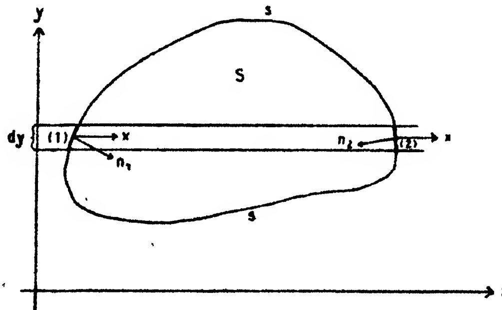


Fig. 194.

Es soll gebildet werden ein über das Gebiet S erstrecktes Integral:

(170) $$\int \frac{\partial F}{\partial x} dS = \iint \frac{\partial F}{\partial x} dx\, dy.$$

In der letzten Form geschrieben, läßt sich eine der Integrationen ausführen, nämlich diejenigen nach x. Man erhält also:

$$\iint \frac{\partial F}{\partial x} dx\, dy = \int dy \cdot \int \frac{\partial F}{\partial x} dx = \int \left\{F_2\, dy_2 - F_1\, dy_1\right\}.$$

Dabei ist F_2 der Wert von F an der Berandung von S, und zwar an der Austrittsstelle (2) des Streifens von der Breite dy; F_1 der entsprechende Wert an der Eintrittsstelle (1) (vgl. Fig. 194). Wir wollen nun die positive Normalenrichtung der Berandungskurve s nach innen annehmen; für die beiden Linienelemente 2 und 1 haben wir dann die in der Figur an-

gedeuteten Normalenrichtungen n_1 und n_2. Nun ist aber, wie aus der Figur unmittelbar ersichtlich:

$$dy_2 = -ds_2 \,.\, \cos(n_2 x)\,,$$
$$dy_1 = +ds_1 \,.\, \cos(n_1 x)\,.$$

Das Minuszeichen in der ersten Formel rührt davon her, daß $\cos(n_2 x)$ negativ ist, während dy_2 und ds_2 als Längenelemente positiv gerechnet werden. Unter Einführung dieser Werte in die vorhergehende Gleichung erhält man:

$$\iint \frac{\partial F}{\partial x}\, dx\, dy = -\int \left\{F_2 \cos(n_2 x)\, ds_2 + F_1 \cos(n_1 x)\, ds_1\right\},$$

oder einfacher geschrieben:

$$\iint \frac{\partial F}{\partial x}\, dS = -\int F \cos(n x)\, ds\,. \tag{171}$$

Dieser Satz ist offenbar das zweidimensionale Analogon zum sogenannten ersten Greenschen Satze, den wir im XI. Kapitel in Gleichung (5) auf pag. 501 formuliert haben.

Bezeichnet $\frac{\partial G}{\partial y}$ eine Funktion mit denselben Eigenschaften wie $\frac{\partial F}{\partial x}$, so ist ebenso:

$$\iint \frac{\partial G}{\partial y}\, d S = -\int G \cos(n y)\, ds\,, \tag{172}$$

wobei zu bemerken ist, daß offenbar $\cos(ny) = \sin(nx)$ ist. Durch Addition von (172) und (171) folgt weiter:

$$\iint \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}\right) d S = -\int \left\{F \cos(n x) + G \cos(n y)\right\} ds\,. \tag{173}$$

Es sei übrigens bemerkt, daß, wenn man die positive Normalenrichtung nach außen nimmt, was manchmal bequemer ist, in der letzten Gleichung auf der rechten Seite das Pluszeichen auftritt. Von diesem Satze wollen wir zwei Anwendungen machen.

Es sei zunächst etwa

$$F = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad G = \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Dann liefert (173) die Gleichung:

$$\int \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right) d S = -\int \left\{\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos(n x) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos(n y)\right\} ds\,,$$

oder wenn man für die Summe der zweiten Differentialquotienten die übliche Bezeichnung $\Delta \varphi$ einführt und beachtet, daß

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos(n x) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos(n y) = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \quad \text{ist:} \tag{174}$$

(175) $$\int \Delta \varphi \cdot dS = -\int \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds,$$

ein Satz, der offenbar das zweidimensionale Analogon zur Gleichung (9a) des XI. Kapitels auf pag. 503 darstellt (Gaussscher Satz).

Setzen wir zweitens an:

$$F = u \frac{\partial v}{\partial x}, \qquad G = u \frac{\partial v}{\partial y},$$

so folgt:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \frac{\partial G}{\partial y} = u \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Also liefert (173):

$$\int \left\{ u \Delta v + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right\} dS$$
$$= -\int u \left(\frac{\partial v}{\partial x} \cos(n x) + \frac{\partial v}{\partial y} \cos(n y) \right) ds,$$

oder unter Rücksicht auf (174):

(176) $$\int u \Delta v \, dS + \int \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right\} dS = -\int u \frac{\partial v}{\partial n} ds.$$

Vertauscht man jetzt die Bezeichnung der Funktionen u und v, so erhält man weiter:

(177) $$\int v \Delta u \, dS + \int \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right\} dS = -\int v \frac{\partial u}{\partial n} ds;$$

durch Subtraktion dieser beiden Gleichungen folgt endlich ein weiterer Greenscher Satz:

$$\int \left(u \Delta v - v \Delta u \right) dS = -\int \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds,$$

oder:

(178) $$\int u \Delta v \, dS = \int v \Delta u \, dS - \int \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds,$$

der das Analogon zum zweiten Greenschen Satze, Kapitel XI, Gleichung (13), pag. 503, darstellt. Wählt man die positive Normalenrichtung nach außen, so ändern sich in den Randintegralen nur die Vorzeichen.

160. Potentielle Energie einer schwach gebogenen Platte.

Das elastische Potential für einen isotropen Körper lautet:

$$f = \frac{\lambda}{2} (x_x + y_y + z_z)^2 + \mu \left\{ x_x^2 + y_y^2 + z_z^2 + \frac{1}{2} (x_y^2 + y_z^2 + z_x^2) \right\}.$$

Diese Form ist, wie im XI. Kapitel gezeigt wurde, invariant gegen Drehungen des Koordinatensystems. Man kann daher, wie aus Gleichung (89) des XI. Kapitels auf pag. 511 hervorgeht, auch schreiben:

(179) $$f = \frac{1}{2}\lambda(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 + \mu(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2),$$

wo $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ die drei Hauptdilatationen bedeuten.

Die Platte habe die kleine Dicke h, die Mittelfläche MM falle im undeformierten Zustande mit der x, y-Ebene zusammen. Die undeformierte Platte wird daher durch die Ebenen $z = \frac{h}{2}$ und $z = -\frac{h}{2}$ begrenzt (Fig. 195). Wird die Platte deformiert, wie es die Fig. 195 an-

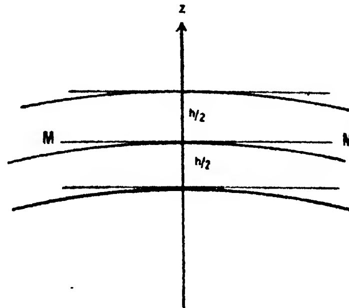


Fig. 195.

deutet, so nimmt man, im wesentlichen nach Kirchhoff, dem man die erste exakte Behandlung dieses Problems verdankt, an:

1. daß die Mittelfläche MM weder gedehnt noch komprimiert wird, sondern ihre ursprüngliche Ausdehnung beibehält;
2. daß alle Geraden, die vor der Deformation senkrecht zur Mittelfläche MM waren, auch nach der Deformation senkrecht auf der deformierten Mittelfläche stehen;
3. daß auf Ebenen, die parallel zur Mittelfläche MM sind, kein Normaldruck wirkt.

Zur Erklärung dieser Voraussetzungen diene folgendes: Die oberhalb der Mittelfläche liegenden, zu derselben parallelen Ebenen werden gedehnt, wie die Fig. 195 unmittelbar erkennen läßt, die unterhalb liegenden komprimiert. Die Mittelfläche selbst wird zwar deformiert, aber in ihrer Größe nicht verändert. Das sind dieselben Annahmen, die auch beim Stabe gemacht wurden; die Mittelfläche ist hier ebenfalls die „neutrale" Schicht.

Die zweite Voraussetzung sagt aus, daß die geraden Linien, welche vorher auf der Mittelfläche senkrecht waren, auch nach der Deformation noch Gerade sind und auf der Mittelfläche senkrecht stehen. Bedeuten also in Fig. 196a MM ein unendlich kleines Stück der undeformierten Mittelfläche, Oz eine Normale derselben, so gehen diese durch die Deformation in die Lage der Fig. 196b über, d. h. die Punkte, die vorher auf

Oz resp. MM lagen, liegen nachher auf $O'z'$ resp. $M'M'$. Das ist für das Folgende von außerordentlicher Bedeutung. Denn nehmen wir etwa in einem undeformierten elastischen Medium eine Ebene und eine auf ihr senkrechte Gerade an. Dann lehrt die im IX. Kapitel auseinandergesetzte Theorie der Deformation, daß die bei einer unendlich kleinen Deformation vor der Deformation auf dieser Ebene und Geraden liegenden Punkte auch nach der Deformation auf dieser Ebene und Geraden liegen[1]), aber im allgemeinen kann nach der Deformation die Gerade

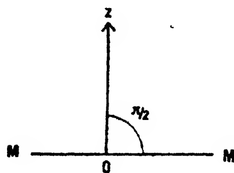


Fig. 196a.

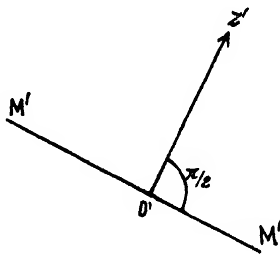


Fig. 196b.

nicht mehr senkrecht auf der Ebene stehen. Dies ist nach der allgemeinen Theorie der Deformation nur dann der Fall, wenn die Richtung der Geraden mit einer der drei Hauptdilatationsrichtungen zusammenfällt; die beiden anderen Hauptdilatationsrichtungen liegen dann in der Ebene selbst.

Die dritte Voraussetzung findet sich nicht bei Kirchhoff. Sie ist in der Tat, streng genommen, überflüssig, da sie aus den beiden anderen ableitbar ist, doch vereinfacht die ausdrückliche Aufnahme dieser Bedingung unter die Voraussetzungen die Rechnung außerordentlich.

Dies ist zuerst von Love geschehen, dem wir uns in diesem Punkte angeschlossen haben. Analytisch formuliert würde die dritte Voraussetzung bei uns lauten, da die Mittelfläche mit der xy-Ebene zusammenfällt: $Z_z = 0$.

Wir gehen jetzt zur Berechnung des elastischen Potentials über. Ist der Abstand eines Punktes von der Mittelfläche vor der Deformation z, nach derselben z', so ist die Differenz $z' - z = \zeta$ die Verrückung desselben parallel der z-Richtung (oder auch der z'-Richtung, die wegen der schwachen Krümmung annähernd einander parallel sind). Die Dilatation parallel der z-Achse ist also

$$z_z = \frac{\partial \zeta}{\partial z},$$

[1]) Dies ist natürlich kein Widerspruch damit, daß die Platte gekrümmt wird, denn der obige Satz gilt im allgemeinen nur für unendlich kleine Bereiche; diese sind aber natürlich auch bei der Platte als eben zu betrachten.

und dieser Wert ist nach der zweiten Voraussetzung gleichzeitig eine **Hauptdilatation**, die wir σ_3 nennen wollen. Das liefert uns die Beziehung:

(180) $$z_z = \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \sigma_3 .$$

Nun gilt allgemein die Gleichung, die wir schon früher bewiesen und benützt haben [z. B. Kap. XI, Gleichung (39) auf pag. 511],

(181) $$x_x + y_y + z_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 ,$$

und die Subtraktion der Gleichung (180) von (181) liefert hier das im allgemeinen nicht geltende Resultat:

(182) $$x_x + y_y = \sigma_1 + \sigma_2 .$$

Nun legen wir durch die Normale z' (die mit der Normalenrichtung z bis auf Größe zweiter Ordnung zusammenfällt) einen Normalschnitt durch die Platte, wie in Fig. 197 dargestellt ist.

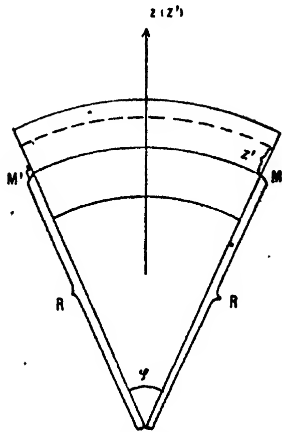


Fig. 197.

$M'M'$ ist ein der Mittelfläche angehörendes unendlich kleines Kurvenstück, das nach der ersten Voraussetzung seine ursprüngliche Länge ds ungeändert beibehält. Der Krümmungsradius des unendlich kleinen Kurvenstückes $M'M'$ sei R, die Neigung der Enden $d\varphi$. Dann ist zunächst:

$$ds = R \cdot d\varphi .$$

Wir fassen nun ein Kurvenstück (in der Figur punktiert) ins Auge, das nach der Deformation durch den Punkt z' geht. Auch dieses Kurvenstück hatte vor der Deformation die Länge ds; nach derselben ist es gedehnt. Und zwar sei die neue Länge ds_1. Diese kann man einfach berechnen, da offenbar der Krümmungsradius für diese Kurve $(R + z')$ ist. Also ist:

(183) $$ds_1 = (R + z')\, d\varphi .$$

Die Verlängerung ist also:

(184) $$ds_1 - ds = z'\, d\varphi ;$$

demnach die Dilatation in Richtung der Kurve:

$$\frac{ds_1 - ds}{ds} = \frac{z'\, d\varphi}{ds} = \frac{z'}{R} .$$

Da aber z' nur unendlich wenig vom Werte z verschieden ist, kann dafür auch gesetzt werden:

$$(185)\qquad \frac{ds_1 - ds}{ds} = \frac{z}{R}.$$

Diese Gleichung gilt für jeden Normalschnitt. Drehen wir denselben um die Normale als Achse, so nimmt die Dilatation immer andere und andere Werte an, je nach der Größe des jeweiligen Krümmungsradius R. Die Hauptdilatationen finden in zwei zueinander senkrechten Normalschnitten statt, denen der größte resp. kleinste Krümmungsradius zukommt; also in unserer früheren Bezeichnung haben wir:

$$(186)\qquad \begin{cases} \sigma_1 = \dfrac{z}{R_1}, \\ \sigma_2 = \dfrac{z}{R_2}, \end{cases}$$

und daraus folgt durch Addition unter Berücksichtigung von (182):

$$(187)\qquad \sigma_1 + \sigma_2 = x_x + y_y = z\left\{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right\}.$$

Wir erhalten demgemäß nach (179) für das elastische Potential:

$$(188)\qquad f = \frac{\lambda}{2}\left\{z_z + z\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\right\}^2 + \mu\left\{z_z^2 + \frac{z^2}{R_1^2} + \frac{z^2}{R^2}\right\}.$$

Jetzt tritt nun die Bedeutung der dritten Voraussetzung zutage, der zufolge $Z_z = 0$ sein soll. Damit ist nämlich folgende Relation gegeben [Gleichung (43) des XI. Kapitels auf pag. 512]:

$$(189)\qquad Z_z = 0 = -\lambda(x_x + y_y + z_z) - 2\mu z_z,$$

und daraus ergibt sich für das noch unbekannte z_z der Wert:

$$z_z = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}(x_x + y_y),$$

oder nach (187):

$$(190)\qquad z_z = -\frac{\lambda z}{\lambda + 2\mu}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

Setzt man diesen Wert für z_z in das elastische Potential (188) ein und benutzt die bekannten Relationen [Gleichung (45) des XI. Kapitels auf pag. 513]:

$$\frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} = E, \text{ (Elastizitätsmodul)}$$

$$\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} = \sigma, \text{ (Querkontraktionskoeffizient)}$$

so erhält man nach etwas langwierigen, aber elementaren Rechnungen:

$$(191)\qquad f = \frac{1}{2} z^2 \frac{E}{1 - \sigma^2}\left\{\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R^2} + \frac{2\sigma}{R_1 R_2}\right\}$$

oder auch, was für die fernere Rechnung bequemer ist:

$$(192)\qquad f = \frac{1}{2}\frac{z^2 E}{1 - \sigma^2}\left\{\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)^2 - \frac{2(1-\sigma)}{R_1 R_2}\right\}$$

Bezeichnet man mit dS ein Flächenelement der Platte, so ist $d\tau = dS\,.\,dz$ und das über das Volumen der Platte erstreckte Integral $\int f d\tau$ ist der Wert der potentiellen Energie Φ. Wir erhalten also:

$$(193)\quad \Phi = \int f\,dS\,dz = \frac{h^3 E}{24(1-\sigma^2)} \int \left\{ \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^2 - \frac{2(1-\sigma)}{R_1 R_2} \right\} dS.$$

Setzt man nun noch nach (168) und (169) für $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ und $\frac{1}{R_1 R_2}$ die Werte ein, so folgt endlich:

$$(194)\ \Phi = \frac{h^3 E}{24(1-\sigma^2)} \int \left[\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\sigma) \left\{ \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \right] dS.$$

161. Differentialgleichung der Transversalschwingungen einer Platte.

Fügen wir zu (194) noch den Ausdruck für die lebendige Kraft hinzu, so haben wir alles, um mittels des Hamiltonschen Prinzips die Schwingungsgesetze zu finden. Wir haben, da die kinetische Energie der Masseneinheit $\frac{s}{2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)^2$ ist, für die lebendige Kraft der Platte:

$$(195)\qquad L = \frac{s h}{2} \int \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} \right)^2 dS.$$

Nach dem Hamiltonschen Prinzip muß sein:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L\,dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} \Phi\,dt.$$

Die Ausrechnung des ersten Ausdruckes ergibt in gewöhnlicher Weise:

$$(196)\qquad \delta \int_{t_0}^{t_1} L\,dt = -\,s h \int_{t_0}^{t_1} dt \int \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \delta \zeta \cdot dS.$$

Die Variation des zweiten Ausdruckes wollen wir in zwei Teilen ausführen. Wir setzen:

$$\Phi_1 = \frac{h^3 E}{24(1-\sigma^2)} \int \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right)^2 dS = A \int (\Delta \zeta)^2 dS,$$

$$\Phi_2 = -\frac{2h^3 E(1-\sigma)}{24(1-\sigma^2)} \int \left\{ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dS = B \int \{\quad\} dS,$$

wo A und B leicht erkennbare Abkürzungen sind. Dann untersuchen wir zunächst:

$$\delta \int \Phi_1\,dt = A \int dt \cdot \delta \int (\Delta \zeta)^2 dS.$$

Die Variationen werden alle unter dem Integralzeichen $\int_{t_0}^{t_1} dt$ ausgeführt, so daß wir dieses der Einfachheit halber bis zum Schlusse fortlassen können. Es handelt sich daher einfach um die Bestimmung von $\delta\Phi_1$. Das liefert der Reihe nach

$$2A\int dS\left\{\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right\}\delta\left\{\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right\}=2A\int dS\,\Delta\zeta\cdot\Delta(\delta\zeta).$$

Setzen wir einen Moment zur Abkürzung:

$$\Delta\zeta=u,\qquad \delta\zeta=v,$$

so läßt sich auf das letzte Flächenintegral der Greensche Satz (178) anwenden und es folgt:

$$\int\Delta\zeta\cdot\Delta(\delta\zeta)\,dS=\int\Delta^4\zeta\cdot\delta\zeta\cdot dS+\int\left(\Delta\zeta\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial n}-\delta\zeta\frac{\partial\,\Delta\zeta}{\partial n}\right)ds.$$

Dabei haben wir, was hier einfacher ist, die positive Normalenrichtung, umgekehrt wie in (178), nach außen genommen. Diese Festsetzung wollen wir in dieser Nummer beibehalten. Also ist:

$$(197)\qquad \delta\Phi_1=2A\int\Delta^4\zeta\cdot\delta\zeta\cdot dS+2A\int\Delta\zeta\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial n}ds-2A\int\frac{\partial\,\Delta\zeta}{\partial n}\delta\zeta\cdot ds.$$

Ausführlich geschrieben ist dabei:

$$(198)\qquad \begin{cases}\Delta^4\zeta=\Delta(\Delta\zeta)=\Delta\,\Delta\zeta\\ =\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}(\Delta\zeta)=\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}(\Delta\zeta)=\dfrac{\partial^4\zeta}{\partial x^4}+2\dfrac{\partial^4\zeta}{\partial x^2\partial y^2}+\dfrac{\partial^4\zeta}{\partial y^4}.\end{cases}$$

Es bleibt noch zu untersuchen $\delta\Phi_2$; dafür erhält man zunächst:

$$\delta\Phi_2=B\int\left\{\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\,\delta\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\,\delta\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y}\,\delta\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y}\right)\right\}dS.$$

Den Klammerausdruck kann man zunächst folgendermaßen schreiben, was man durch Ausrechnen leicht verifizieren kann:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial y}\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}-\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial x}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y}\right\}+\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial x}\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}-\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial y}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y}\right\}.$$

Bezeichnen wir den ersten Klammerausdruck durch G, den zweiten durch F, so haben wir das Integral zu bilden:

$$\int\left(\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}\right)dS,$$

und das ist nach dem Greenschen Satze (178), wenn wieder die positive Normale nach außen genommen wird,

$$= + \int \left\{ F \cos(n\,x) + G \cos(n\,y) \right\} d\,s.$$

Das liefert:

$$\delta \Phi_2 = B \int \left\{ \frac{\partial\,\delta\,\zeta}{\partial\,x}\,\frac{\partial^2 \zeta}{\partial\,y^2} - \frac{\partial\,\delta\,\zeta}{\partial\,y}\,\frac{\partial^2 \zeta}{\partial\,x\,\partial\,y} \right\} \cos(n\,x)\,d\,s$$

$$+ B \int \left\{ \frac{\partial\,\delta\,\zeta}{\partial\,y}\,\frac{\partial^2 \zeta}{\partial\,y^2} - \frac{\partial\,\delta\,\zeta}{\partial\,x}\,\frac{\partial^2 \zeta}{\partial\,x\,\partial\,y} \right\} \cos(n\,y)\,d\,s,$$

oder auch, wenn wir den Winkel $(n\,x) = \vartheta$ setzen:

$$\delta \Phi_2 = B \int \left\{ \quad \right\} \cos \vartheta\; d\,s + B \int \left\{ \quad \right\} \sin \vartheta \cdot d\,s.$$

Wir haben dann folgende Situation (Fig. 198): $\mathfrak{C}$ ist ein Stück der Berandung s der Platte, n und s sind die positiven Richtungen von Normale und Randkurve in einem Punkte P, ϑ der Winkel zwischen n und x.

Man erkennt daraus, daß man n und s an jedem Punkte als ein neues orthogonales Koordinatensystem betrachten kann, welches gegen dasjenige der x und y um den Winkel ϑ gedreht ist. Dafür gelten bekanntlich die Transformationsgleichungen (von der Translation des Anfangspunktes sehen wir als unwesentlich ab):

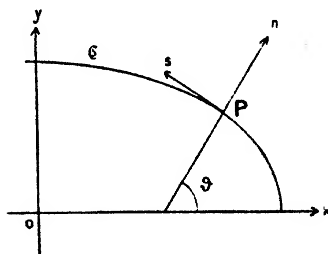


Fig. 198.

$$(199)\quad \begin{cases} x = \quad n \cdot \cos \vartheta - s \cdot \sin \vartheta\,, \\ y = \quad n \cdot \sin \vartheta + s \cdot \cos \vartheta\,, \\ \qquad\qquad \text{resp.} \\ n = \quad x \cdot \cos \vartheta + y \cdot \sin \vartheta\,, \\ s = -x \cdot \sin \vartheta + y \cdot \cos \vartheta\,. \end{cases}$$

Wir wollen nun Größen von der Form $\frac{\partial\,\varphi}{\partial\,x}$ und $\frac{\partial\,\varphi}{\partial\,y}$ durch $\frac{\partial\,\varphi}{\partial\,n}$ und $\frac{\partial\,\varphi}{\partial\,s}$ ausdrücken. Dazu liefern die Formeln (199) folgendes:

$$(200)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\,\varphi}{\partial\,x} = \dfrac{\partial\,\varphi}{\partial\,n}\,\dfrac{\partial\,n}{\partial\,x} + \dfrac{\partial\,\varphi}{\partial\,s}\,\dfrac{\partial\,s}{\partial\,x} = \dfrac{\partial\,\varphi}{\partial\,n} \cos \vartheta - \dfrac{\partial\,\varphi}{\partial\,s} \sin \vartheta\,, \\[2ex] \dfrac{\partial\,\varphi}{\partial\,y} = \dfrac{\partial\,\varphi}{\partial\,n}\,\dfrac{\partial\,n}{\partial\,y} + \dfrac{\partial\,\varphi}{\partial\,s}\,\dfrac{\partial\,s}{\partial\,y} = \dfrac{\partial\,\varphi}{\partial\,n} \sin \vartheta + \dfrac{\partial\,\varphi}{\partial\,s} \cos \vartheta\,; \end{cases}$$

also wird in der Gleichung für $\delta \Phi_2$:

$$(201)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\,\delta\,\zeta}{\partial\,x} = \dfrac{\partial\,\delta\,\zeta}{\partial\,n} \cos \vartheta - \dfrac{\partial\,\delta\,\zeta}{\partial\,s} \sin \vartheta\,, \\[2ex] \dfrac{\partial\,\delta\,\zeta}{\partial\,y} = \dfrac{\partial\,\delta\,\zeta}{\partial\,n} \sin \vartheta + \dfrac{\partial\,\delta\,\zeta}{\partial\,s} \cos \vartheta\,. \end{cases}$$

Damit erhält man:

$$(202)\quad \begin{cases} \delta\Phi_2 = B\int ds\cdot\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial n}\left\{\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\sin^2\vartheta + \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\cos^2\vartheta - 2\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}\sin\vartheta\cos\vartheta\right\} \\ \qquad + B\int ds\cdot\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial s}\left\{\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right)\cos\vartheta\sin\vartheta + \frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}(\sin^2\vartheta - \cos^2\vartheta)\right\}. \end{cases}$$

Bezeichnen wir im letzten Integral die geschweifte Klammer einen Augenblick mit $f(xy)$, so lautet das letzte Integral, abgesehen vom Vorzeichen:

$$\int f(x\,y)\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial s}\,ds.$$

Es ist zu erstrecken über die ganze Randkurve der Platte. Diese Form legt es nahe, eine partielle Integration auszuführen, die das Resultat liefert:

$$\int f(x\,y)\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial s}\,ds = \overline{f(x\,y)\,\delta\zeta} - \int\delta\zeta\cdot\frac{\partial f(x\,y)}{\partial s}\,ds.$$

Da das Integral über die geschlossene Randkurve sich erstreckt, d. h. von einem Punkte A derselben wieder zurück bis zum Punkte A, so ist das aus dem Integralzeichen herausgetretene Glied zu bilden für die obere und untere Grenze A. Da es sich um eindeutige Funktionen handelt, ist das Glied $=0$. Man erhält also, wenn wir dies sofort auf Gleichung (202) anwenden, endgültig:

$$(203)\quad \begin{cases} \delta\Phi_2 = B\int ds\cdot\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial n}\left\{\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\sin^2\vartheta + \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\cos^2\vartheta \right.\\ \qquad\qquad\left. - 2\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}\sin\vartheta\cos\vartheta\right\} \\ \qquad - B\int ds\cdot\delta\zeta\cdot\frac{\partial}{\partial s}\left\{\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right)\sin\vartheta\cos\vartheta \right.\\ \qquad\qquad\left. + \frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}\sin^2\vartheta - \cos^2\vartheta\right\}; \end{cases}$$

also erhält man schließlich aus (197) und (203) für den gesuchten Wert $\delta\Phi$:

$$(204)\quad \begin{cases} \delta\Phi = 2A\int\Delta^4\zeta\cdot\delta\zeta\cdot dS + 2A\int\left(\Delta\zeta\cdot\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial n} - \delta\zeta\cdot\frac{\partial\,\Delta\zeta}{\partial n}\right)ds \\ \qquad + B\int\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial u}\cdot\left\{\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\sin^2\vartheta + \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\cos^2\vartheta \right.\\ \qquad\qquad\left. - 2\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}\sin\vartheta\cdot\cos\vartheta\right\}ds \\ \qquad - B\int\delta\zeta\cdot\frac{\partial}{\partial s}\left\{\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right)\cos\vartheta\sin\vartheta \right.\\ \qquad\qquad\left. + \frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}(\sin^2\vartheta - \cos^2\vartheta)\right\}ds. \end{cases}$$

Setzt man diese Ausdrücke nebst dem der kinetischen Energie (196) in die Gleichung des Hamiltonschen Prinzips ein, so erhält man in geeigneter Anordnung folgendes Resultat:

$$
(205)\quad \left\{\begin{aligned}
0 = &\int_{t_0}^{t_1} dt \int \left(\varepsilon h \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + 2 A \Delta^4 \zeta\right) \delta\zeta \cdot dS \\
&+ \int_{t_0}^{t_1} dt \int \Big[2 A \Delta \zeta + B \Big\{ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \sin^2 \vartheta + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \cos^2 \vartheta \\
&\qquad - 2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \sin \vartheta \cos \vartheta \Big\} \Big] \cdot \frac{\partial\, \delta\zeta}{\partial n} \cdot ds \\
&- \int_{t_0}^{t_1} dt \int \Big[2 A \frac{\partial \Delta \zeta}{\partial n} + B \frac{\partial}{\partial s} \Big\{ \Big(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \Big) \sin \vartheta \cos \vartheta \\
&\qquad + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} (\sin^2 \vartheta - \cos^2 \vartheta) \Big\} \Big] \cdot \overline{\delta\zeta} \cdot ds.
\end{aligned}\right.
$$

In dem letzten (Rand-)Integral ist $\delta\zeta$ mit einem Strich $(\overline{\delta\zeta})$ versehen worden, um hervorzuheben, daß es ein anderer Wert ist, als in dem ersten (Flächen-)Integral. Im Flächenintegral bedeutet $\delta\zeta$ die Variation eines beliebigen Punktes der Fläche, im Randintegral bezieht es sich, wie alle unter dem Integralzeichen stehenden Größen auf den Rand.

Da nun $\delta\zeta$ ganz beliebig ist, so müssen zunächst das erste Integral und die Summe der beiden letzten für sich verschwinden. Das liefert erstens für jeden Punkt der Platte die gewünschte Differentialgleichung, wenn man für A den Wert einsetzt:

$$
(206)\quad \varepsilon \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \frac{h^3 E}{12(1-\sigma^2)} \left(\frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \zeta}{\partial y^4} \right) = 0 .
$$

Von nun an muß die Betrachtung geteilt werden je nach der Anordnung, die am Rande gelten soll:

1. **Ist der Rand ganz frei**, so sind $\overline{\delta\zeta}$ und $\frac{\partial\, \delta\zeta}{\partial n}$ (das sich natürlich auch auf den Rand bezieht) ganz willkürlich. Die Summe der beiden Integrale kann also nur so verschwinden, daß die Integrale einzeln verschwinden. Das liefert die folgenden Randbedingungen für eine freie Platte:

$$
\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} - (1-\sigma) \left\{ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \sin^2 \vartheta + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \cos^2 \vartheta - 2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \sin \vartheta \cos \vartheta \right\} = 0,
$$

$$
\frac{\partial \Delta \zeta}{\partial n} - (1-\sigma) \frac{\partial}{\partial s} \cdot \left\{ \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \cos \vartheta \cdot \sin \vartheta + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} (\sin^2 \vartheta - \cos^2 \vartheta) \right\} = 0.
$$

Eine leichte Umformung liefert daraus die Randbedingungen in der ihnen von **Kirchhoff** gegebenen Form:

$$
(207)\quad \left\{\begin{aligned}
&\sigma \Delta \zeta + (1-\sigma) \Big\{ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \sin^2 \vartheta + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \cos^2 \vartheta \\
&\qquad + 2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \sin \vartheta \cos \vartheta \Big\} = 0, \\
&\frac{\partial \Delta \zeta}{\partial n} + (1-\sigma) \frac{\partial}{\partial s} \cdot \Big\{ \Big(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \Big) \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta \\
&\qquad + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} (\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta) \Big\} = 0.
\end{aligned}\right.
$$

Man sieht, daß für ein freies Ende die Randbedingungen sehr kompliziert sind, und darin ist es auch begründet, daß dieses Problem nur für den Fall einer Kreisscheibe hat gelöst werden können (Kirchhoff 1850). Sehr viel einfacher werden die Verhältnisse, wenn die Platte am Rande festgeklemmt oder gehalten ist.

2. Im Falle der festgeklemmten Platte sind offenbar — analog wie beim Stabe — am Rande ζ (resp. $\overline{\delta\zeta}$) und $\frac{\partial \zeta}{\partial n}$ $\left(\text{resp. } \frac{\partial \delta \zeta}{\partial n}\right) = 0$, da nicht nur keine Verrückung stattfinden kann, sondern auch die Teile des Randes in ihrer ursprünglichen Richtung festgehalten werden. Für eine am Rande festgeklemmte Platte lauten demgemäß die Randbedingungen einfach:

$$(208) \qquad \left\{ \begin{aligned} \zeta &= 0, \\ \frac{\partial \zeta}{\partial n} &= 0. \end{aligned} \right.$$

3. Falls die Platte „gehalten" wird, ist $\zeta = 0$, aber die Richtung ist frei, d. h. $\frac{\partial \zeta}{\partial n}$ kann beliebig sein. Daher muß in Gleichung (205) der Faktor von $\frac{\partial \delta \zeta}{\partial n}$ verschwinden, so daß man für die „gehaltene" Platte folgende Bedingungen erhält:

$$\zeta = 0$$

$$(209) \quad \sigma \Delta \zeta + (1 - \sigma) \left\{ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \sin^2 \vartheta + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \cos^2 \vartheta + 2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \sin \vartheta \cos \vartheta \right\} = 0.$$

Von den hier auftretenden Problemen sind diejenigen mit völlig eingeklemmtem oder völlig gehaltenem Rande aus dem Grunde ziemlich uninteressant, weil bei dieser Art der Befestigung eine dauernde Erregung von Schwingungen unmöglich ist. Die Probleme mit ganz oder teilweise freiem Rande aber sind wegen der Kompliziertheit der Grenzbedingungen äußerst schwierig. Hat sich doch bisher nur der Fall einer kreisförmigen Scheibe mit freiem Rande exakt behandeln lassen und zwar ist der axialsymmetrische Fall von Poisson (1828) und der allgemeine Fall der Kreisscheibe von Kirchhoff (1850) erledigt worden. Außerdem hat Voigt (1893) bemerkt, daß der Fall einer rechteckigen Platte, von der zwei gegenüberliegende Kanten gehalten, die beiden anderen frei sind, sich mit elementaren Mitteln behandeln läßt. Wir beschränken uns hier auf die Untersuchung des Poissonschen Falles der Kreisscheibe, wobei um das Zentrum derselben völlige Symmetrie herrscht. Wegen des allgemeinen Falles sei auf Kirchhoffs Abhandlungen verwiesen.

162. Kreisscheibe mit freiem Rande bei axialer Symmetrie.

Wir wollen nun den Anfangspunkt des Koordinatensystems in das Zentrum der Scheibe legen und, was nahe liegt, Polarkoordinaten (r, ϑ) einführen. Dann ist:

$$x = r\cos\vartheta,$$
$$y = r\sin\vartheta.$$

Da axiale Symmetrie herrschen soll, so dürfen alle vorkommenden Größen nur von r, nicht dagegen von ϑ abhängen. Unter dieser Voraussetzung haben wir jetzt den Differentialausdruck:

$$\frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \zeta}{\partial y^4}$$

zu transformieren. Derselbe kann geschrieben werden $\Delta(\Delta\zeta)$ und man erkennt daraus, daß man lediglich zweimal den Ausdruck $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}$ zu bilden hat. Man erhält der Reihe nach:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\partial \zeta}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial \zeta}{\partial r}\frac{x}{r},$$

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2}\frac{x^2}{r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \zeta}{\partial r}\left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right);$$

ebenso:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2}\frac{y^2}{r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \zeta}{\partial r}\left(1 - \frac{y^2}{r^2}\right);$$

also folgt:

(210)
$$\Delta\zeta = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \zeta}{\partial r}.$$

Bezeichnen wir diesen Ausdruck für einen Moment durch ψ, so ist nun zu bilden $\Delta\psi$. Man hat dafür:

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \zeta}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \zeta}{\partial r}\right);$$

die weitere Ausrechnung ist nicht erforderlich. Die Differentialgleichung (206) wird also:

(211)
$$\varepsilon\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \frac{h^2 E}{12(1-\sigma^2)}\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \zeta}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \zeta}{\partial r}\right)\right] = 0.$$

Ferner hat man die Randbedingungen (207) zu bilden, die gelten, wenn $r = R$, dem Radius der Scheibe, ist. Da ist zunächst:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\sin^2\vartheta = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2}\sin^4\vartheta + \frac{1}{r}\frac{\partial \zeta}{\partial r}\cos^2\vartheta\cdot\sin^2\vartheta;$$

ebenso:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\cos^2\vartheta = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2}\cos^4\vartheta + \frac{1}{r}\frac{\partial \zeta}{\partial r}\cos^2\vartheta\cdot\sin^2\vartheta;$$

und endlich:

$$2\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x\partial y}\sin\vartheta\cos\vartheta = 2\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2}\sin^2\vartheta\cos^2\vartheta - \frac{2}{r}\frac{\partial \zeta}{\partial r}\sin^2\vartheta\cos^2\vartheta.$$

Die Addition der drei letzten Gleichungen liefert:

(212)
$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\sin^2\vartheta + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\cos^2\vartheta + 2\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x\partial y}\sin\vartheta\cos\vartheta = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2}.$$

also folgt für die erste der Randbedingungen (207):

$$\sigma\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial \zeta}{\partial r}\right)+(1-\sigma)\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2}=0,$$

oder einfacher:

(213) $$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2}+\frac{\sigma}{r}\frac{\partial \zeta}{\partial r}=0.$$

Ebenso folgt:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\cos\vartheta\sin\vartheta=\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2}\sin^3\vartheta\cos\vartheta+\frac{1}{r}\frac{\partial \zeta}{\partial r}\cos^3\vartheta\cdot\sin\vartheta;$$

ebenso:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\cos\vartheta\sin\vartheta=\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2}\cos^3\vartheta\sin\vartheta+\frac{1}{r}\frac{\partial \zeta}{\partial r}\sin^3\vartheta\cdot\cos\vartheta;$$

also:

$$\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\right)\cos\vartheta\sin\vartheta=\sin\vartheta\cos\vartheta\{\sin^2\vartheta-\cos^2\vartheta\}\left\{\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial \zeta}{\partial r}\right\}.$$

Endlich hat man:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x\,\partial y}(\cos^2\vartheta-\sin^2\vartheta)=-\sin\vartheta\cos\vartheta\{\sin^2\vartheta-\cos^2\vartheta\}\left\{\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial \zeta}{\partial r}\right\}.$$

Also durch Addition der beiden letzten Gleichungen:

(214) $$\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\right)\cos\vartheta\sin\vartheta+2\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x\,\partial y}(\cos^2\vartheta-\sin^2\vartheta)=0.$$

Damit wird die zweite der Randbedingungen (207), da ja die Richtung von n, die positive Normalenrichtung, mit der Richtung des Radius r übereinstimmt:

(215) $$\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial \zeta}{\partial r}\right\}=0.$$

Wir haben Integrale der Gleichung (211) zu bilden, die für $r=R$ gleichzeitig den Bedingungen (213) und (215) genügen.

Zunächst setzen wir wie immer zur Integration an:

(216) $$\zeta=\psi(r)\cos nt \quad \text{oder} \quad \zeta=\psi(r)\sin nt.$$

Man erhält aus (211):

$$-\varepsilon n^2\psi(r)+\frac{h^2 E}{12(1-\sigma^2)}\Delta\Delta\psi=0,$$

oder wenn man zur Abkürzung

(217) $$\lambda=\frac{12\,\varepsilon n^2(1-\sigma^2)}{h^2 E}=s^4$$

setzt:

(219) $$\Delta\Delta\psi-s^4\psi=0.$$

Die Randbedingungen gehen über in:

(220) $$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2\psi}{dr^2}+\frac{\sigma}{r}\frac{d\psi}{dr}=0,\\&\frac{d}{dr}\left\{\frac{d^2\psi}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr}\right\}=0\end{aligned}\right\}\ \text{für } r=R.$$

Die möglichen Werte $s^4 = \lambda$, die Eigenwerte, sind aus diesen Gleichungen zu bestimmen. Man kann nun zunächst — das ist der von Poisson eingeschlagene Weg zur Integration von (219) — diese Gleichung symbolisch folgendermaßen schreiben, wovon man sich durch Ausrechnung leicht überzeugt:

(221 a) $$(\Delta - s^2)\,[(\Delta + s^2)\,\psi] = 0,$$

oder auch:

(221 b) $$(\Delta + s^2)\,[(\Delta - s^2)\,\psi] = 0.$$

Dabei bedeutet $(\Delta \mp s^2)\,\psi$ eine Abkürzung für $\Delta\psi \mp s^2\psi$. Man erkennt also folgendes: Gleichung (219) ist gemäß den Gleichungen (221) entweder dadurch zu befriedigen, daß man $(\Delta + s^2)\psi$ oder $(\Delta - s^2)\,\psi$ zu Null macht. Das liefert die beiden Gleichungen zweiter Ordnung:

(222) $$\begin{cases} \dfrac{d^2\psi_1}{dr^2} + \dfrac{1}{r^2}\,\dfrac{d\psi_1}{dr} + s^2\,\psi_1 = 0\,, \\[2ex] \dfrac{d^2\psi_1}{dr^2} + \dfrac{1}{r^2}\,\dfrac{d\psi_2}{dr} - s^2\,\psi_2 = 0\,. \end{cases}$$

Diese sind uns bereits bekannt: Sie traten auf bei der Behandlung der kreisförmigen Membran [vgl. Gleichung (207)—(208) des XIV. Kapitels auf pag. 644]: es ist die Besselsche Differentialgleichung. Man erkennt dies, wenn man sich in der ersten (sr), in der zweiten (sri) als unabhängige Variable eingeführt denkt. Die Integrale sind also, wie früher, die Besselschen Funktionen erster und zweiter Art, für die erste Gleichung vom Argument (sr), für die zweite vom Argument (sri). Also ist in der üblichen Bezeichnung der Besselschen Funktionen:

(223) $$\begin{cases} \psi_1 = A_1 J(sr) + B_1 Y(sr)\,, \\ \psi_2 = A_2 J(sri) + B_2 Y(sri)\,. \end{cases}$$

Dazu tritt noch die Bedingung hinzu, daß für $r = 0$, d. h. im Zentrum der Scheibe die Bewegung endlich sein muß. Da aber $Y(0)$ [vgl. die Definitionsgleichung (208) des XIV. Kapitels] wegen des Auftretens von Logarithmen unendlich groß wird, kann dies nur geschehen, indem $B_1 = B_2 = 0$ angenommen wird; also hat man spezieller:

(224) $$\psi_1 = A_1\,J(sr)\,; \quad \psi_2 = A_2\,J(isr)\,.$$

Fügt man die Funktionen ψ_1 und ψ_2 mit willkürlichen Konstanten zusammen, so erhält man die allgemeine Lösung der Gleichung (219):

(225) $$\psi = A\,J(sr) + B\,J(isr)\,.$$

Nun sind die Randbedingungen (220) zu befriedigen. Die erste derselben liefert:

$$\text{für } r = R:\ \frac{d^2}{dr^2}\Big\{A\,J(sr) + B\,J(isr)\Big\} + \frac{\sigma}{r}\,\frac{d}{dr}\Big\{A\,J(sr) + B\,J(isr)\Big\} = 0,$$

oder, wenn Differentiationen nach dem Argument durch Striche bezeichnet werden:

$$A s^2 J''(sR) - B s^2 J''(isR) + \frac{\sigma}{R}\{A s J'(sR) + B i s J'(isR)\} = 0,$$

oder endlich:

$$A\left\{J''(sR) + \frac{\sigma}{sR} J'(sR)\right\} - B\left\{J''(isR) + \frac{\sigma}{isR} J'(isR)\right\} = 0. \tag{226}$$

Die zweite Randbedingung (220) kann durch Beachtung der Differentialgleichung (222) sehr vereinfacht werden. Denn es ist:

$$\frac{d^2 J(sr)}{dr^2} + \frac{1}{r}\,\frac{dJ(sr)}{dr} = -s^2 J(sr),$$

$$\frac{d^2 J(isr)}{dr^2} + \frac{1}{r}\,\frac{dJ(isr)}{dr} = +s^2 J(isr).$$

Also ist:

$$\frac{d}{dr}(\Delta\psi) = -\frac{d}{dr}\left\{A J(sr) - B J(isr)\right\} s^2 = 0.$$

Mithin hat man die Randbedingung:

$$A J'(sR) - B i J'(isR) = 0. \tag{227}$$

Die beiden Gleichungen (226) und (227) sind in Bezug auf A und B linear und homogen; damit sie überhaupt zusammen bestehen können, muß die Determinante des Gleichgewichtssystems verschwinden:

$$\begin{vmatrix} J''(sR) + \frac{\sigma}{sR} J'(sR), & -J''(isR) - \frac{\sigma}{isR} J'(isR) \\ J'(sR) \quad , & -iJ'(isR) \end{vmatrix} = 0, \tag{228}$$

oder:

$$i\left\{J''(sR) + \frac{\sigma}{sR} + J'(sR)\right\} J'(isR) - \left\{J''(isR) + \frac{\sigma}{isR} J'(isR)\right\} J'(sR) = 0. \tag{229}$$

Gleichung (229), die sogenannte „Frequenzengleichung", liefert die möglichen Werte s_ν resp. $\lambda_\nu = s_\nu^4$, d. h. die Eigenwerte. Ist diese Gleichung erfüllt, so werden die beiden aus (226) und (227) zu berechnenden Werte $\frac{B_\nu}{A_\nu}$ identisch. Man erhält aus der letzteren etwa:

$$\frac{B_\nu}{A_\nu} = -i\,\frac{J'(s_\nu R)}{J'(is_\nu R)}. \tag{230}$$

Bezeichnet C_ν eine willkürliche Konstante, so ergeben sich mit (230) aus (225) die Eigenfunktionen $\psi_\nu(r)$:

$$\psi_\nu(r) = C_\nu\{J'(is_\nu R) J(s_\nu r) - i J'(s_\nu R) J(is_\nu r)\}. \tag{231}$$

und daraus durch Multiplikation mit $C_\nu \cos n_\nu t$ oder $D_\nu \sin n_\nu t$ und Addition:

$$\zeta_\nu = (C_\nu \cos n_\nu t + D_\nu \sin n_\nu t)\,\psi_\nu\,(\tag{232}$$

Dabei sind die Konstanten C_ν und D_ν aus dem Anfangszustande zu bestimmen, und nach (217) ist die νte Eigenfrequenz n_ν gegeben durch:

(233) $$n_\nu = s_\nu^2 \sqrt{\frac{h^2 E}{12 \varepsilon (1-\sigma^2)}},$$

eine Gleichung, aus der man ersieht, wie die Frequenz sich mit der Dicke der Platte, der Dichte, dem Elastizitätsmodul und dem Querkontraktionskoeffizienten ändert.

Wir wollen uns darauf beschränken, einige Knotenlinien zu berechnen. Man erkennt sofort, daß die Gleichung derselben gegeben ist durch:

(234) $$\psi_\nu(r) = 0; \quad 0 \leqq r \leqq R.$$

Diese Gleichungen liefern einen oder mehrere Werte von r im Intervall von 0 bis R: Die Knotenlinien sind also konzentrische Kreise. Um sie berechnen zu können, müssen jedoch erst die Werte s_ν aus Gleichung (229) berechnet werden. Diese Gleichung kann man mit Hilfe der Differentialgleichung für $J(sR)$ und $J(isR)$ vereinfachen, indem man z. B. setzt:

$$J''(sR) = -\frac{1}{sR} J'(sR) - J(sR), \quad \text{und ebenso für } J''(isR).$$

Dann hat man schließlich:

(235) $$2(1-\sigma) + isR \frac{J(isR)}{J'(isR)} + sR \frac{J(sR)}{J'(sR)} = 0.$$

Die dieser Gleichung genügenden Werte s sind die zulässigen Werte s_ν, die uns die Eigenwerte λ_ν und nach (234) die Knotenlinien liefern. Die Ausrechnung dieser Gleichung ist nun im allgemeinen, namentlich für kleine Werte des Argumentes sR sehr unbequem; für große Argumente jedoch kann man sich der sogenannten asymptotischen Darstellungen der Besselschen Funktionen bedienen, die etwa vom Werte $sR > 5$ ab schon als recht genau gelten. Wir wollen, um einen Überblick zu gewinnen, uns einmal auf große Argumente beschränken. Für ein solches ist:[1])

(236) $$\begin{cases} J(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right), \\ J'(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right). \end{cases}$$

Damit folgt aus (235), wenn wir $\left(sR - \frac{\pi}{4}\right)$ der Kürze halber durch x bezeichnen:

(237) $$-2(1-\sigma) + i\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \frac{\cos(ix)}{\sin(ix)} + \left(x + \frac{\pi}{4}\right) \frac{\cos x}{\sin x} = 0.$$

[1]) Jahnke-Emde, p. 98 u. 99.

Nun ist aber bekanntlich:

$$\cos(i x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sin(i x) = -\frac{e^x - e^{-x}}{2 i}$$

und man erkennt, daß für großes x, was hier vorausgesetzt wird:

$$\cos(i x) \cong \frac{e^x}{2}, \quad \sin(i x) \cong -\frac{e^x}{2 i},$$

also $i \operatorname{tg}(i x) \cong +1$ wird.

Dividiert man endlich in (237) durch $x + \frac{\pi}{4}$, so kann annähernd $\frac{-2(1-\sigma)}{x+\frac{\pi}{4}}$ vernachlässigt werden und es folgt schließlich:

(238) $$\operatorname{tang}\left(s R - \frac{\pi}{4}\right) = -1.$$

Die Lösung dieser Gleichung ist:

(239) $$s_\nu R = \nu\pi \, (\nu = 0, 1, 2, \ldots \infty).$$

Diese Lösung ist aber nur zu verwenden für Werte von $s_\nu R > 5$. Man erkennt, daß dies schon für $\nu = 2$ der Fall ist. Läßt man einen Fehler von 5—10% zu, so kann man auch schon den Wert s_1 für $\nu = 1$ benutzen. Man erhält also als genäherte Werte:

(240) $$s_\nu = \frac{\nu\pi}{R},$$

woraus für die Eigenwerte folgt:

(240a) $$\lambda_\nu = s_\nu^4 = \frac{\nu^4 \pi^4}{R^4}.$$

Nach (233) folgt dafür für die Eigenfrequenzen:

(240b) $$n_\nu = \frac{\nu^2 \pi^2}{R^2} \sqrt{\frac{h^2 E}{12 \varepsilon (1 - \sigma^2)}}.$$

Damit kann man nun nach (234) und (231) die Größe der Radien der Knotenlinien berechnen. Für $s = s_1 = \frac{\pi}{R}$ erhalten wir:

$$J'(\pi i) J\left(\frac{\pi r}{R}\right) - i J'(\pi) J\left(\frac{\pi r i}{R}\right) = 0.$$

Durch eine ziemlich mühsame Rechnung folgt hieraus nach Poisson für den Radius r_1 der Knotenlinie:

(241) $$\frac{r_1}{R} = 0{,}68062.$$

Im folgenden sind noch die Werte für $s_2 = \frac{2\pi}{R}$ und $s_3 = \frac{3\pi}{R}$ angegeben.

$s_2 = \frac{2\pi}{R}$	$s_3 = \frac{3\pi}{R}$
$r_2' = 0{,}39151$	$r_3' = 0{,}25679$
$r_2'' = 0{,}84200$	$r_3'' = 0{,}59147$
	$r_3''' = 0{,}89381$

Diese Zahlen stimmen mit den experimentell mittels Chladnischer Klangfiguren von Savart und besonders Strehlke gemessenen auf $^1/_{10}\,\%$ überein.

Der Vollständigkeit halber sei hier noch bemerkt, daß in dem allgemeineren von Kirchhoff behandelten Falle außer konzentrischen Kreisen auch noch Radien als Knotenlinien auftreten können. Die Behandlung dieses Falles führt auf Besselsche Funktion höherer Ordnung und muß hier des Raummangels wegen unterbleiben.

Ferner sei erwähnt, daß es auch in dem Falle rechteckiger Platten mit freien Rändern — ein Problem, für das die exakte Lösung, wie vorhin erwähnt, noch nicht vorliegt — neuerdings W. Ritz[1]) gelungen ist, die Schwingungszahlen und Knotenlinien mit beliebiger Genauigkeit zu berechnen, so daß das Problem wenigstens als praktisch gelöst betrachtet werden kann, wenn auch die exakten Eigenfunktionen nicht bekannt sind. Leider gestattet es der Raum nicht, auf die Ritzsche Methode näher einzugehen.

---

[1]) W. Ritz, Journal für die reine und angewandte Mathematik **135**, 1908. Göttinger Nachrichten, Math.-phys. Klasse, 1908. Annalen der Physik, **28**, pag. 737, 1909.

Sechzehntes Kapitel.

Gleichgewicht und kleine Schwingungen der Flüssigkeiten.

163. Die Gleichungen der kleinen Schwingungen von Flüssigkeiten.

Mit dem vorliegenden Kapitel begeben wir uns in das Gebiet der Mechanik der Flüssigkeiten. Das bedeutet in einer Hinsicht eine Vereinfachung, in anderer aber eine Komplikation. Eine Vereinfachung in folgendem Sinne: Eine Flüssigkeit wollen wir vorläufig dadurch definieren, daß sie keinen Widerstand gegen Formänderung besitzen soll, d. h. daß der Torsionsmodul $\mu = 0$ sein soll. Die wirklichen Flüssigkeiten besitzen allerdings stets einen geringen Widerstand gegen Schub, dessen Einfluß wir später genauer untersuchen werden. Die vorläufig der Betrachtung zugrunde gelegten idealisierten Flüssigkeiten nennt man wegen des Fehlens jedes Widerstandes gegen Scherung „vollkommene" Flüssigkeiten. Eine solche ist daher in gewissem Sinne ein Spezialfall des allgemeinen isotropen elastischen Körpers, der durch zwei Elastizitätskonstanten λ und μ charakterisiert ist: Die Flüssigkeit besitzt eben nur eine Elastizitätskonstante, nämlich λ. Wir könnten also die elastischen Gleichungen (7) des X. Kapitels einfach hier übernehmen, wenn nicht ein anderer Umstand das im allgemeinen verbieten würde: nämlich die Tatsache, daß bei Flüssigkeiten im allgemeinen endliche Verschiebungen ins Auge gefaßt werden müssen. Die in den elastischen Gleichungen gemachten Vereinfachungen (z. B. die Ersetzung von $\frac{Du}{Dt}$ durch $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ usw.) sind daher in der Hydrodynamik im allgemeinen Falle nicht mehr zulässig, und hierin liegt die größere Komplikation gegenüber den festen elastischen Körpern. Es gibt jedoch auch im Gebiete der Hydrodynamik Fälle, in denen man mit den durch Nullsetzen von μ spezialisierten elastischen Gleichungen auskommt. Das ist dann möglich, wenn die Deformationen klein oder Null sind, also im Falle des Gleichgewichtes (Hydrostatik) und demjenigen der kleinen Schwingungen. Dieser Einfachheit wegen stellen wir die Behandlung dieser Fälle voran.

Die elastischen Gleichungen [Kapitel X, Gleichung (7) auf pag. 484] lauten:

$$
(1)\quad \begin{cases}
\varepsilon \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \varepsilon X - \left(\dfrac{\partial X_x}{\partial x} + \dfrac{\partial X_y}{\partial y} + \dfrac{\partial X_z}{\partial z}\right), \\
\varepsilon \dfrac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \varepsilon Y - \left(\dfrac{\partial Y_x}{\partial x} + \dfrac{\partial Y_y}{\partial y} + \dfrac{\partial Y_z}{\partial z}\right), \\
\varepsilon \dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \varepsilon Z - \left(\dfrac{\partial Z_x}{\partial x} + \dfrac{\partial Z_y}{\partial y} + \dfrac{\partial Z_z}{\partial z}\right);
\end{cases}
$$

dazu treten die Gleichungen (43) des XI. Kapitels auf pag. 512:

$$
(2)\quad \begin{cases}
X_x = -\lambda(x_x + y_y + z_z) - 2\mu x_x = -\lambda \Sigma - 2\mu x_x; \\
Y_y = -\lambda \Sigma - 2\mu y_y; \qquad Z_z = -\lambda \Sigma - 2\mu z_z; \\
Y_z = -\mu y_z; \qquad Z_x = -\mu z_x; \qquad X_y = -\mu x_y.
\end{cases}
$$

Nach dem Vorstehenden haben wir in den Gleichungen (2) überall $\mu = 0$ zu setzen. Demnach ist für eine vollkommene Flüssigkeit:

$$
(3)\quad \begin{cases}
X_x = Y_y = Z_z = -\lambda \Sigma = -\lambda\left(\dfrac{\partial \xi}{\partial x} + \dfrac{\partial \eta}{\partial y} + \dfrac{\partial \zeta}{\partial z}\right) = -\lambda \operatorname{div} \mathfrak{s}, \\
Y_z = Z_x = X_y = 0.
\end{cases}
$$

Diese Gleichungen lehren zunächst, daß die sämtlichen Tangentialspannungen gleich Null sind: Einem Schube, einer Scherung, setzt eben eine vollkommene Flüssigkeit nach Definition keinen Widerstand entgegen. Ferner sind die drei Normalspannungen einander gleich. Man hat für dieselben eine neue Bezeichnung eingeführt: man nennt sie schlechthin den „Druck" der Flüssigkeit. Wird derselbe durch P bezeichnet, so hat man:

$$
(4)\qquad X_x = Y_y = Z_z = P = -\lambda \Sigma.
$$

Setzen wir für die Spannungen nach (3) und (4) die Werte in die Gleichungen (1) ein, so erhalten wir die Gleichungen der kleinen Schwingungen einer vollkommenen Flüssigkeit:

$$
(5)\quad \begin{cases}
\varepsilon \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \varepsilon X - \dfrac{\partial P}{\partial x}, \\
\varepsilon \dfrac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \varepsilon Y - \dfrac{\partial P}{\partial y}, \\
\varepsilon \dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \varepsilon Z - \dfrac{\partial P}{\partial z},
\end{cases}
$$

oder in Vektorschreibweise, wenn die Kraft pro Masseneinheit wieder durch $\mathfrak{K}$ bezeichnet wird:

$$
(5a)\qquad \varepsilon \frac{\partial^2 \mathfrak{s}}{\partial t^2} = \varepsilon \mathfrak{K} - \operatorname{grad} P,
$$

oder, wenn man für P nach (4) den Wert einsetzt:

$$
(6)\qquad \varepsilon \frac{\partial^2 \mathfrak{s}}{\partial t^2} = \varepsilon \mathfrak{K} + \lambda \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathfrak{s}).
$$

Und daraus folgt im besonderen für den Fall des Gleichgewichte (Hydrostatik):

(7) $$\varepsilon\mathfrak{K} = \text{grad } P,$$

womit wir uns zunächst weiter beschäftigen wollen. Dabei ist noch folgendes zu beachten: Bei den festen elastischen Medien haben wir die Dichtigkeit stets als unabhängig vom Spannungszustande betrachtet, und zwar war das aus dem Grunde gerechtfertigt, weil die dort eintretenden Änderungen der Dichte verschwindend klein sind gegen ihren Normalwert. Diese vereinfachende Annahme werden wir im allgemeinen hier nicht mehr machen dürfen, da nach unserer Definition der Flüssigkeit darunter auch die Gase einbegriffen sind. Bei den Flüssigkeiten im engeren Sinne allerdings ist in natura die Dichte praktisch von dem Drucke unabhängig, so daß man für diese — aber nur für diese — die vereinfachende Annahme der „Inkompressibilität" beibehalten kann. Die analytische Bedingung dafür werden wir später formulieren. Um Mißverständnisse zu vermeiden, sei betont, daß die Forderung der Inkompressibilität nicht bedeutet, daß die Dichte räumlich konstant sei. Dieselbe kann vielmehr eine Funktion der Raumkoordinaten (x, y, z) sein — allerdings ist der Fall der räumlichen Konstanz der Dichte, d. h. der homogenen Flüssigkeit, wohl der wichtigste —; im Falle der Inkompressibilität besteht lediglich keine Abhängigkeit der Dichte vom Druck. Die inkompressiblen Flüssigkeiten nennt man auch wohl im Gegensatz zu den kompressiblen, den Gasen, „tropfbare" Flüssigkeiten.

Im allgemeinen Falle muß die Dichtigkeit an jeder Stelle (x, y, z) des Raumes durch den dort wirkenden Druck $P(x, y, z)$ als eindeutig bestimmt angesehen werden. Zu den Gleichungen (6) resp. (7) tritt also noch hinzu die folgende

(8) $$\varepsilon = \psi(P) \quad \text{oder:} \quad P = \chi(\varepsilon).$$

Den speziellen Charakter dieser Funktion werden wir später in geeigneten Beispielen angeben.

Wir wollen zunächst aus den obigen Gleichungen einige allgemeine Folgerungen ziehen.

In einem beliebigen elastischen Medium hängt der Druck in einem Punkte von der Richtung ab, wie Gleichung (10) des X. Kapitels auf pag. 488 zeigt, die die Druckkomponenten X_n, Y_n, Z_n als Funktionen der Richtung n angibt (n ist die Normalenrichtung der betrachteten Ebene):

(9) $$\begin{cases} X_n = X_x \cos(nx) + X_y \cos(ny) + X_z \cos(nz), \\ Y_n = Y_x \cos(nx) + Y_y \cos(ny) + Y_z \cos(nz), \\ Z_n = Z_x \cos(nx) + Z_y \cos(ny) + Z_z \cos(nz). \end{cases}$$

Diese Gleichungen reduzieren sich hier vermittels der Formeln (3) und (4) auf die folgenden einfacheren:

$$(10)\qquad \begin{cases} X_n = P\cos(nx)\,,\\ Y_n = P\cos(ny)\,,\\ Z_n = P\cos(nz)\,, \end{cases}$$

und diese sagen offenbar aus (wie auch aus den allgemeinen Überlegungen der Nr. 108 des X. Kapitels hervorgeht), daß für Flüssigkeiten der Druck in jedem Punkte derselben senkrecht auf jeder durch den Punkt gelegten Ebene steht. In einem beliebigen elastischen Medium ist dies nur für drei bestimmte aufeinander senkrechte Richtungen, die **Hauptspannungsrichtungen**, der Fall. Die oben ausgesprochene Eigenschaft der Flüssigkeit ist offenbar nur ein anderer Ausdruck für die in der Definition derselben begründete Aussage, daß keine Tangentialspannungen vorhanden sind.

Man kann auch hier, wie bei den festen elastischen Körpern, die Spannungsverhältnisse mittels der sogenannten Spannungsfläche (Spannungsellipsoid) geometrisch darstellen. Unter der Spannungsfläche verstanden wir bekanntlich eine solche Fläche, deren Radienvektoren der Größe und Richtung nach die Drucke in einem Punkte darstellen. Nennen wir die Koordinaten eines Punktes der Oberfläche x, y, z, so ziehen wir vom Anfangspunkte aus Radienvektoren, deren Komponenten x, y, z resp. gleich den Spannungskomponenten X_n, Y_n, Z_n der Gleichung (10) sind. Dann ist der Radiusvektor selbst gleich

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{X_n^2+Y_n^2+Z_n^2}\,.$$

Wir erhalten also aus (10) für die Koordinaten eines Punktes der Spannungsfläche:

$$(11)\qquad \begin{cases} x = P\,.\cos(nx)\,,\\ y = P\,.\cos(ny)\,,\\ z = P\,.\cos(nz)\,. \end{cases}$$

Diese Gleichungen liefern durch Quadrieren und Addieren:

$$(12)\qquad x^2+y^2+z^2 = P^2.$$

Das ist die Gleichung einer Kugel mit dem Radius P: das Spannungsellipsoid degeneriert bei Flüssigkeiten in eine Kugel, die wir in Zukunft als „**Druckkugel**“ bezeichnen wollen.

Durch die obigen Gleichungen ist auch der Wert des elastischen Potentials f für eine Flüssigkeit bestimmt. Für einen beliebigen isotropen Körper war:

$$f = \tfrac{1}{2}\lambda(x_x+y_y+z_z)^2 + \mu\{x_x^2+y_y^2+z_z^2+\tfrac{1}{2}(y_z^2+z_x^2+x_y^2)\}.$$

Da $\mu=0$, wird daraus für ideale Flüssigkeiten:

$$(13)\qquad f = \frac{1}{2}\lambda(x_x+y_y+z_z)^2 = \frac{1}{2}\lambda\Sigma^2 = \frac{1}{2}\lambda\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)^2.$$

Die physikalische Bedeutung von Σ ist bekanntlich die „kubische Dilatation der Volumeinheit", $-\Sigma$ kann man daher als die „kubische Kompression der Volumeinheit" bezeichnen. Für eine inkompressible Flüssigkeit ist also offenbar:

$$(14) \qquad \Sigma = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \operatorname{div} \mathfrak{s} = 0,$$

und dies ist die analytische Formulierung der Inkompressibilität.

Man erkennt daraus mit Rücksicht auf Gleichung (13) den übrigens auch unmittelbar einleuchtenden Satz: Inkompressible Flüssigkeiten haben keine elastische potentielle Energie.

164. Spezielle Fälle des Flüssigkeitsgleichgewichtes.

Die Gleichung (7) der Hydrostatik möge mit $\frac{1}{\varepsilon} d\mathfrak{s}$ skalar multipliziert werden. Dann folgt:

$$(15) \qquad (\mathfrak{K}, d\mathfrak{s}) = \frac{1}{\varepsilon}(\operatorname{grad} P, d\mathfrak{s}) = \frac{1}{\varepsilon}\frac{dP}{ds} ds = \frac{1}{\varepsilon} dP.$$

Nun ist aber, wie man leicht erkennt, die rechte Seite ein totales Differential. Denn es ist ja im allgemeinen Falle nach (8) $\varepsilon = \psi(P)$, und die rechte Seite kann geschrieben werden:

$$\frac{1}{\varepsilon} dP = \frac{dP}{\psi(P)}.$$

Definiert man nun eine Funktion von P durch die Gleichung:

$$(16) \qquad U = \int_{P_0}^{P} \frac{dP}{\psi(P)} = \int_{P_0}^{P} \frac{dP}{\varepsilon},$$

wo P_0 eine beliebige Konstante ist, so ist offenbar $\frac{1}{\varepsilon} dP = dU$ das totale Differential dieser Funktion U, die überdies eindeutig ist. Wir müssen also aus (15) den Schluß ziehen, daß auch die linke Seite $(\mathfrak{K}, d\mathfrak{s})$ das totale Differential einer eindeutigen Funktion der Koordinaten ist, die wir mit $-\Omega(x, y, z)$ bezeichnen wollen. Oder anders ausgedrückt: Die äußere Kraft muß sich als Gradient eines eindeutigen Potentials darstellen lassen, damit überhaupt Gleichgewicht bestehen kann. Wir haben also:

$$(17) \qquad \begin{cases} X = -\frac{\partial \Omega}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial \Omega}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial \Omega}{\partial z}, \text{ oder} \\ \mathfrak{K} = -\operatorname{grad} \Omega, \end{cases}$$

und wenn man nach (16) und (17) U und Ω in die Gleichung (15) einführt, so ergibt sich die Bedingung des Flüssigkeitsgleichgewichtes in der Form:

$$-(\operatorname{grad}\Omega, d\mathfrak{s}) = -\frac{d\Omega}{ds}ds = -d\Omega = dU;$$

also

$$d(\Omega + U) = 0,$$

oder endlich:

(18) $$\Omega + U = \text{Const.}$$

Im Falle einer inkompressiblen Flüssigkeit, wo ε unabhängig von P ist, ist offenbar nach (16):

(16a) $$U = \frac{1}{\varepsilon}\int_{P_0}^{P} dP = \frac{P - P_0}{\varepsilon},$$

und die Gleichgewichtsbedingung (18) nimmt die einfachere Form an:

(18a) $$\Omega + \frac{P}{\varepsilon} = \text{Const.},$$

wobei gleich das konstante Glied $\frac{P_0}{\varepsilon}$ in die Konstante der rechten Seite mit einbezogen ist. Aus der Gleichung (18) ergeben sich nun folgende Schlüsse:

Wir wollen die Flächen $\Omega(xyz) = \text{const.}$, die sogen. „Äquipotential"- oder „Niveauflächen", konstruieren. Diese fallen nach (18) zusammen mit den Flächen $U = \int_{P_0}^{P}\frac{dP}{\varepsilon} = \text{Const.}$, d. h. mit den Flächen konstanten Druckes, den sogenannten „Isobaren". Die Richtung der Resultante der äußeren Kräfte ist nach der Definition einer Niveaufläche stets senkrecht zur Niveaufläche gerichtet. Daraus folgt unmittelbar, daß die freie Oberfläche der Flüssigkeit eine Niveaufläche und mithin auch eine Isobare ist. Denn wenn die Resultante der äußeren Kraft nicht senkrecht auf der freien Oberfläche stünde, so könnte man die tangentielle Komponente in bezug auf die Oberfläche bilden. Da nun die Flüssigkeit keinen Widerstand gegen Schub leistet, so müßte diese tangentielle Komponente eine Verschiebung der Flüssigkeitsteilchen längs der Oberfläche erzeugen, was mit der Voraussetzung des Gleichgewichtes unverträglich ist; folglich kann keine tangentielle Komponente der äußeren Kräfte an der Oberfläche existieren. M. a. W.: Die freie Oberfläche einer ruhenden Flüssigkeit ist Niveaufläche und Isobare.

Diese Resultate sollen nun an einigen Beispielen erläutert werden. Zunächst betrachten wir homogene Flüssigkeiten von konstanter Dichte.

Der einfachste sich darbietende Fall ist der, wo gar keine äußeren Kräfte wirken. Dann ist, wie man am einfachsten aus (7) erkennt, $P = \text{const.}$ Bezeichnet man den Druck, der auf der freien Oberfläche lastet, durch P_0, so ist $P = P_0$, d. h. in einer Flüssigkeit, auf die keine Kräfte wirken, pflanzt sich der auf der freien Ober-

fläche lastende Druck nach allen Punkten derselben gleichmäßig fort. Geometrisch gesprochen: die Druckkugel hat in allen Punkten der Flüssigkeit den gleichen Radius P_0. Nach (4) ist nun

$$P = P_0 = -\lambda \Sigma,$$

und nach der Definition von Σ ist, wenn V das ursprüngliche, V_0 das Volumen unter dem Druck P_0 bezeichnet:

$$\Sigma = \frac{V - V_0}{V},$$

also ist:

(19) $$\lambda = -\frac{P_0 V}{V - V_0}.$$

Diese Gleichung kann zur Bestimmung der Elastizitätskonstanten λ von Flüssigkeiten dienen. Wie ein Vergleich mit (24a) des XII. Kapitels (auf pag. 521) ergibt, ist λ nichts anderes, als der „Kompressionsmodul" der Flüssigkeit; der reziproke Wert $\frac{1}{\lambda}$ wird als „(kubische) Kompressibilität" bezeichnet. Der Modul λ ist, da für tropfbare Flüssigkeiten $\frac{V - V_0}{V}$ sehr klein ist, eine sehr große Zahl, und dementsprechend die Kompressibilität sehr gering, so daß man in den meisten Fällen davon absehen kann. Bei Gasen liegt die Sache anders. Um die Verhältnisse hier darzustellen, geht man am besten von einer kleinen Modifikation der Gleichung (19) aus. Es bedeute P_1 einen anderen Druck und V_1 das zugehörige Volumen der Flüssigkeit. Dann ist nach (19) auch:

(19a) $$\lambda = -\frac{P_1 V}{V - V_1}.$$

Die Kombination von (19a) und (19) liefert für λ die andere Gleichung:

$$\lambda = -\frac{(P_1 - P_0) V}{V_0 - V_1}$$

oder, wenn $P_1 - P_0$ durch ΔP, $V_0 - V_1$ durch ΔV bezeichnet wird:

(19b) $$\lambda = -\frac{\Delta P}{\Delta V} V.$$

Darin bedeutet $-\Delta V$ die Volumverminderung des ursprünglichen Volumens V, wenn der Druck P um den Betrag ΔP gesteigert wird. Diese Gleichung gilt auch im Grenzfalle, wenn das Verhältnis $\frac{\Delta P}{\Delta V}$ gleich dem Differentialquotienten $\frac{dP}{dV}$ wird.

Für **ideale Gase** besteht, wenn bei der **Kompression** die **Temperatur konstant gehalten** wird, d. h. bei einem isothermen Prozeß, die folgende Beziehung, die als **Mariotte-Boylesches** Gesetz bekannt ist:

(20) $$P \cdot V = \text{Const.}$$

Daraus folgt durch Differentiation:

$$P dV + V dP = 0\,,$$

d. h. unter Rücksicht auf (19b):

(21) $$\lambda_{\text{isoth.}} = -\frac{dP}{dV} V = P\,.$$

Für eine isotherme Kompression ist der Kompressionsmodul der Gase gleich ihrem Druck, die Kompressibilität gleich dem reziproken Werte desselben. Da V umgekehrt proportional der Dichte ε ist, so kann man offenbar auch sagen, daß die isotherme Kompressibilität der Gase umgekehrt proportional der Dichte derselben ist.

Häufig ist es aber notwendig, auf die Temperaturveränderungen Rücksicht zu nehmen, welche stets bei einer Kompression stattfinden, wenn das Gas nach außen hin keine Wärme abgeben kann. Dann nennt man den Prozeß adiabatisch, und an Stelle des Mariotte-Boyleschen Gesetzes tritt das folgende:

(22) $$P \cdot V^k = \text{Const.}\,,$$

wo $k = \frac{c_p}{c_v}$ gleich dem Verhältnis der spezifischen Wärme bei konstantem Druck (c_p) und bei konstantem Volumen (c_v) ist. Dann hat man aus (22) durch Differentiation:

$$V^k dP + P \cdot k \cdot V^{k-1} dV = 0\,,$$

oder nach (19b):

(23) $$\lambda_{\text{adiab}} = P \frac{c_p}{c_v} = P \cdot k\,.$$

Da $k = \frac{c_p}{c_v}$ stets größer als 1 ist, so ist der „adiabatische Kompressionsmodul" größer als der isotherme und die „adiabatische Kompressibilität" kleiner als die isotherme. In der folgenden Tabelle sind die Kompressibilitäten für einige tropfbare Flüssigkeiten angegeben. Dabei ist der Druck in Atmosphären gemessen; λ ist nach Gleichung (19b) von derselben Dimension wie P, also auch in Atmosphären ausgedrückt, die Kompressibilität also in reziproken Atmosphären (Atm^{-1}).

Flüssigkeit		$\frac{1}{\lambda} \cdot 10^6$ in Atm.^{-1}
Wasser	(0°)	50,2
Äther	(0°)	111
Alkohol	(7,3°)	82,8
Chloroform	(8,5°)	62,5
Quecksilber	(0°)	2,95

Als nächst einfachen Fall behandeln wir den einer inkompressiblen Flüssigkeit mit räumlich konstanter Dichte, die der Schwerkraft unterworfen ist. Nehmen wir die positive z-Achse vertikal nach oben, die xy-Ebene horizontal, so ist offenbar:

$$X = Y = 0, \quad Z = -g.$$

Daraus folgt für das Potential $\Omega = gz$; ferner ist $U = \frac{P - P_0}{\varepsilon}$ nach (16a). Also wird die Gleichgewichtsbedingung nach (18a):

$$\frac{P}{\varepsilon} + gz = \text{Const.}, \tag{24}$$

wobei alle konstanten Glieder rechts zusammengefaßt sind. Man erkennt daraus zunächst, daß die Niveauflächen und Isobaren horizontale Ebenen sind. Nehmen wir an, die Flüssigkeit reiche bis zu einer Höhe $z = h$ und nennen wir den dort wirkenden Druck P_0, so ist nach (24) der Druck im Niveau z:

$$P = P_0 + \varepsilon g (h - z), \tag{24a}$$

d. h. gleich dem Druck P_0, der auf der freien Oberfläche $z = h$ lastet, vermehrt um das Gewicht $\varepsilon g (h - z)$ einer Flüssigkeitssäule vom Querschnitt 1, die vom Niveau z bis zur freien Oberfläche reicht.

Denken wir uns aus der Flüssigkeit einen Teil abgegrenzt, und außerhalb desselben die Flüssigkeit erstarrt, so haben wir den Fall einer in einem Gefäß eingeschlossenen Flüssigkeit. Das Gleichgewicht der innerhalb des Gefäßes befindlichen Flüssigkeit wird durch diesen Vorgang nicht beeinflußt. Das ergibt sich sofort aus der Überlegung, daß der Druck, den die Flüssigkeit auf die Wände des Gefäßes ausübt, durch die Festigkeit derselben kompensiert wird. Man erkennt aus vorstehender Überlegung, daß insbesondere die Form des Gefäßes ganz gleichgültig ist. Wenn etwa der Boden des Gefäßes mit der xy-Ebene zusammenfällt, so ergibt die letzte Gleichung für den Druck auf den Boden:

$$P = P_0 + \varepsilon g h. \tag{25}$$

Ist die Fläche des Bodens q, so ist die Gesamtkraft, die man auch wohl zuweilen, allerdings nicht ganz exakt, als „Bodendruck" bezeichnet, $P_0 q + \varepsilon g h q$, d. h. **der Bodendruck hängt nur ab von der Größe der Bodenfläche, der Natur und Höhe der Flüssigkeit und dem auf der Oberfläche lastenden Drucke P_0, ist aber ganz unabhängig von der Form des Gefäßes.** Dieser Satz ist als das **„hydrostatische Paradoxon"** bekannt. Nach (24a) nimmt der Radius der Druckkugel von oben nach unten linear zu.

Etwas allgemeiner ist der folgende Fall: Auf eine inkompressible Flüssigkeit sollen anziehende Kräfte wirken, die von einem Zentrum ausgehen und lediglich Funktionen des Abstandes r von demselben sind.

Nennen wir diese Kraft $-\varphi(r)$ (das Minuszeichen bedeutet, daß die Kraft den Abstand r zu vermindern bestrebt ist), so haben wir:

$$X = -\varphi(r)\frac{\partial r}{\partial x}, \quad Y = -\varphi(r)\frac{\partial r}{\partial y}, \quad Z = -\varphi(r)\frac{\partial r}{\partial z};$$

also

(26) $$\Omega = + \int \varphi(r)\,dr = + \Phi(r).$$

U hat den nämlichen Wert wie im vorigen Beispiel, also ist die Gleichgewichtsbedingung:

(27) $$\Phi(r) + \frac{P}{\varepsilon} = \text{Const.}$$

Daraus folgt: Die Niveauflächen (gleichzeitig Isobaren) sind konzentrische Kugelflächen um das Attraktionszentrum; mithin auch die freie Oberfläche der Flüssigkeit. Ist die Masse M der Flüssigkeit gegeben, so ist auch der Radius R der freien Oberfläche bestimmt. Denn es ist offenbar:

$$\frac{M}{\varepsilon} = \frac{4}{3} R^3 \pi; \quad \text{also} \quad R = \sqrt[3]{\frac{3M}{4\pi\varepsilon}}.$$

Der Radius der Druckkugel ist konstant für jede Niveaufläche, variiert aber von innen nach außen nach dem angenommenen Attraktionsgesetz. Die Diskussion spezieller Kraftgesetze kann unterbleiben, da sie keine Schwierigkeiten bildet.

Nunmehr wollen wir zu Flüssigkeiten übergehen, deren Dichte räumlich variabel ist, sei es stetig, oder sprungweise an gewissen Trennungsflächen. Nehmen wir zunächst an, daß ε eine Funktion von P sei, so erkennt man folgendes: Da die Niveauflächen Isobaren sind, so sind sie gleichzeitig Flächen gleicher Dichte. Dies Resultat gilt aber auch für inkompressible Flüssigkeiten mit variabler Dichte, wie aus (18a) folgt. Denn für Niveauflächen ist dann $\frac{P}{\varepsilon} = \text{Const.}$ und aus $P = \text{Const.}$ folgt dasselbe für die Dichte ε. Sind also etwa mehrere Flüssigkeiten von verschiedener, aber innerhalb der einzelnen Flüssigkeit konstanter Dichte vorhanden, so müssen die Trennungsflächen Niveauflächen sein, z. B. im Falle der Erdschwere als äußerer Kraft horizontale Ebenen. Mehr sagen die Gleichgewichtsbedingungen über die räumliche Anordnung der Flüssigkeit nicht aus; sie verlangen keineswegs, wie man aus der täglichen Erfahrung vielleicht schließen möchte, daß die Flüssigkeiten von unten nach oben sich nach abnehmender Dichte ordnen. Im Gegenteil: jede Anordnung, bei der die Trennungsflächen Niveauflächen sind, genügt dem Gleichgewicht. Eine andere Frage aber ist die, wann dieses Gleichgewicht stabil ist. Nach den allgemeinen Regeln der Mechanik entspricht die stabile Gleichgewichtslage einem Minimum der potentiellen Energie; im Falle der Erdschwere liefert diese Bedingung

allerdings das Ergebnis, daß die verschiedenen Schichten von unten nach oben nach abnehmendem spezifischen Gewicht geordnet sind.

Ein Beispiel einer schweren Flüssigkeit von stetig variabler Dichte liefert die Erdatmosphäre. Nehmen wir zunächst das isotherme Gesetz (20) als gültig an, so haben wir, wenn wir in (20) V durch $\frac{1}{\varepsilon}$ ersetzen die folgende Gleichung zwischen P und ε:

$$\text{(20a)} \qquad \frac{P}{\varepsilon} = \frac{P_0}{\varepsilon_0}, \quad \text{oder} \quad P = \frac{P_0}{\varepsilon_0}\varepsilon.$$

P_0 und ε_0 seien die zusammengehörigen Werte von Druck und Dichte auf der Erdoberfläche. Demnach wird:

$$\text{(28)} \qquad U = \int_{P_0}^{P} \frac{dP}{\varepsilon} = \frac{P_0}{\varepsilon_0}\int_{P_0}^{P} \frac{dP}{P} = \frac{P_0}{\varepsilon_0}\log\frac{P}{P_0},$$

und Ω hat, wie im früheren Beispiele, den Wert $g\,z$. Also haben wir:

$$\frac{P_0}{\varepsilon_0}\log\frac{P}{P_0} + g\,z = 0,$$

da die Konstante sich durch die getroffene Festsetzung über den Druck an der Erdoberfläche zu Null ergibt. Also erhalten wir schließlich:

$$\text{(29)} \qquad P = P_0\, e^{-\frac{g\,\varepsilon_0}{P_0} z},$$

eine Formel, die den Druck P als Funktion der Höhe z angibt, und die umgekehrt zur barometrischen Höhemessung benutzt werden kann.

Allerdings entspricht die Annahme des isothermen Gesetzes kaum den Tatsachen; besser ist jedenfalls die Zugrundelegung der adiabatischen Formel (22), die wir für unseren Zweck geeignet schreiben:

$$\text{(22a)} \qquad \frac{P}{\varepsilon^k} = \frac{P_0}{\varepsilon_0^{\,k}};$$

dann erhalten wir für U:

$$\text{(30)} \qquad U = \frac{P_0^{\frac{1}{k}}}{\varepsilon_0}\,\frac{k}{k-1}\left(P^{\frac{k}{k-1}} - P_0^{\frac{k}{k-1}}\right),$$

und als Gleichgewichtsbedingung folgt, weil die Konstante wieder Null ist:

$$\text{(31)} \qquad 1 - \left(\frac{P}{P_0}\right)^{\frac{k}{k-1}} = \frac{k-1}{k}\,\frac{\varepsilon_0}{P_0}\,g\,z,$$

eine Gleichung, die ebenfalls eine Beziehung zwischen Druck und Höhe liefert.

165. Starre Körper in einer ruhenden Flüssigkeit.

Es ist bereits in der vorigen Nummer in einem Spezialfalle bemerkt worden, daß der Druck, den die Flüssigkeit auf einen in dieselbe eingebetteten festen Körper ausübt, gleich dem Drucke ist, den die Flüssigkeit haben würde, wenn der feste Körper durch die nämliche Flüssigkeit ersetzt wird. Aus diesem Satze wollen wir nun einige Konsequenzen betrachten.

Es sei etwa eine ebene Platte in die Flüssigkeit eingetaucht. Dann wirkt auf jedes Flächenelement dS derselben die Kraft $PdS = \varepsilon g z \cdot dS$, wenn z die Distanz vom Niveau der Flüssigkeit bedeutet, das wir mit der xy-Ebene zusammenfallen lassen wollen; die positive z-Richtung sei jetzt der Einfachheit halber nach unten genommen. Diese sämtlichen Kräfte stehen senkrecht auf der Plattenebene, sind also unter sich parallel und können daher nach den allgemeinen Untersuchungen der Nummer 79 (pag. 385ff.) in ihrer Wirkung durch eine resultierende Einzelkraft ersetzt werden. Diese Resultierende $\mathfrak{R}$, die Gesamtkraft, ist dem Betrage nach:

$$|\mathfrak{R}| = \int P\,dS = \varepsilon g \int z\,dS,$$

wo das Integral über den ganzen eingetauchten Teil der Platte zu erstrecken ist. Es handelt sich jetzt darum, den Angriffspunkt der Resultante auf der Fläche zu bestimmen. Zu diesem Zwecke führen wir in der Plattenebene ein neues Koordinatensystem (x', y') ein; als x'-Achse nehmen wir die Linie, in der die Platte (eventuell ihre Verlängerung) die Flüssigkeitsoberfläche schneidet; die y'-Achse senkrecht darauf mit der positiven Richtung nach unten. Der Winkel, den die Normale der Plattenebene mit unserer alten z-Achse macht, sei (nz). Durch die Angabe von x' und y' ist also jeder Punkt auf der Platte bestimmt. Man erkennt ferner leicht, daß für jeden Punkt der Platte folgende Beziehung zwischen der alten z-Koordinate und der neuen y'-Koordinate gelten muß:

$$z = y' \cdot \sin(nz)\,.$$

Wir bekommen also für die Kraft in einem Flächenelement $dS = dx'\,dy'$ den Wert:

$$P\,dx'\,dy' = \varepsilon g y' \cdot \sin(nz)\,dx'\,dy'\,. \tag{32}$$

Es sei nun der unbekannte Angriffspunkt der Resultante $\mathfrak{R}$ durch $(\bar{x}', \bar{y}')$ bezeichnet. Dann haben wir nach Nummer 79 zum Ausdruck zu bringen, daß die Momente der Kräfte um die x'- und y'-Achse gleich sind den diesbezüglichen Momenten der Resultante $\mathfrak{R}$. Das gibt offenbar folgende Gleichungen:

$$\left\{\begin{aligned} |\mathfrak{R}|\,\bar{x}' &= \sin(nz)\,\varepsilon g \iint y' x'\,dx'\,dy'\,, \\ |\mathfrak{R}|\,\bar{y}' &= \sin(nz)\,\varepsilon g \iint y'^2\,dx'\,dy'\,, \end{aligned}\right. \tag{33}$$

oder, wenn man für $|\mathfrak{R}|$ den Wert $\varepsilon g\iint z\,dx'\,dy' = \varepsilon g \sin(nz)\iint y'\,dx'\,dy'$ einsetzt, erhält man für die gesuchten Koordinaten $\bar{x}'$, $\bar{y}'$ des Angriffspunktes:

$$(34)\qquad \begin{cases} \bar{x}' = \dfrac{\iint y'\,x'\,dx'\,dy'}{\iint y'\,dx'\,dy'}, \\[2ex] \bar{y}' = \dfrac{\iint y'^2\,dx'\,dy'}{\iint y'\,dx'\,dy'}. \end{cases}$$

Als Beispiel betrachten wir den Fall, daß das eingetauchte Stück von rechteckiger Form sei (Fig. 199); die Kantenlängen seien resp. b und $2a$.

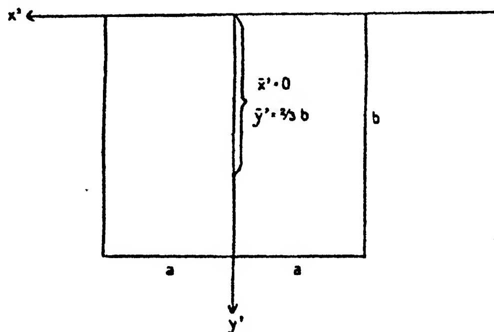


Fig. 199.

Dann findet man in leichter Rechnung aus (34):

$$\bar{x}' = 0,$$
$$\bar{y}' = \tfrac{2}{3}b.$$

Für eine ganz eingetauchte Kreisscheibe vom Radius r ergibt sich ebenso, daß der Angriffspunkt auf der y'-Achse liegt, und zwar um $^1/_4$ des Radius vom Zentrum nach unten verschoben (Fig. 200).

Wir wollen uns jetzt in der Flüssigkeit eine geschlossene Fläche S denken, und innerhalb derselben die Flüssigkeit durch einen festen Körper ersetzen; die nach dem Innern des Körpers gerichtete Normale auf der Oberfläche bilde mit den Achsen die Winkel (nx), (ny), (nz). Dann sind die Druckkomponenten, die auf die ganze Oberfläche wirken, offenbar:

$$\int P\cos(nx)\,dS, \quad \int P\cos(ny)\,dS, \quad \int P\cos(nz)\,dS$$

oder, wenn wir für P den Wert $\varepsilon g z$ nehmen, wo z die Distanz von der freien Oberfläche bedeute und durch $\mathfrak{R}_x$, $\mathfrak{R}_y$, $\mathfrak{R}_z$ die Komponenten der Resultanten bezeichnen:

$$(35)\qquad \mathfrak{R}_x = \varepsilon g \int z \cos(nx)\, dS; \quad \mathfrak{R}_y = \varepsilon g \int z \cos(ny)\, dS;$$
$$\mathfrak{R}_z = \varepsilon g \int z \cos(nz)\, dS\,.$$

Aus diesen Gleichungen, die für jeden Körper gelten, der in eine schwere Flüssigkeit eingetaucht ist, geht durch eine Anwendung des Greenschen Satzes [Gleichung (5) des XI. Kapitels auf pag. 501] das sogenannte „Archimedische Prinzip" hervor. Nehmen wir für die dort als F

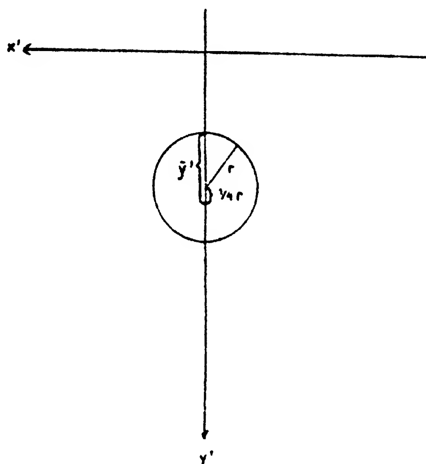


Fig. 200.

bezeichnete Funktion hier z, so ist durch eine dreimalige Anwendung des Greenschen Satzes auf (35):

$$(36)\qquad \begin{cases} \mathfrak{R}_x = -\varepsilon g \int \frac{\partial z}{\partial x}\, d\tau = 0, \quad \mathfrak{R}_y = -\varepsilon g \int \frac{\partial z}{\partial y}\, d\tau = 0, \\ \mathfrak{R}_z = -\varepsilon g \int \frac{\partial z}{\partial z}\, d\tau = -\varepsilon g \int d\tau\,. \end{cases}$$

d. h. die Resultante der Druckkräfte auf einen festen Körper hat keine Horizontalkomponente, sondern ist vertikal gerichtet, und zwar von unten nach oben, wie das Minuszeichen der letzten Gleichung (36) ergibt. $\int d\tau$ ist nun gleich dem Volumen des eingetauchten Körpers; also ist die Resultante der Druckkräfte dem Betrage nach gleich dem Gewicht der verdrängten Flüssigkeit und der Schwere entgegengesetzt gerichtet. Man kann ferner, ähnlich wie in den vorhergehenden Beispielen, leicht zeigen, daß hier der Angriffspunkt der Resultanten der Schwerpunkt des Körpers ist. Daher folgt das „Archimedische Prinzip": Jeder Körper verliert beim Eintauchen in eine

Flüssigkeit so viel an Gewicht, als das Gewicht der von ihm verdrängten Flüssigkeitsmenge beträgt.

Daraus ergeben sich unmittelbar die folgenden Sätze: „Ein vollkommen untergetauchter Körper ist in der Flüssigkeit nur dann im Gleichgewicht, wenn seine Dichte gleich der der Flüssigkeit ist," sowie ferner:

„Ein Körper sinkt so tief in eine Flüssigkeit ein, bis das Gewicht der verdrängten Flüssigkeit gleich dem Gewichte des Körpers ist". Im ersten Falle sagt man: der Körper „schwebt", im zweiten: er „schwimmt."

166. Rotation einer Flüssigkeit um eine feste Achse.

Wir wollen in dieser Nummer den Fall betrachten, daß die Flüssigkeit um eine feste Achse wie ein fester Körper mit konstanter Winkelgeschwindigkeit rotiert. Diese Erscheinungen gehören zwar eigentlich in die Hydrodynamik, doch lassen sich bekanntlich alle derartigen Fälle durch Einführung eines mitrotierenden Koordinatensystems nach den Methoden der Statik behandeln, wenn man nur noch die Zentrifugalkräfte den expliziten äußeren Kräften hinzufügt.

Wir wollen zunächst den Fall annehmen, daß eine in einem zylindrischen Gefäß befindliche Flüssigkeit mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die Achse des Gefäßes rotiert. Die Rotationsachse machen wir zur z-Achse, deren positive Richtung wir nach oben nehmen. Unter diesen Umständen ist die Zentrifugalkraft, die an einem Massenteilchen $\varepsilon d\tau$ angreift, welches in der Entfernung $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ von der Drehungsachse sich befindet, wenn wir die Kraft pro Masseneinheit durch $\mathfrak{C}$ bezeichnen:

$$\varepsilon \mathfrak{C} d\tau = \varepsilon d\tau \cdot r \cdot \omega^2 , \tag{37}$$

und die Komponenten derselben nach den Achsen pro Masseneinheit werden:

$$\mathfrak{C}_x = \omega^2 x, \quad \mathfrak{C}_y = \omega^2 y, \quad \mathfrak{C}_z = 0 . \tag{38}$$

Dazu tritt die Schwerkraft, die nur eine Komponente nach der z-Achse, gleich $-g$, besitzt. Die gesamten äußeren Kräfte sind also:

$$\mathfrak{K}_x = \omega^2 x, \quad \mathfrak{K}_y = \omega^2 y, \quad \mathfrak{K}_z = -g . \tag{39}$$

Man erkennt sofort, daß diese Gesamtkraft sich von einem Potential Ω ableiten läßt. Denn setzen wir:

$$\Omega = g z - \frac{\omega^2}{2}\left(x^2 + y^2\right) = g z - \frac{\omega^2}{2} r^2 , \tag{40}$$

so erkennt man, daß in der Tat $\mathfrak{K} = -\operatorname{grad} \Omega$ ist. Setzen wir die Flüssigkeit als inkompressibel und der Einfachheit halber auch noch von kon-

stanter Dichte voraus, so ist hier $U = \frac{P - P_0}{\varepsilon}$; also lautet die Gleichgewichtsbedingung:

$$(41) \qquad \frac{P}{\varepsilon} + g z - \frac{\omega^2}{2}\left(x^2 + y^2\right) = \text{Const.}$$

Schreiben wir nun vor, daß an der freien Oberfläche der Druck P den Wert P_0 haben soll, so erhält man, wenn man alle Konstanten auf der rechten Seite vereinigt, als Gleichung derselben:

$$(42) \qquad g z = \text{Const.} + \frac{\omega^2}{2}\left(x^2 + y^2\right) = \text{Const.} + \frac{\omega^2}{2} r^2.$$

Wir wollen nun die Höhe des Flüssigkeitsniveaus für $r=0$, d. h. in der Achse des Gefäßes, mit z_0 bezeichnen; dann folgt als physikalische Bedeutung der Konstanten in (42) der Wert $g z_0$. Also kann man auch schreiben:

$$(42\text{a}) \qquad \begin{cases} g(z - z_0) = \frac{\omega^2}{2} r^2, \quad \text{oder} \\ r^2 = \frac{2g}{\omega^2}\left(z - z_0\right). \end{cases}$$

Man erkennt, daß diese Gleichung ein Rotationsparaboloid um die z-Achse vorstellt. Jeder Schnitt mit einer durch die Achse gelegten Ebene ist eine Parabel, wie man am einfachsten aus (42a) ersieht, wenn man z und r als rechtwinklige ebene Koordinaten betrachtet.

Wir wollen nun feststellen, wie tief die Flüssigkeit in der Mitte unter ihr ursprüngliches Niveau, welches wir h nennen wollen, sinkt, und wie hoch sie am Rande des Gefäßes, dessen Radius R sei, steigt. Zunächst ersieht man aus den oben angegebenen Daten, daß das Volumen der ruhenden Flüssigkeit sich ausdrücken läßt durch $R^2\pi h$. Im rotierenden Zustande kann man dafür eine andere Gleichung aufstellen (Fig. 201.) Die Gleichung der freien Oberfläche ist durch (42a) in ihrer expliziten Form gegeben:

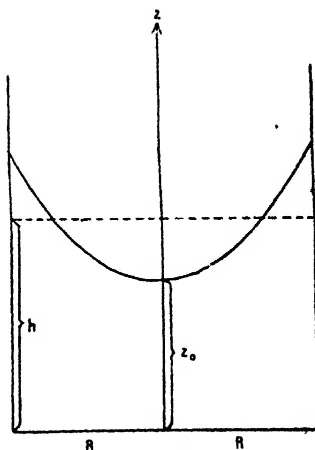


Fig. 201.

$$z = \frac{\omega^2}{2g}\left(x^2 + y^2\right) + z_0.$$

$z\,dS$ ist ein Volumelement des Raumes, der von der freien Oberfläche und den Gefäßwänden eingeschlossen wird, und der seinerseits natürlich gleich dem Flüssigkeitsvolumen ist. In Zylinderkoordinaten ausgedrückt,

ist $dS = r\,dr\,d\varphi$, und das Gesamtvolumen $R^2\pi h$ stellt sich durch d[as]
Integral dar:

$$R^2 \pi h = \int_0^{2\pi}\int_0^R \left\{\frac{\omega^2}{2g}\left(x^2 + y^2\right) + z_0\right\} d\varphi \cdot r\,dr\,,$$

welches eine Gleichung für das unbekannte z_0 darstellt. Die Ausrechnun[g]
liefert:

(43) $$z_0 = h - \frac{\omega^2 R^2}{4g}\,.$$

Damit wird die Gleichung der freien Oberfläche nach (42a):

(44) $$r^2 = \frac{2g}{\omega^2}\left(z - h\right) + \frac{R^2}{2}\,.$$

Setzen wir in (44) $r = R$, so erhalten wir für die maximale Erhebun[g]
am Rande des Gefäßes:

(45) $$z_{max.} = h + \frac{\omega^2 R^2}{4g}\,,$$

und ein Vergleich mit (43) ergibt, daß die Flüssigkeit am Rande ebens[o]
hoch über das Ruheniveau h sich erhebt, als sie sich in der Mitte da[r]
unter senkt.

Die Flächen gleichen Druckes sind die Niveauflächen, d. h. nach (4[..])
Flächen von der Gleichung:

(46) $$g z - \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2)\,\text{Const.},$$

also sämtlich Rotationsparaboloide um die z-Achse. In der nämliche[n]
Höhe, d. h. für $z = \text{Const.}$ variiert also der Druck nach der Gleichun[g]

(47) $$P = \text{Const.} + \frac{s\,\omega^2}{2}\left(x^2 + y^2\right) = \text{Const.} + \frac{s\,\omega^2 r^2}{2}\,,$$

er wächst also mit wachsendem r, ist am Rande am größten und in d[er]
Achse am kleinsten, was auch unmittelbar ersichtlich ist. Schreibt m[an]
Gleichung (43), indem man $h - z_0$, d. h. die Senkung unter das Norm[al]-
niveau, mit Δ bezeichnet, folgendermaßen:

$$\Delta = \frac{R^2}{4g}\cdot\omega^2\,,$$

so erkennt man, daß man in der Messung der Größe Δ eine Metho[de]
besitzt, um die Rotationsgeschwindigkeit zu messen. Man kann a[uch]
die obige Anordnung als Gyrometer benutzen, was auch tatsächli[ch]
geschieht.

Es wird von Nutzen sein, sich klar zu machen, welche Modifikation[en]
die in der vorigen Nummer besprochenen Gesetze des Druckes und [...]

Auftriebes, die für eine ruhende, der Schwere unterworfene Flüssigkeit gelten, hier in diesem Falle erleiden.

Wir denken uns einen Körper mit der Oberfläche S völlig eingetaucht und berechnen die resultierenden Druckkomponenten:

$$\mathfrak{R}_x = \int P \cos(nx)\,dS, \quad \mathfrak{R}_y = \int P \cos(ny)\,dS, \quad \mathfrak{R}_z = \int P \cos(nz)\,dS\,.$$

Für P setzen wir hier den Wert nach (41) ein und wenden den Greenschen Satz an. Dann folgt sofort:

$$(48) \qquad \mathfrak{R}_x = -\varepsilon\omega^2 \int x\,d\tau, \quad \mathfrak{R}_y = -\varepsilon\omega^2 \int y\,d\tau, \quad \mathfrak{R}_z = +\varepsilon g \int d\tau\,[1];$$

die Integrale erstreckten sich über das Volumen des eingetauchten Körpers.

Man erkennt daraus, daß im allgemeinen hier die horizontalen Druckkomponenten nicht verschwinden können; die vertikale Komponente ist dagegen unverändert geblieben. Führen wir die Schwerpunktkoordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ des eingetauchten Körpers ein, die bei konstanter Dichte sich bekanntlich schreiben lassen:

$$(49) \qquad \mathfrak{x} = \frac{\int x\,d\tau}{\int d\tau}, \quad \mathfrak{y} = \frac{\int y\,d\tau}{\int d\tau}, \quad \mathfrak{z} = \frac{\int z\,d\tau}{\int d\tau},$$

so kann (48) geschrieben werden, wenn noch $\int d\tau = V$ gesetzt wird:

$$(50) \qquad \mathfrak{R}_x = -\varepsilon\omega^2 V \cdot \mathfrak{x}; \quad \mathfrak{R}_y = -\varepsilon\omega^2 V \cdot \mathfrak{y}; \quad \mathfrak{R}_z = +\varepsilon g \cdot V\,.$$

Außer diesen Kräften wirken auf den Körper noch die Zentrifugalkraft und die Erdschwere. Bezeichnen wir mit $\bar{\varepsilon}$ die Dichte des Körpers, so sind die aus diesen Kräften entstehenden Komponenten, die $\mathfrak{K}_{1x}, \mathfrak{K}_{1y}, \mathfrak{K}_{1z}$ genannt werden mögen:

$$(51) \qquad \mathfrak{K}_{1x} = +\bar{\varepsilon}\omega^2 V \mathfrak{x}; \quad \mathfrak{K}_{1y} = +\bar{\varepsilon}\omega^2 V \cdot \mathfrak{y}; \quad \mathfrak{K}_{1z} = -\bar{\varepsilon} g \cdot V\,.$$

Die Gesamtkräfte $(\mathfrak{K}_x, \mathfrak{K}_y, \mathfrak{K}_z)$ sind also:

$$(52) \qquad \mathfrak{K}_x = \omega^2 V \mathfrak{x} (\bar{\varepsilon} - \varepsilon); \quad \mathfrak{K}_y = \omega^2 V \mathfrak{y} (\bar{\varepsilon} - \varepsilon); \quad \mathfrak{K}_z = g V (\varepsilon - \bar{\varepsilon})\,.$$

Aus ihnen geht folgendes hervor: Wenn $\varepsilon = \bar{\varepsilon}$ ist, d. h. der Körper dieselbe Dichtigkeit hat wie die Flüssigkeit, so sind die Druckkomponenten alle gleich Null. Der Körper ist dann in jeder Lage in der Flüssigkeit im Gleichgewicht, was auch unmittelbar einleuchtet. Ist $\bar{\varepsilon} > \varepsilon$, so erleidet der Körper eine horizontale Kraft, die proportional dem senkrechten Abstande $\sqrt{\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2}$ seines Schwerpunktes von der z-Achse ist, und die ihn von der Achse forttreibt; gleichzeitig wirkt auf ihn die um den Auftrieb

[1] Der Unterschied im Vorzeichen von $\mathfrak{R}_z$ mit der entsprechenden Formel (36) rührt daher, daß die z-Achse hier die umgekehrte Richtung besitzt, wie dort.

verminderte Schwerkraft nach unten hin. Der Körper kann also nur auf dem Boden des Gefäßes, und zwar am Umfange desselben im Gleichgewicht sein, da dann die wirkenden Kräfte durch die Gefäßwandung kompensiert werden. Nur in dem Falle, daß der Schwerpunkt des Körpers von vornherein auf der z-Achse liegt, wirken keine horizontalen Kraftkomponenten auf ihn, er würde dann — den Schwerpunkt immer auf der z-Achse — einfach zu Boden sinken. Doch ist diese Gleichgewichtslage eine labile, denn würde der Schwerpunkt ein wenig aus der z-Achse herausgerückt, so würde nach (52) sofort eine dem Abstande desselben von der z-Achse proportionale Kraft auf ihn wirken, die ihn von der Achse forttreibt.

Umgekehrt liegen die Verhältnisse, wenn $\bar{\varepsilon} < \varepsilon$. Dann wird der Körper durch eine dem Schwerpunktsabstande $\sqrt{\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2}$ proportionale Kraft zur Achse hingetrieben, und gleichzeitig zieht ihn der der Schwerkraft überlegene Auftrieb nach oben an die freie Oberfläche. In diesem Falle ist die Lage in der Nähe der z-Achse stabil, denn wenn der Körper aus derselben entfernt wird, so treten zurücktreibende Kräfte auf, die ihn Schwingungen um die Ruhelage ausführen lassen. Die Schwingungsdauer derselben läßt sich nach (52) leicht angeben. Die Gesamtmasse des Körpers ist $\bar{\varepsilon} V$, also besteht nach dem d'Alembertschen Prinzip die Gleichung:

$$(53) \qquad \begin{cases} \bar{\varepsilon} V \dfrac{d^2 \mathfrak{x}}{d t^2} + \omega^2 V (\varepsilon - \bar{\varepsilon}) \mathfrak{x} = 0, \quad \text{oder:} \\[2ex] \dfrac{d^2 \mathfrak{x}}{d t^2} + \omega^2 \dfrac{\varepsilon - \bar{\varepsilon}}{\bar{\varepsilon}} \mathfrak{x} = 0. \end{cases}$$

Das liefert, wie sofort aus der Theorie eines schwingenden Massenpunktes folgt, für die Schwingungsdauer T den Wert:

$$(54) \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} \sqrt{\frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon - \bar{\varepsilon}}}.$$

Ein zweites hierher gehörendes Problem, das gleichzeitig zur Abplattung der Erde infolge der Rotation in Beziehung steht, ist das folgende:

Eine vollkommen freie Flüssigkeit werde von einem Attraktionszentrum mit der dem Quadrat des Abstandes R von demselben umgekehrt proportionalen Kraft $\varphi(R) = -\frac{C}{R^2}$ $(c > 0)$ pro Masseneinheit angezogen. Im Ruhezustande ist dann, wie aus der Auseinandersetzung der Nummer 164 folgt, die Gleichgewichtsgestalt der Flüssigkeit eine Kugel. Von dieser Kugel wollen wir annehmen, daß sie um die z-Achse mit der Winkelgeschwindigkeit ω in Rotation versetzt wird. Die Aufgabe ist, die neue Gestalt der freien Oberfläche zu bestimmen (Fig. 202). Der Abstand eines Teilchens Q von der Rotationsachse sei $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Die Flüssigkeit werde als inkompressibel vorausgesetzt, so daß wir wieder haben:

$$U = \frac{P - P_0}{\varepsilon}.$$

Ferner sind die Komponenten $\mathfrak{K}_{1x}, \mathfrak{K}_{1y}, \mathfrak{K}_{1z}$ der Attraktionskraft:

(55) $$\mathfrak{K}_{1x} = -\frac{Cx}{R^3}, \quad \mathfrak{K}_{1y} = -\frac{Cy}{R^3}, \quad \mathfrak{K}_{1z} = -\frac{Cz}{R^3}.$$

Dazu treten noch die Komponenten der Zentrifugalkraft pro Masseneinheit, die genau so lauten, wie im vorhergehenden Beispiele:

(56) $$\mathfrak{C}_x = \omega^2 x, \quad \mathfrak{C}_y = \omega^2 y \quad \mathfrak{C}_z = 0.$$

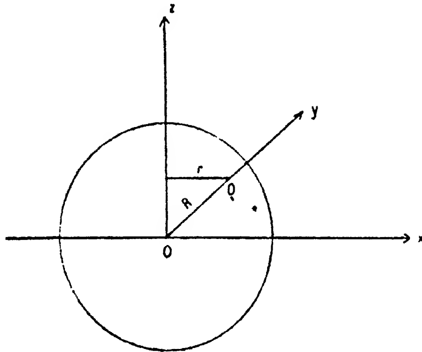


Fig. 202.

Die Gesamtkomponenten $(\mathfrak{K}_x, \mathfrak{K}_y, \mathfrak{K}_z)$ sind also:

(57) $$\mathfrak{K}_x = -\frac{Cx}{R^3} + \omega^2 x, \quad \mathfrak{K}_y = -\frac{Cy}{R^3} + \omega^2 y. \quad \mathfrak{K}_z = -\frac{Cz}{R^3},$$

und man erkennt leicht, daß sie aus einem Potential Ω ableitbar sind:

(58) $$\Omega = -\frac{C}{R} - \frac{\omega^2 r^2}{2};$$

mithin lautet die Gleichgewichtsbedingung:

(59) $$\frac{P}{\varepsilon} - \frac{C}{R} - \frac{\omega^2}{2} r^2 = \text{Const.},$$

und wenn wir etwa festsetzen, daß für die Oberfläche $P=0$ sein soll, so folgt als Gleichung derselben:

(60) $$\frac{C}{R} + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) = \text{Const.}$$

Für einen gewissen Wert von R, den wir etwa $\bar{R}$ nennen wollen, soll die anziehende Kraft pro Masseneinheit (d. h. die Beschleunigung) etwa den Wert g haben, der anderseits nach dem Attraktionsgesetz $= \frac{C}{\bar{R}^2}$ ist; also kann man C durch $g\bar{R}^2$ ersetzen. Das liefert statt (60):

(60a) $$\frac{g\bar{R}^2}{R} + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) = \text{Const.}$$

Führen wir räumliche Polarkoordinaten (R, ϑ, φ) ein, wo ϑ Zenithdistanz (das Komplement der geographischen Breite), φ das Azimut oder die geographische Länge bedeuten, so ist bekanntlich:

$$\begin{cases} x = R \sin\vartheta \cos\varphi, \\ y = R \sin\vartheta \sin\varphi, \\ z = R \cos\vartheta. \end{cases}$$

Das liefert für $x^2 + y^2$ den Wert $R^2 \sin^2\vartheta$, und das gibt in (60a) eingesetzt:

(60b) $$\frac{g\bar{R}^2}{R} + \frac{\omega^2}{2} R^2 \sin^2\vartheta = \text{Const.}$$

Nehmen wir nun an, daß für $\vartheta = 0$ (d. h. am „Pol", da ja ϑ die Zenithdistanz ist) an der Oberfläche R den schon vorhin eingeführten Wert $\bar{R}$ annimmt, so haben wir zur Bestimmung der Konstanten die Gleichung:

$$\text{Const.} = g\bar{R},$$

womit (60b) geschrieben werden kann:

(60c) $$\frac{1}{R} = \frac{1}{\bar{R}} - \frac{\omega^2 R^2}{2g\bar{R}^2} \sin^2\vartheta,$$

oder für kleine Winkelgeschwindigkeiten annähernd:

(61) $$R = \bar{R}\left\{1 + \frac{\omega^2 \bar{R}}{2g} \sin^2\vartheta\right\}.$$

Für $\omega = 0$ geht diese Gleichung, die ein sogenanntes Sphäroid darstellt, in eine Kugel über, wie es auch sein muß.

Wir wollen nun den maximalen und minimalen Radius R des Sphäroids bestimmen. Für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, d. h. für den Äquator erhält man:

(62a) $$R_{\max} = \bar{R}\left(1 + \frac{\omega^2 \bar{R}}{2g}\right),$$

während für $\vartheta = 0$, d. h. für den Polarhalbmesser:

(62b) $$R_{\min} = \bar{R}$$

folgt. Das Sphäroid stellt also etwa eine an den Polen abgeplattete Kugel dar. Die „Abplattung" hat den Wert:

(63) $$\frac{R_{\max} - R_{\min}}{R_{\min}} = \frac{\omega^2 \bar{R}}{2g}.$$

Für die Erde haben wir nun folgende Daten:

$$
(64)\qquad \begin{cases} \overline{R} = \dfrac{1}{2\pi}\cdot 4\cdot 10^9\,\mathrm{cm}, \\[2ex] g = 983{,}09\,\dfrac{\mathrm{cm}}{\mathrm{sec}^2}, \\[2ex] \omega^2 = \dfrac{2\pi\cdot 10^{-2}}{24\cdot 6\cdot 6}\,\mathrm{sec}^1. \end{cases}
$$

Damit berechnet sich für die Erde der Wert der Abplattung zu etwa $^1/_{600}$, während die geodätischen Messungen etwa $^1/_{300}$ ergeben haben, d. h. einen doppelt so großen Wert.

Woran liegt diese Diskrepanz? Zunächst daran, daß das angenommene Kraftgesetz nicht den Tatsachen entspricht. Wir haben festgesetzt, daß jeder Punkt mit der Kraft $-\frac{C}{R^2}$ vom Zentrum angezogen werde; bei der Massenattraktion jedoch ziehen sich die Massenteilchen gegenseitig nach diesem Gesetze an. Wenn wir diese Annahme zugrunde legen, so stoßen wir auf eine sehr erhebliche Schwierigkeit, die dem bisherigen Beispiele nicht anhaftete. Denn bisher war ja die Kraft für jeden Punkt der Flüssigkeit von vornherein gegeben, während die von allen umgebenden Punkten auf einen Punkt ausgeübte Kraft offenbar von der Gestalt der Flüssigkeit abhängt. Man müßte also die Gleichgewichtsform bereits kennen, um die Kräfte ansetzen zu können. Es gibt keine allgemeine Methode, um derartige Probleme zu behandeln; man hilft sich damit, daß man einen plausiblen Ansatz für die Gleichgewichtsform macht mit unbestimmten Konstanten, und diese aus den Bedingungen des Problems zu bestimmen sucht. Man macht z. B. im Falle der Erdfigur den naheliegenden Ansatz eines Rotationsellipsoides, und kann dann zeigen, daß in der Tat bei geeigneter Achsenbestimmung ein solches der Gleichgewichtsbedingung genügt. Doch läßt sich auch dieses Problem nur unter der Annahme konstanter Dichte durchführen. Man würde dann für die Abplattung der Erde den Wert $^1/_{230}$ erhalten, was dem wahren Werte schon näher kommt; den Grund der noch vorhandenen Abweichung erblickt man in der Inhomogenität der Erde.

Hervorgehoben sei übrigens bei dieser Gelegenheit das merkwürdige, von Jacobi gefundene Resultat, daß unter Umständen auch ein dreiachsiges Ellipsoid eine Gleichgewichtsfigur einer rotierenden Flüssigkeit sein kann. Und ferner hat H. Poincaré gezeigt, daß auch birnenförmige Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten möglich sind.

Wir gehen auf diese komplizierten Probleme nicht ein. Es gibt jedoch einen Fall, in dem man das allgemeine, oben skizzierte Problem lösen kann. Wenn man nämlich als Attraktionsgesetz zwischen zwei Punkten (x, y, z) und (x_a, y_a, z_a), deren Entfernung r_a und deren Massen m und m_a seien, das folgende wählt:

$$\varphi(r_a) = C m m_a \cdot r_a,$$

dann sind die Komponenten der auf (x, y, z) wirkenden Kraft:

(65)
$$\begin{cases} X_a = C \cdot m \cdot m_a(x_a - x)\,, \\ Y_a = C \cdot m \cdot m_a(y_a - y)\,, \\ Z_a = C \cdot m \cdot m_a(z_a - z)\,, \end{cases}$$

und die Komponenten der Kraft, die von allen Massenteilchen des Körpers auf (x, y, z) ausgeübt werden:

$$\begin{aligned} \sum_a X_a &= C \cdot m \sum m_a (x_a - x) = C \cdot m \sum m_a x_a - C \cdot m \cdot x \sum_a m_a\,, \\ \sum_a Y_a &= \qquad\qquad\qquad\quad = C \cdot m \sum m_a y_a - C \cdot m \cdot y \sum m_a\,, \\ \sum_a Z_a &= \qquad\qquad\qquad\quad = C \cdot m \sum m_a z_a - C \cdot m \cdot z \sum m_a\,. \end{aligned}$$

Wenn wir die Summen in Integrale verwandeln, die über den ganzen Körper zu erstrecken sind und wir ferner setzen:

$$m_a = \varepsilon\, d\tau\,,$$
$$\sum_a m_a = \int \varepsilon\, d\tau = M\,,$$

so folgt, wenn zur Abkürzung noch $C \cdot m = k$ geschrieben wird:

(66)
$$\begin{cases} \sum_a X_a = k\int \varepsilon x\, d\tau - kx\int \varepsilon\, d\tau = k\int \varepsilon x\, d\tau - Mkx\,, \\ \sum_a Y_a = \qquad\qquad\qquad\qquad\quad = k\int \varepsilon y\, d\tau - Mky\,, \\ \sum_a Z_a = \qquad\qquad\qquad\qquad\quad = k\int \varepsilon z\, d\tau - Mkz\,. \end{cases}$$

Führen wir nun die Koordinaten des Schwerpunktes ein durch die Gleichungen

$$M\mathfrak{x} = \int \varepsilon x\, d\tau\,,$$
$$M\mathfrak{y} = \int \varepsilon y\, d\tau\,,$$
$$M\mathfrak{z} = \int \varepsilon z\, d\tau\,,$$

so folgen, wenn man durch M dividiert, die nachstehenden Komponenten der Kraft pro Masseneinheit die wir mit $\mathfrak{K}'_x$, $\mathfrak{K}'_y$, $\mathfrak{K}'_z$, bezeichnen wollen:

(67)
$$\begin{cases} \mathfrak{K}'_x = k \cdot \mathfrak{x} - k \cdot x\,, \\ \mathfrak{K}'_y = k \cdot \mathfrak{y} - k \cdot y\,, \\ \mathfrak{K}'_z = k \cdot \mathfrak{z} - k \cdot z\,. \end{cases}$$

Dazu treten die alten Komponenten der Zentrifugalkräfte, nämlich

$$\mathfrak{C}_x = \omega^2 x\,, \quad \mathfrak{C}_y = \omega^2 y\,, \quad \mathfrak{C}_z = 0\,.$$

so daß die in toto wirkenden Kraftkomponenten lauten:

$$(68)\qquad \begin{cases} \mathfrak{K}_x = k\mathfrak{x} - kx + \omega^2 x\,, \\ \mathfrak{K}_y = k\mathfrak{y} - ky + \omega^2 y\,, \\ \mathfrak{K}_z = k\mathfrak{z} - kz\,. \end{cases}$$

Diese Kräfte sind offenbar von dem Potential Ω ableitbar:

$$(69)\qquad \Omega = \frac{k}{2}\left\{(\mathfrak{x} - x)^2 + (\mathfrak{y} - y)^2 + (\mathfrak{z} - z)^2\right\} - \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2).$$

Daraus folgt für inkompressible Flüssigkeiten von konstanter Dichte als Gleichgewichtsbedingung:

$$(70)\qquad \frac{P}{\varepsilon} + \frac{k}{2}\left\{(\mathfrak{x} - x)^2 + (\mathfrak{y} - y)^2 + (\mathfrak{z} - z)^2\right\} - \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) = \text{Const.}$$

Nehmen wir für die freie Oberfläche $P = 0$ an, so lautet die Gleichung derselben:

$$(71)\qquad (\mathfrak{x} - x)^2 + (\mathfrak{y} - y)^2 + (\mathfrak{z} - z)^2 - \frac{\omega^2}{k}(x^2 + y^2) = \text{Const.}$$

Verlegen wir den Koordinatenanfangspunkt in den Schwerpunkt, d. h. machen wir

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{y} = \mathfrak{z} = 0\,,$$

so folgt aus (71):

$$(x^2 + y^2)\left(1 - \frac{\omega^2}{k}\right) + z^2 = \text{Const.} = c^2, \quad \text{oder:}$$

$$(72)\qquad \frac{x^2 + y^2}{\left(\dfrac{c^2}{1 - \dfrac{\omega^2}{k}}\right)} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

d. h. je **nachdem** $1 - \frac{\omega^2}{k} \gtreqless 0$, ein Rotationsellipsoid, oder ein Rotationshyperboloid um die z-Achse. Daraus ergibt sich folgendes: Ist die Flüssigkeit vollkommen frei und von endlicher Masse, so kann das Hyperboloid keine Gleichgewichtsform sein, da es bis ins Unendliche reicht. Dann bleibt nur noch das Ellipsoid übrig, und damit diese Gestalt möglich ist, muß die Rotationsgeschwindigkeit unterhalb einer bestimmten Grenze bleiben.

167. Kleine Schwingungen einer Flüssigkeit (Schallbewegung).

Wir gehen jetzt über zur Untersuchung der kleinen Schwingungen einer Flüssigkeit und zwar zunächst einer inkompressiblen mit räumlich konstanter Dichte. Setzen wir zu diesem Zwecke die äußeren Kräfte X, Y, Z in Gleichung (6) gleich Null, so haben wir die folgenden Differentialgleichungen:

$$(73)\quad \begin{cases} \varepsilon \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \lambda \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial \xi}{\partial x} + \dfrac{\partial \eta}{\partial y} + \dfrac{\partial \zeta}{\partial z}\right), \\ \varepsilon \dfrac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \lambda \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial \xi}{\partial x} + \dfrac{\partial \eta}{\partial y} + \dfrac{\partial \zeta}{\partial z}\right), \\ \varepsilon \dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \lambda \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial \xi}{\partial x} + \dfrac{\partial \eta}{\partial y} + \dfrac{\partial \zeta}{\partial z}\right). \end{cases}$$

Darin ist ε als vom Druck unabhängig und als Konstante behandelt, wie bei festen Medien. Differentiieren wir diese der Reihe nach bzw. nach x, y, z und addieren sie, so folgt, wenn wir $\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}$ wieder mit Σ bezeichnen:

$$(74)\quad \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial t^2} = \frac{\lambda}{\varepsilon} \Delta \Sigma,$$

d. h. die Wellengleichung. Und zwar sind die Wellen, mit denen wir es hier zu tun haben, offenbar rotationslose Dilatationswellen. Nehmen wir den speziellen Fall, daß Σ nur von einer Koordinate abhängt, etwa von x, so haben wir:

$$(75)\quad \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \frac{\lambda}{\varepsilon}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\right\} = 0.$$

Diese Gleichung kann durch das Verschwinden der geschweiften Klammer befriedigt werden, und daraus geht hervor, daß wir es in der Tat mit Longitudinalwellen zu tun haben. Transversalwellen sind, wie wir schon früher erkannten, in einer Flüssigkeit nicht möglich, da ihr Torsionsmodul $\mu = 0$ ist. Man kann dies auch direkt folgendermaßen erkennen: Wir differentiieren die erste Gleichung nach y, die zweite nach x und subtrahieren. Dann fällt das zweite Glied fort und es bleibt:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left\{\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x}\right\} = 0,$$

d. h.

$$(76)\quad \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x} = At + B \quad (A, B \text{ Constanten}).$$

Die linke Seite der letzten Gleichung ist aber nichts anderes als die doppelte Rotationskomponente um die z-Achse, die wir früher mit r bezeichnet hatten, und die Größe $A = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x}\right)$ ist offenbar die konstante doppelte Rotationsgeschwindigkeit. Man erkennt aus (76), daß die Rotationskomponenten hier nicht, wie in festen elastischen Medien [Kapitel XIII, Gleichung (20)] der Wellengleichung gehorchen, sondern daß nur eine der Zeit proportionale Rotation möglich ist. Ohne also der Allgemeinheit Abbruch zu tun, können wir deshalb in (76) A und $B = 0$ nehmen, d. h. von einer Rotation ganz absehen, da wir ja hier nur die kleinen Schwingungen untersuchen wollen. Solche Dilatationswellen, wie sie in Gleichung (74) und (75) formuliert sind, treten auf, wenn ein Schall durch eine Flüssigkeit sich fortpflanzt und wir wollen sie daher einfach Schallwellen nennen.

Die Hauptfrage ist zunächst die nach der Geschwindigkeit der Fortpflanzung. Nach den Auseinandersetzungen des XIII. Kapitels sieht man, daß dieselbe gleich ist:

(77) $$c = \sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}.$$

Da für tropfbare Flüssigkeiten der Kompressionsmodul λ eine große Zahl ist, so ist c im allgemeinen für solche ziemlich beträchtlich. In der folgenden Tabelle sind einige experimentell bestimmte Schallgeschwindigkeiten zusammengestellt und mit den theoretischen Werten verglichen.

Name	$\lambda \cdot 10^{-6}$ in Atmosphären	ε	$\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}$ m/sec	c beob. in m/sec
Wasser . . .	1/50	1	1424	1435
Alkohol . . .	1/82,8	0,80	1243	1264
Äther	1/111	0,72	1132	1150

Man erkennt, daß die Übereinstimmung sehr gut ist.

Einer besonderen Untersuchung bedürfen noch die Gase, d. h. die stark kompressiblen Flüssigkeiten. Bei diesen ist die Dichte vom Drucke abhängig, und es ist wegen dieser Komplikation gar nicht zu erwarten, daß die Wellengleichung (74) oder (75) in Strenge gilt. Dies ist auch tatsächlich nicht der Fall; bedenkt man indessen, daß bei den Schallwellen in den allermeisten Fällen die Druckschwankungen, und folglich auch die Schwankungen der Dichte, sehr klein sind, so überzeugt man sich leicht, daß dieselbe Wellengleichung auch hier in erster Näherung noch gilt. Was die Berechnung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit nach Gleichung (77) angeht, so ist hier zunächst noch zweifelhaft, ob für λ der isotherme Kompressionsmodul nach Gleichung (21) oder der adiabatische nach Gleichung (23) zu nehmen ist. Das kann nur durch die Erfahrung entschieden werden. Man hat früher (Newton) geglaubt, daß der isotherme Modul zu verwenden sei. Damit wäre nach Gleichung (21) und (77) für Gase:

(78) $$c = \sqrt{\frac{P}{\varepsilon}}.$$

Das ergibt z. B. für Luft von 0° C. und Atmosphärendruck folgendes:

$$P = 76 \cdot 13{,}6 \cdot 981 \frac{\text{dyn}}{\text{cm}^2},$$
$$\varepsilon = 0{,}001293.$$

Das liefert einen Wert für die Schallgeschwindigkeit, der mit dem Experiment durchaus nicht übereinstimmt, nämlich ungefähr $280 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$. Erst Laplace erkannte, daß wegen der Schnelligkeit der Schall-

schwingungen der Vorgang als adiabatisch zu betrachten sei, und da folgt nach (23) und (77):

$$c = \sqrt{\frac{Pk}{\varepsilon}}, \tag{79}$$

die an Stelle von (78) zu treten hat. Für Luft ist $k = \frac{c_p}{c_v} = 1{,}41$, al ist die Schallgeschwindigkeit in Luft von 0° und 760 mm Druck:

$$c = 280\sqrt{1{,}41} = 333{,}2 \frac{\text{m}}{\text{sec}},$$

was völlig mit der Erfahrung übereinstimmt. Man benutzt diese Gleichung sogar umgekehrt, um die Größe $\frac{c_p}{c_v}$, die für die Wärmetheor von Wichtigkeit ist, zu bestimmen.

Wir wollen jetzt zur Untersuchung von Schallwellen übergeh die nur von einer Koordinate, etwa der x-Koordinate abhängig sin Dafür gilt Gleichung (75), wo wir für $\frac{\lambda}{\varepsilon}$ das Quadrat der Schallgeschwindi keit c^2 einsetzen:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0. \tag{75}$$

Solche Wellen werden z. B. in Orgelpfeifen durch Anblasen erzeug Zur Gleichung (75) sind nun noch die Randbedingungen hinzuzufüge Ist die Pfeife an beiden Enden — ihre Länge sei der Einfachheit halb $= 1$ angenommen — offen, so lautet diese Bedingung, ebenso wie bei freien longitudinalen Stabe:

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_0 = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_1 = 0. \tag{80}$$

Ist dagegen die Pfeife am Ende $x = 0$ offen, am anderen geschloss („gedackt"), so hat man dafür:

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_0 = \xi(1) = 0. \tag{81}$$

Wir haben also genau dieselben Probleme vor uns, wie beim longitudina schwingenden Stabe, einmal, wenn beide Enden frei sind, das zweite Ma wenn ein Ende frei, das andere festgeklemmt ist. Alle Resultat übertragen sich daher auf den vorliegenden Fall. So erhal man z. B. im Falle der beiderseits offenen Orgelpfeife, d. h. der Grenz bedingung (80):

$$\xi = \sqrt{2} \sum_{\nu}^{1,\infty} \cos \nu \pi x \{A_\nu \cos \nu \pi c t + B_\nu \sin \nu \pi c t\}. \tag{82}$$

Für den Grundton hat daher ξ einen Knoten an der Stelle $x = {}^1/_2$; fü den ersten Oberton drei Knoten an den Stellen $x = {}^1/_6, {}^1/_2, {}^5/_6$ usw. Gena in der Mitte zwischen den Knoten liegen die Bäuche. Wir haben bishe

immer schlechtweg von Knoten gesprochen, jetzt dagegen ist es notwendig, hinzuzufügen, um welche Größe es sich handelt. Hier ist von der Verschiebung ξ die Rede. Man sagt also genauer: „Knoten der Bewegung" und entsprechend: „Bäuche der Bewegung". Diesen Unterschied zu machen ist hier notwendig, weil man auch von Knoten und Bäuchen des Druckes und der Geschwindigkeit reden kann. In der Tat erkennt man z. B. aus Gleichung (4), daß in unserem Falle $P = -\lambda \frac{\partial \xi}{\partial x}$, d. h. proportional $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ ist. Differentiieren wir daher Gleichung (75) nach x, so kann sie geschrieben werden:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}, \tag{83}$$

und die Grenzbedingungen (80) gehen über in:

$$P(0) = P(1) = 0. \tag{83a}$$

Man erkennt daraus, daß der Druck P zwar derselben Differentialgleichung wie die Verrückung ξ, aber einer anderen Randbedingung gehorcht, und deshalb sind die Knotenlagen auch in beiden Fällen verschieden. Die Lösung für P ist nun offenbar identisch mit der der Saitenschwingung, kann also geschrieben werden:

$$P = \sum_{\nu}^{1,\infty} \sin \nu \pi x \{C_\nu \cos \nu \pi c t + D_\nu \sin \nu \pi c t\},$$

und man erkennt daraus, daß der Grundton zwei Knoten des Druckes an beiden Enden liefert, der erste Oberton einen weiteren in der Mitte, der zweite Oberton vier Knoten für $x = 0$, $1/3$, $2/3$, 1 usw. Man sieht daher: **Die Knoten des Druckes fallen zusammen mit den Bäuchen der Bewegung und umgekehrt. Die Knoten des Druckes liegen also von den entsprechenden Knoten der Bewegung um $1/4$ Wellenlänge entfernt.** Ferner sieht man leicht durch Differentiation von (82) nach t, daß Knoten und Bäuche der Geschwindigkeit mit denen der Verrückung zusammenfallen.

Ganz analog sind diese Resultate für den Fall der gedackten Pfeifen, d. h. der Bedingung (81). Man leitet aus diesen Betrachtungen unmittelbar folgende Sätze ab:

Die Schwingungszahlen der möglichen Eigentöne einer offenen Pfeife verhalten sich wie die ganzen Zahlen; die Wellenlänge des Grundtones ist gleich der doppelten Pfeifenlänge. Für gedackte Pfeifen verhalten sich die Frequenzen der Eigentöne wie die ungeraden Zahlen; die Wellenlänge des Grundtones ist gleich der vierfachen Pfeifenlänge. Wird daher eine offene Pfeife gedackt, so erniedrigt sich der Grundton um eine Oktave.

Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, daß für eine offene Pfeife die Grenzbedingung $\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_1 = 0$ nicht ganz exakt ist, da in Wirklichkeit die Erregung vom Ende der Pfeife sich in Kugelwellen in den Raum ausbreitet. Damit hängt zusammen, daß auch die Wellenlänge z. B. des Grundtones nicht genau gleich der doppelten Pfeifenlänge ist, sondern etwas größer. Die strenge Theorie ist von Helmholtz in seiner berühmten Arbeit: „Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden"[1]) gegeben worden, auf die hier verwiesen sei.

168. Das Dopplersche Prinzip.

Die Lösungen der in der vorigen Nummer betrachteten Gleichung:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

besitzen gewisse Eigenschaften, wenn man in ihnen die bisherigen Variabeln x und t durch lineare Aggregate derselben:

$$(84) \quad \begin{cases} x' = a_1 x + b_1 t\,, \\ t' = a_2 x + b_2 t \quad (a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2 \text{ Konstanten}) \end{cases}$$

ersetzt.

Wir wollen eine Lösung der ursprünglichen Gleichung mit ξ oder genauer mit $\xi(x, t)$ bezeichnen, und diese, die Funktion von x und t ist, gehe, wenn darin x' und t' an die Stelle der bisherigen Variabeln gesetzt werden, in ξ' über, so daß $\xi' = \xi(x', t')$ ist.

Dann ist zunächst klar, daß die Gleichung bestehen muß:

$$(85) \quad \frac{\partial^2 \xi'}{\partial t'^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi'}{\partial x'^2},$$

da ja ξ' in x' und t' dieselbe Form hat, wie ξ in x und t.

Aber bei geeigneter Konstantenbestimmung in der Substitution (84) gehorcht ξ' auch der ursprünglichen Gleichung, d. h. es besteht die Beziehung

$$(86) \quad \frac{\partial^2 \xi'}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi'}{\partial x^2}.$$

Zu der dazu notwendigen Konstantenbestimmung in (84) gehen wir nunmehr über. Zunächst ist, da ξ' Funktion von x' und t' ist:

$$\frac{\partial \xi'}{\partial x} = \frac{\partial \xi'}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial \xi'}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x},$$

und mit Rücksicht auf (84):

[1]) Wissenschaftliche Abhandlungen I, pag. 303—382.

$$\frac{\partial \xi'}{\partial x} = a_1 \frac{\partial \xi'}{\partial x'} + a_2 \frac{\partial \xi'}{\partial t'},$$

und durch nochmalige Differentiation folgt leicht:

$$\frac{\partial^2 \xi'}{\partial x^2} = a_1^2 \frac{\partial^2 \xi'}{\partial x'^2} + 2\, a_1\, a_2 \frac{\partial^2 \xi'}{\partial x'\, \partial t'} + a_2^2 \frac{\partial^2 \xi'}{\partial t'^2}\,. \tag{87}$$

Ebenso erhält man:

$$\frac{\partial^2 \xi'}{\partial t^2} = b_1^2 \frac{\partial^2 \xi'}{\partial x'^2} + 2\, b_1\, b_2 \frac{\partial^2 \xi'}{\partial x'\, \partial t'} + b_2^2 \frac{\partial^2 \xi'}{\partial t'^2}\,. \tag{88}$$

Die Forderung (86) schreibt sich nach (87) und (86) also in der Form:

$$b_1^2 \frac{\partial \xi'}{\partial x'^2} + 2 b_1 b_2 \frac{\partial^2 \xi'}{\partial x'\, \partial t'} + b_2^2 \frac{\partial^2 \xi'}{\partial t'^2} = c^2 \left\{ a_1^2 \frac{\partial^2 \xi'}{\partial x'^2} + 2\, a_1\, a_2 \frac{\partial^2 \xi'}{\partial x'\, \partial t'} + a_2^2 \frac{\partial^2 \xi'}{\partial t'^2} \right\},$$

oder in anderer Anordnung:

$$\frac{\partial^2 \xi'}{\partial t'^2} \left\{ b_2^2 - c^2 a_2^2 \right\} + 2 \frac{\partial^2 \xi'}{\partial x'\, \partial t'} \left\{ b_1\, b_2 - c^2 a_1\, a_2 \right\} = c^2 \frac{\partial^2 \xi'}{\partial x'^2} \left\{ a_1^2 - \frac{b_1^2}{c^2} \right\}.$$

Hält man dies mit (85) zusammen, so erkennt man, daß folgende Relationen zwischen den Koeffizienten bestehen müssen:

$$\begin{cases} b_2^2 - c^2 a_2^2 = a_1^2 - \dfrac{b_1^2}{c^2}, \\ b_1\, b_2 - c^2 a_1\, a_2 = 0. \end{cases} \tag{90}$$

Da im ganzen vier Koeffizienten vorhanden sind, so kann zunächst über zwei willkürlich verfügt werden: dann sind die beiden anderen durch die Gleichungen (90) bestimmt. Wir wollen zunächst der Konstante b_1 den Wert $-a_1 c_0$ beilegen, während a_1 erst später festgesetzt werden wird. Dann ist

$$x' = a_1 (x - c_0\, t),$$

und es gehört x' offenbar einem Koordinatensystem an, dessen Nullpunkt sich mit der Geschwindigkeit c_0 in der Richtung der positiven x-Achse bewegt.

Aus der zweiten Gleichung (90) folgt dann:

$$-c_0\, b_2 = c^2 a_2,$$

oder

$$b_2 = -\frac{c^2 a_2}{c_0}\,. \tag{91}$$

Setzt man diesen Wert in die erste Gleichung (90) ein, so folgt für a_2, ausgedrückt durch a_1, c_0, c:

$$a_2^2 = \frac{a_1^2 c_0^2}{c^4},$$

$$a_2 = \pm \frac{a_1 c_0}{c^2}\,.$$

Von diesen beiden Werten führt nur der mit dem Minuszeichen behaftete zu von Null verschiedenen Werten von a_1. Wir können also den ersteren als uninteressant beiseite lassen. Wir nehmen also:

$$a_2 = -\frac{a_1 c_0}{c^2} \tag{92}$$

und daraus ergibt sich nach (91):

$$b_2 = \frac{c^2}{c_0} \frac{a_1 c_0}{c^2} = + a_1 . \tag{93}$$

Also können wir nunmehr die Substitution (84) schreiben:

$$\left\{ \begin{aligned} x' &= a_1 (x - c_0 t), \\ t' &= a_1 \left(-\frac{c_0}{c^2} x + t \right), \end{aligned} \right. \tag{94}$$

wo jetzt nur noch a_1 zu bestimmen ist. Zunächst rechnen wir aus (94) die ursprünglichen Variabeln x und t als Funktionen von x' und t' aus; das ergibt:

$$\left\{ \begin{aligned} x &= \frac{x' + c_0 t'}{a_1 \left(1 - \frac{c_0^2}{c^2}\right)}, \\ t &= \frac{\frac{c_0}{c^2} x' + t'}{a_1 \left(1 - \frac{c_0^2}{c^2}\right)} . \end{aligned} \right. \tag{95}$$

Nunmehr wollen wir, indem wir statt $-c_0$ den Wert $+c_0$ einführen, die übrigen Konstanten aber beibehalten, von dem System (x', t') wieder zum ursprünglichen (x, t) übergehen. Dann müssen die Gleichungen bestehen, die man aus (94) erhält, wenn man die gestrichenen mit den ungestrichenen Größen vertauscht, und das Vorwie verzeichen von c_0 abändert. Es folgt also:

$$\left\{ \begin{aligned} x &= a_1 (x' + c_0 t'), \\ t &= a_1 \left(\frac{c_0}{c^2} x' + t' \right) . \end{aligned} \right. \tag{96}$$

Vergleicht man diese Ausdrücke mit denen der Gleichung (95), so sieht man, daß folgende Gleichung für a_1 bestehen muß, damit (95) und (96), langt, identisch werden:

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{c_0^2}{c^2}}} . \tag{97}$$

Damit wird endlich die Substitution (94):

(98)
$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - c_0 t}{\sqrt{1 - \dfrac{c_0^2}{c^2}}}, \\ t' = \dfrac{-\dfrac{c_0}{c^2} x + t}{\sqrt{1 - \dfrac{c_0^2}{c^2}}}. \end{cases}$$

Für so kleine Geschwindigkeiten c_0, daß man $\left(\frac{c_0}{c}\right)^2$ gegen 1 vernachlässigen kann, was wir im folgenden der Einfachheit halber voraussetzen, ist einfacher:

(98a)
$$\begin{cases} x' = x - c_0 t, \\ t' = -\dfrac{c_0}{c^2} x + t. \end{cases}$$

Macht man diese Substitution in einer Lösung der Wellengleichung $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$, so ist die neu entstehende Funktion wieder eine Lösung dieser Gleichung.

Es sei nun ξ eine solche Lösung der Wellengleichung. Diese Lösung nimmt längs einer gegebenen Oberfläche, z. B. längs der Ebene $x=0$, gewisse Werte an, die natürlich von der Zeit abhängen; die Lösung $\underset{x=0}{\xi(t)}$ stellt den Schwingungszustand in der Fläche dar; man kann etwa sagen: $\xi_{x=0}$ stellt das Gesetz dar, nach dem die betrachtete Oberfläche Schallwellen aussendet. Um gleich zu einem Beispiele zu kommen, nehmen wir etwa:

(99a)
$$\xi = \cos 2\pi \left(n t - \frac{x}{\lambda}\right),$$

wo n die Schwingungszahl, λ die Wellenlänge bedeutet; zwischen beiden muß die Relation bestehen, die für alle Wellenbewegungen gilt: $c = n\lambda$. Für die Ebene $x=0$ folgt daraus:

(99b)
$$\xi_{x=0} = \cos 2\pi n t.$$

Diese Gleichung gibt an, wie die Ebene „tönt".

Machen wir zunächst in (99b) die Substitution (98a), so folgt für die Ebene $x'=0$:

$$\xi'_{x'=0} = \cos 2\pi n t' = \cos 2\pi n \left(t - \frac{c_0}{c^2} x\right),$$

oder, da $x'=0$ nach (98a) bedeutet, daß $x = c_0 t$ ist:

$$\xi'_{x'=0} = \cos 2\pi n t \left\{1 - \frac{c_0^2}{c^2}\right\},$$

und das ist bei der hier benutzten Genauigkeit d. h. bei Vernachlässigung von Gliedern 2ter Ordnung in $\left(\frac{c_0}{c}\right)$ identisch mit:

(100a)
$$\xi'_{x'=0} = \cos 2\pi n t.$$

Die Ebene $x' = 0$, die mit der Geschwindigkeit c_0 längs der positiven x-Achse sich fortbewegt, tönt nach diesem Gesetze. Man erkennt, daß sich hier, wenigstens in erster Annäherung, nichts geändert hat. Dies ändert sich jedoch, wenn wir die von dieser Wand, die als bewegte Schallquelle aufgefaßt werden kann, fortgepflanzten Wellen betrachten. Diese erhält man aus (99a), wenn man dort ebenfalls die fragliche Substitution (98a) macht. Es folgt wieder bei den nämlichen Vernachlässigungen:

$$\xi' = \cos 2\pi \left[n\left(t - \frac{c_0}{c^2}\,x\right) - \frac{x - c_0 t}{\lambda} \right] = \cos 2\pi \left[n t - \frac{c_0}{c\lambda}\,x - \frac{x}{\lambda} + \frac{n c_0}{c}\,t \right],$$

oder endlich:

$$\text{(100b)} \qquad \xi' = \cos 2\pi \left(1 + \frac{c_0}{c}\right)\left(n t - \frac{x}{\lambda}\right).$$

Das ist eine Welle, deren Schwingungszahl:

$$\text{(101)} \qquad n' = n\left(1 + \frac{c_0}{c}\right)$$

ist. Für einen auf der positiven x-Achse sich befindenden Beobachter erscheint der Ton also im Verhältnis

$$\frac{n'}{n} = 1 + \frac{c_0}{c}$$

erhöht zu sein. Wird c_0 durch $-c_0$ ersetzt, so erniedrigt sich der Ton entsprechend. Wir erhalten also den zuerst von Doppler ausgesprochenen Satz: „Wenn eine Schallwelle sich mit der Geschwindigkeit c_0 dem Beobachter nähert, so erhöht sich der Ton im Verhältnis $1 + \frac{c_0}{c}$; wenn sie sich mit der Geschwindigkeit c_0 entfernt, so erniedrigt sich der Ton im Verhältnis $1 - \frac{c_0}{c}$.

Ganz ähnliche Resultate, die durch elementare Rechnungen zu erhalten sind, gelten, wenn die Schallquelle ruht und der Beobachter sich bewegt: bei Entfernung des Beobachters sinkt der Ton, bei Annäherung erhöht er sich, und endlich kann man beide Fälle zusammen betrachten: bewegte Schallquelle und bewegter Beobachter; dann superponieren sich beide Effekte.

Das im Vorstehenden formulierte Dopplersche Prinzip ist von seinem Urheber nicht exakt bewiesen und daher vielfach bekämpft worden. Erst W. Voigt hat es auf die im Vorhergehenden gegebene strenge Basis gestellt.

Es sei schon hier bemerkt, daß diese Überlegungen auch in der Optik bewegter Körper eine Rolle spielen, und insbesondere steht zurzeit die Substitution (98) mit ihren Konsequenzen im Vordergrunde des Interesses. Darauf werden wir im zweiten Bande ausführlich einzugehen haben.

Siebzehntes Kapitel.

Wirbelfreie (Potential-)Bewegung einer Flüssigkeit.

169. Allgemeinste Bewegung eines Flüssigkeitselementes.

Wir beginnen unsere Untersuchung mit einer Betrachtung der allgemeinsten möglichen Bewegung eines Flüssigkeitselementes. Diese Untersuchung, die sich an die des IX. Kapitels anschließt, wurde in voller Allgemeinheit und in voller Erkenntnis ihrer Tragweite von Helmholtz in seiner berühmten Abhandlung: „Über die Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen", durchgeführt. Auf den Inhalt dieser Abhandlung kommen wir im nächsten Kapitel eingehend zurück.

Wie im IX. Kapitel bezeichnen wir die augenblicklichen Koordinaten eines Flüssigkeitsteilchens mit x, y, z; die Koordinaten desselben Teilchens zur Zeit $t=0$, die Anfangskoordinaten, durch a, b, c. Die Bewegung der ganzen Flüssigkeit ist also bestimmt, wenn x, y, z als Funktionen von a, b, c gegeben sind. Daraus geht hervor, daß die totalen Ableitungen von x, y, z nach der Zeit t (selbstverständlich bei konstantem a, b, c), genau wie in der Dynamik der Massenpunkte die Geschwindigkeitskomponenten u, v, w eines Flüssigkeitsteilchens darstellen. Wir haben also:

$$(1) \qquad \frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w.$$

Die Geschwindigkeitskomponenten u, v, w selbst sind wieder als Funktionen des Ortes (x, y, z) und der Zeit (t) zu betrachten. Nennen wir bei konstanter Zeit die Geschwindigkeitskomponenten eines bestimmten Punktes (x, y, z) resp. u, v, w, die eines Nachbarpunktes $(x+dx,\ y+dy,\ z+dz)$ zur selben Zeit resp. u', v', w', so können wir schreiben:

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} u' &= u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz, \\ v' &= v + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz, \\ w' &= w + \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz, \end{aligned} \right.$$

oder auch, indem wir die Relativgeschwindigkeiten $u'-u,\ v'-v,\ w'-w$, die wir durch $\delta u,\ \delta v,\ \delta w$ bezeichnen wollen, einführen:

$$(3)\quad \begin{cases} \delta u = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz, \\ \delta v = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz, \\ \delta w = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz. \end{cases}$$

Das kommt offenbar auf die Einführung eines mitbewegten Koordinatensystems heraus; in unserer früheren Ausdrucksweise können wir sagen, daß die Relativgeschwindigkeit als lineare homogene Vektorfunktion der Verschiebung $d\mathfrak{s}$ (mit den Komponenten dx, dy, dz) dargestellt ist. Diese kann stets in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Teil gespalten werden.

In der Tat kann man die Gleichungen (3) folgendermaßen schreiben

$$(4)\quad \begin{cases} \delta u = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) dx + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) dz \\ \qquad + 0 \cdot dx - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dy + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) dz. \\ \delta v = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) dz \\ \qquad + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx + 0 \cdot dy - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) dz, \\ \delta w = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) dx + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz \\ \qquad - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) dx + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) dy + 0 \cdot dz. \end{cases}$$

Man kann also die Komponenten der Relativgeschwindigkeit in zwei Teilen darstellen ($\delta u_1 + \delta u_2$, $\delta v_1 + \delta v_2$, $\delta w_1 + \delta w_2$), derart, daß man hat

$$(5)\quad \begin{cases} \delta u_1 = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) dy + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) dz, \\ \delta v_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) dz, \\ \delta w_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) dx + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz, \end{cases}$$

sowie:

$$(6)\quad \begin{cases} \delta u_2 = \quad 0 \cdot dx - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dy + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) dz, \\ \delta v_2 = + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx + 0 \cdot dx - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) dz, \\ \delta w_2 = - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) dx + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) dy + 0 \cdot dz. \end{cases}$$

Die Gleichungen (5) stellen eine lineare infinitesimale Deformation symmetrischem Koeffizientenschema vor, von genau derselben

wie die Gleichungen (30) des IX. Kapitels (pag. 465): Sie stellen mithin eine Dehnung nach 3 zueinander senkrechten Achsen dar.

Die Gleichungen (6) stellen eine lineare infinitesimale Deformation mit antisymmetrischem Koeffizientenschema dar, genau von der Art der Gleichungen (19) des IX. Kapitels (pag. 459): Sie stellen mithin eine Rotation dar.

Die Gleichungen (4), die aus (5) und (6) additiv zusammengesetzt sind, stellen nun die allgemeinste Bewegung eines Flüssigkeitsteilchens, bezogen auf ein mitbewegtes Koordinatensystem, dar, d. h. das Flüssigkeitsteilchen erleidet im allgemeinen sowohl eine Dilatation nach drei zueinander senkrechten Achsen, als auch eine Rotation.

Aus der Linearität der Gleichungen (4) ergeben sich, genau wie im IX. Kapitel, folgende Sätze: Punkte, die zu Anfang der Bewegung auf einer Ebene oder geraden Linie liegen, liegen stets auf einer Ebene oder einer Geraden. Daraus folgt insbesondere, daß die Flüssigkeitsteilchen, die zu Anfang im Innern eines rechtwinkeligen Parallelepipeds liegen, stets im Innern desselben bleiben. Das Parallelepiped natürlich ändert seine Dimensionen (infolge der Dilatation) und seine Kantenrichtungen (infolge der Rotation), aber es wird stets von demselben Flüssigkeitsteilchen gebildet, während es in der Flüssigkeit fortschwimmt. Die sechs Koeffizienten der Gleichungen (5) sind nun folgende:

$$\frac{\partial u}{\partial x},\quad \frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial w}{\partial z},\quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right),\quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right),\quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

Bedenkt man, daß $u = \frac{dx}{dt}$ oder, da $x = a + \xi$, wenn ξ die Verrückung parallel der x-Achse bedeutet, $u = \frac{d\xi}{dt}$, so erkennt man die Richtigkeit folgender Gleichungen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{dx}{dt} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{d\xi}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \xi}{\partial x};\quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right);\quad \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right);$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial t}\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial \eta}{\partial x}\right);\quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \eta}{\partial z}+\frac{\partial \xi}{\partial z}\right);$$

u. s. f.

Die jetzigen Koeffizienten der Gleichung (5) sind also sämtlich die totalen zeitlichen Ableitungen der Koeffizienten der entsprechenden Gleichungen (30) des IX. Kapitels. Dort nannten wir die Größe $\Sigma = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}$ die Dilatation; entsprechend nennen wir hier die Größe $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{d\Sigma}{dt}$ die Dilatationsgeschwindigkeit. Bezeichnen wir der Kürze halber hier Differentiationen nach der Zeit durch einen Punkt über dem betreffenden Buchstaben, so ist demgemäß:

(7) die „Dilatationsgeschwindigkeit“: $\dot{\Sigma} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$; ebenso in der Bezeichnungsweise des IX. Kapitels:

$$\dot{x}_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \dot{y}_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \dot{z}_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \quad \dot{z}_y = \dot{y}_z = \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right);$$

$$\dot{x}_y = \dot{y}_x = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right); \quad \dot{x}_z = \dot{z}_x = \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right).$$

Ebenso ergibt sich für die Komponenten der „Rotationsgeschwindigkeit“:

(8)
$$\begin{cases} \dot{p} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right), \\ \dot{q} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right), \\ \dot{r} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right), \end{cases}$$

oder in Vektordarstellung in der alten Bezeichnungsweise:

(8a) $$\mathfrak{u} = \tfrac{1}{2} \operatorname{rot} \mathfrak{c}.$$

170. Die Eulerschen Gleichungen der Hydrodynamik.

Die Gleichungen der Hydrodynamik sind grundsätzlich die nämlichen wie diejenigen der Elastizitätstheorie. Nur ist einerseits in der Hydrodynamik der Torsionsmodul $\mu = 0$ zu setzen, anderseits gestatten die kleinen Bewegungen der Elastizitätstheorie gewisse Vereinfachungen, die im IX. Kapitel ausführlich besprochen sind. Diese bestehen im wesentlichen darin, daß man in der Elastizitätstheorie statt der ursprünglichen Koordinaten (a, b, c) die augenblicklichen Koordinaten (x, y, z) als unabhängige Variable setzen darf. In der Hydrodynamik ist diese Vereinfachung nicht mehr gestattet.

Bezeichnen wir die Geschwindigkeiten eines Teilchens durch $\frac{Dx}{Dt}, \frac{Dy}{Dt}, \frac{Dz}{Dt}$, so sind die exakten Werte der Beschleunigung: $\frac{D^2x}{Dt^2}, \frac{D^2y}{Dt^2}, \frac{D^2z}{Dt^2}$. Benutzen wir diese Werte, so lauten die Bewegungsgleichungen (7) des X. Kapitels, wenn wir gleichzeitig nach den Auseinandersetzungen des XVI. Kapitels die Tangentialspannungen $X_y = Y_z = Z_x = 0$ und die Normalspannungen $X_x = Y_y = Z_z = P$ setzen:

(9)
$$\begin{cases} \varepsilon\left(X - \frac{D^2x}{Dt^2}\right) = \frac{\partial P}{\partial x}, \\ \varepsilon\left(Y - \frac{D^2y}{Dt^2}\right) = \frac{\partial P}{\partial y}, \\ \varepsilon\left(Z - \frac{D^2z}{Dt^2}\right) = \frac{\partial P}{\partial z}. \end{cases}$$

Die Komponenten der Beschleunigung können, wenn man die Geschwindigkeiten u, v, w einführt, geschrieben werden $\frac{Du}{Dt}, \frac{Dv}{Dt}, \frac{Dw}{Dt}$. Nun betrachtet man in der Eulerschen Form der hydrodynamischen

Gleichungen u, v, w als Funktionen von x, y, z, t, d. h. als Funktionen der Raumkoordinaten und der Zeit. Da $\frac{Du}{Dt}$ der totale Differentialquotient von u nach der Zeit ist, so ist offenbar nach den Elementen der Differentialrechnung:

$$\frac{Du}{Dt} = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{xyz} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{yzt} \frac{dx}{dt} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{zxt} \frac{dy}{dt} + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{xyt} \frac{dz}{dt},$$

oder einfacher:

$$(10) \qquad \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}.$$

Die einzelnen Glieder dieser Gleichung haben in der Hydrodynamik besondere Namen empfangen. Der Differentialquotient $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{xyz}$ heißt der „lokale", weil das Teilchen während der Differentiation an derselben Stelle des Raumes bleibt. Die übrigen Glieder heißen im Gegensatze dazu „konvektive" Glieder. Endlich nennt man $\frac{Du}{Dt}$ den „substantiellen" Differentialquotienten, im selben Sinne, wie man von substantiellen Punkten und Linien spricht, da dasselbe materielle Teilchen ins Auge gefaßt wird. Damit lauten die Gleichungen (9):

$$(11) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial P}{\partial x} + X, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial P}{\partial y} + Y, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial P}{\partial z} + Z. \end{aligned}\right.$$

In diesen Gleichungen ist ε als gegebene Funktion des Druckes P zu betrachten; es ist daher auch hier zweckmäßig, wie im vorhergehenden Kapitel, eine Funktion U zu definieren:

$$(12) \qquad U = \int_0^P \frac{dP}{\varepsilon(P)}, \quad \text{oder} \quad dU = \frac{dP}{\varepsilon(P)}$$

und dieselbe in die Gleichung (11) einzuführen. Anderseits ist ε eine Funktion der Koordinaten und gehorcht als solche einer bestimmten Gleichung, die ausdrückt, daß die Masse eines Flüssigkeitsteilchens sich nicht ändert. Bezeichnet V das Volumen des Flüssigkeitsteilchens, so muß $\varepsilon \cdot V$ konstant sein, d. h. der „substantielle" zeitliche Differentialquotient muß gleich Null sein. Also:

$$(13) \qquad \frac{D(\varepsilon V)}{Dt} = 0.$$

Statt (13) erhält man auch:

$$\varepsilon\frac{DV}{Dt} + \frac{D\varepsilon}{Dt}V = 0,$$

oder auch:

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} + \varepsilon\frac{\frac{DV}{Dt}}{V} = 0,$$

oder endlich:

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} + \varepsilon \frac{\frac{DV}{V}}{Dt} = 0. \tag{14}$$

Nun bedeutet aber $\frac{DV}{V}$ die Volumvermehrung pro Volumeinheit, ist also gleich der kubischen Dilatation $\Sigma = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}$. Also ist $\frac{\left(\frac{DV}{V}\right)}{Dt}$ die kubische Dilatation pro Zeiteinheit, d. h. die „Dilatationsgeschwindigkeit" $\dot{\Sigma}$, die nach (7) den Wert hat $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$. Entwickelt man ferner $\frac{D\varepsilon}{Dt}$, so hat man endgültig die als „Kontinuitätsgleichung" bezeichnete Formel:

$$\text{(15)} \quad \begin{cases} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + u\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + v\frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + w\frac{\partial \varepsilon}{\partial z} + \varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0, \text{ oder:} \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon u) + \frac{\partial}{\partial y}(\varepsilon v) + \frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon w) = 0. \end{cases}$$

Für eine inkompressible Flüssigkeit ist offenbar $\frac{D\varepsilon}{Dt} = 0$, also lautet die Kontinuitätsgleichung für inkompressible Substanzen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{15a}$$

Endlich wollen wir noch die Annahme machen, daß die äußeren Kräfte X, Y, Z ein Potential Ω haben, so daß:

$$X = -\frac{\partial \Omega}{\partial x}, \qquad Y = -\frac{\partial \Omega}{\partial y}, \qquad Z = -\frac{\partial \Omega}{\partial z} \quad \text{ist.} \tag{16}$$

Unter Zusammenfassung von (16), (12) und (11) erhalten wir dann:

$$\text{(17)} \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial x}(U + \Omega), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial y}(U + \Omega), \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z}(U + \Omega). \end{cases}$$

Diese Gleichungen (17) werden unter Hinzuziehung der Kontinuitätsgleichung (15) resp. (15a) als „Eulersche Gleichungen der Hydrodynamik" bezeichnet. In ihnen sind u, v, w und ε (oder P) die abhängigen, x, y, z, t die unabhängigen Variabeln.

Wegen ihrer Wichtigkeit wollen wir die Eulerschen Gleichungen auch in Vektorschreibweise angeben. Dazu bedürfen wir einer etwas anderen Auffassung der Operation „Gradient", die für die Vektoranalysis sehr fruchtbar ist. Der Gradient einer skalaren Funktion Φ

hat die Komponenten $\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z}$. Wir wollen nun das Symbol „grad", ohne hinzugefügte Funktion, rein formal als einen Vektor mit den Komponenten $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ ansehen. Dann kann man auf diesen „Vektor" die sämtlichen Operationen mit Vektoren anwenden, z. B. die skalare oder vektorielle Multiplikation usw. In dieser Auffassung kann man etwa den Ausdruck $(\mathfrak{A}, \mathrm{grad})$ als das skalare Produkt des Vektors $\mathfrak{A}$ und des Vektors „grad" auffassen; ausführlich geschrieben will das besagen, daß wir unter dem Ausdruck $(\mathfrak{A}, \mathrm{grad})$ folgendes verstehen wollen:

$$(\mathfrak{A}, \mathrm{grad}) = \mathfrak{A}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{A}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{A}_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Was bedeutet nun weiter der Ausdruck $(\mathfrak{A}, \mathrm{grad})\,\mathfrak{B}$? Da $(\mathfrak{A}, \mathrm{grad})$ als skalares Produkt ein Skalar ist, so ist der obige Ausdruck ein Vektor, und zwar in der Richtung des Vektors $\mathfrak{B}$, aber von einem $(\mathfrak{A}, \mathrm{grad})$-mal so großen Betrage. Die Komponenten dieses Vektors sind offenbar die folgenden:

$$(\mathfrak{A}, \mathrm{grad})\,\mathfrak{B}_x = \left(\mathfrak{A}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{A}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{A}_z \frac{\partial}{\partial z}\right)\mathfrak{B}_x,$$
$$(\mathfrak{A}, \mathrm{grad})\,\mathfrak{B}_y = \left(\mathfrak{A}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{A}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{A}_z \frac{\partial}{\partial z}\right)\mathfrak{B}_y,$$
$$(\mathfrak{A}, \mathrm{grad})\,\mathfrak{B}_z = \left(\mathfrak{A}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{A}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{A}_z \frac{\partial}{\partial z}\right)\mathfrak{B}_z.$$

Führen wir die angedeuteten Differentialoperationen aus, so erhalten wir:

$$(\mathfrak{A}, \mathrm{grad})\,\mathfrak{B}_x = \mathfrak{A}_x \frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial x} + \mathfrak{A}_y \frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial y} + \mathfrak{A}_z \frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial z},$$
$$(\mathfrak{A}, \mathrm{grad})\,\mathfrak{B}_y = \mathfrak{A}_x \frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial x} + \mathfrak{A}_y \frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial y} + \mathfrak{A}_z \frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial z},$$
$$(\mathfrak{A}, \mathrm{grad})\,\mathfrak{B}_z = \mathfrak{A}_x \frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial x} + \mathfrak{A}_y \frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial y} + \mathfrak{A}_z \frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial z}.$$

Man kann also den Differentialoperator $(\mathfrak{A}, \mathrm{grad})$ einfach wie einen beliebigen Skalar behandeln.

Betrachten wir nun die erste der Eulerschen Gleichungen der Hydrodynamik, so können wir dieselbe unter Benutzung der eben eingeführten Bezeichnungs- und Betrachtungsweise schreiben:

$$\frac{\partial \mathfrak{c}_x}{\partial t} + (\mathfrak{c}, \mathrm{grad})\,\mathfrak{c}_x = -\mathrm{grad}_x(U + \Omega),$$

und ganz analog folgt für die zweite und dritte:

$$\frac{\partial \mathfrak{c}_y}{\partial t} + (\mathfrak{c}, \mathrm{grad})\,\mathfrak{c}_y = -\mathrm{grad}_y(U + \Omega),$$
$$\frac{\partial \mathfrak{c}_z}{\partial t} + (\mathfrak{c}, \mathrm{grad})\,\mathfrak{c}_z = -\mathrm{grad}_z(U + \Omega).$$

Fassen wir diese Gleichungen vektoriell zusammen, so erhalten wir die **Eulerschen** Gleichungen in Vektorform:

$$\text{(17a)} \qquad \frac{\partial \mathfrak{c}}{\partial t} + (\mathfrak{c}, \operatorname{grad}) \cdot \mathfrak{c} = - \operatorname{grad}(U + \Omega).$$

171. Die Lagrangeschen Gleichungen der Hydrodynamik; die Webersche Transformation.

In einer anderen Form der hydrodynamischen Gleichungen, die gewöhnlich nach **Lagrange** benannt wird, obschon auch sie von **Euler** herrührt, betrachtet man a, b, c, die Anfangskoordinaten, und die Zeit t als unabhängige Variable und x, y, z als abhängige. Um diese Form zu gewinnen, schreiben wir — wobei alle übrigen Annahmen beibehalten werden — die hydrodynamischen Gleichungen (17) in der Form

$$\text{(18)} \quad \frac{D^2 x}{D t^2} = - \frac{\partial}{\partial x}(U + \Omega), \quad \frac{D^2 y}{D t^2} = - \frac{\partial}{\partial y}(U + \Omega), \quad \frac{D^2 z}{D t^2} = - \frac{\partial}{\partial z}(U + \Omega).$$

Erweitern wir diese der Reihe nach mit $\frac{\partial x}{\partial a}, \frac{\partial y}{\partial a}, \frac{\partial z}{\partial a}$ und addieren, so folgt:

$$\text{(19)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{D^2 x}{D t^2} \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{D^2 y}{D t^2} \frac{\partial y}{\partial a} + \frac{D^2 z}{D t^2} \frac{\partial z}{\partial a} = - \frac{\partial}{\partial a}(U + \Omega), \\ \text{und entsprechend hat man die folgenden Gleichungen:} \\ \frac{D^2 x}{D t^2} \frac{\partial x}{\partial b} + \frac{D^2 y}{D t^2} \frac{\partial y}{\partial b} + \frac{D^2 z}{D t^2} \frac{\partial z}{\partial b} = - \frac{\partial}{\partial b}(U + \Omega), \\ \frac{D^2 x}{D t^2} \frac{\partial x}{\partial c} + \frac{D^2 y}{D t^2} \frac{\partial y}{\partial c} + \frac{D^2 z}{D t^2} \frac{\partial z}{\partial c} = - \frac{\partial}{\partial c}(U + \Omega). \end{array} \right.$$

Zu diesen Gleichungen tritt nun noch die entsprechend umgestaltete Form der Kontinuitätsgleichung (15), in der ebenfalls a, b, c als unabhängige Variable einzuführen sind. Es muß das Produkt aus Dichte und zugehörigem Volumen konstant sein. Betrachten wir ein Volumelement zur Zeit $t=0$, von den Dimensionen $da \cdot db \cdot dc$, dessen Masse die Dichte ε_0 hat. Dieselbe Masse habe zur Zeit t die Dichte ε und das Volumen $dx \cdot dy \cdot dz$. Dann muß sein:

$$\text{(20)} \qquad \varepsilon_0 \, da \cdot db \cdot dc = \varepsilon \cdot dx \cdot dy \cdot dz.$$

Da nun x, y, z Funktionen von a, b, c sind, so ist:

$$\text{(21)} \quad \left\{ \begin{array}{l} dx = \frac{\partial x}{\partial a} da + \frac{\partial x}{\partial b} db + \frac{\partial x}{\partial c} dc, \\ dy = \frac{\partial y}{\partial a} da + \frac{\partial y}{\partial b} db + \frac{\partial y}{\partial c} dc, \\ dz = \frac{\partial z}{\partial a} da + \frac{\partial z}{\partial b} db + \frac{\partial z}{\partial c} dc, \end{array} \right.$$

Also ist nach bekannten Sätzen:

(22) $$dx\,dy\,dz = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial x}{\partial c} \\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial c} \\ \frac{\partial z}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix} \cdot da\,db\,dc = \Delta \cdot da\,db\,dc,$$

wenn wir die Determinante mit Δ bezeichnen. Also liefert (20) die Bedingung:

$$\varepsilon_0 = \varepsilon \cdot \Delta, \text{ oder } \varepsilon \cdot \Delta = \text{const},$$

oder endlich:

(23) $$\frac{D}{Dt}(\varepsilon\,\Delta) = 0.$$

Die Gleichungen (19) und (23) zusammengenommen bilden die sogenannten „Lagrangeschen Gleichungen der Hydrodynamik".

An diese schließt sich eine für viele Zwecke brauchbare Transformation an, die von H. Weber herrührt. Wir multiplizieren etwa die erste Gleichung (19) mit dt und integrieren von $t=0$ bis $t=t$. Dann erhält man z. B. für das erste Glied der linken Seite:

(24) $$\begin{cases} \int_0^t \frac{D^2x}{Dt^2}\frac{\partial x}{\partial a}\,dt = \int_0^t \frac{\partial x}{\partial a}\cdot\frac{D}{Dt}\left(\frac{Dx}{Dt}\right)dt = \overline{\frac{\partial x}{\partial a}\,\frac{Dx}{Dt}}\Big|_0^t - \int_0^t \frac{Dx}{Dt}\,\frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)dt \\ \qquad = \overline{\frac{\partial x}{\partial a}\cdot\frac{Dx}{Dt}}\Big|_0^t - \int_0^t \frac{Dx}{Dt}\,\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{Dx}{Dt}\right)dt. \end{cases}$$

Nun ist aber $\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)_{t=0}$ offenbar $=1$, da für $t=0$ eben $x=a$ ist; $\left(\frac{Dx}{Dt}\right)_{t=0} = u_0$ ist die Geschwindigkeit des Massenteilchens zur Zeit $t=0$. Also liefert das Integral über das erste Glied von (19):

(25) $$\begin{cases} \int_0^t \frac{D^2x}{Dt^2}\,\frac{\partial x}{\partial a}\,dt = \frac{Dx}{Dt}\,\frac{\partial x}{\partial a} - u_0 - \frac{\partial}{\partial a}\int_0^t \frac{1}{2}\left(\frac{Dx}{Dt}\right)^2 dt \\ \qquad = \frac{Dx}{Dt}\,\frac{\partial x}{\partial a} - u_0 - \frac{\partial}{\partial a}\int_0^t \frac{1}{2}\,u^2\,dt. \end{cases}$$

Ganz analog (24) liefert das zweite Glied:

(26) $$\int_0^t \frac{D^2y}{Dt^2}\,\frac{\partial y}{\partial a}\,dt = \overline{\frac{Dy}{Dt}\,\frac{\partial y}{\partial a}}\Big|_0^t - \int_0^t \frac{Dy}{Dt}\,\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{Dy}{Dt}\right)dt.$$

Darin ist aber $\left(\frac{\partial y}{\partial a}\right)_{t=0} = 0$, da $y_{t=0} = b$ von a unabhängig ist, also folgt:

$$(27)\qquad \int_0^t \frac{D^2y}{Dt^2}\frac{\partial y}{\partial a}\,dt = \frac{Dy}{Dt}\frac{\partial y}{\partial a} - \frac{\partial}{\partial a}\int_0^t \frac{1}{2}v^2\,dt,$$

und analog das dritte Glied:

$$(28)\qquad \int_0^t \frac{D^2z}{Dt^2}\frac{\partial z}{\partial a}\,dt = \frac{Dz}{Dt}\frac{\partial z}{\partial a} - \frac{\partial}{\partial a}\int_0^t \frac{1}{2}w^2\,dt.$$

Die Addition von (25), (27), (28) liefert unter Einsetzung in (19):

$$\frac{Dx}{Dt}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{Dy}{Dt}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{Dz}{Dt}\frac{\partial z}{\partial a} - u_0 - \frac{\partial}{\partial a}\int_0^t \frac{1}{2}(u^2+v^2+w^2)\,dt$$
$$= -\frac{\partial}{\partial a}\int_0^t (u+\Omega)\,dt.$$

Führt man nun eine Funktion χ ein durch die Definition:

$$(29)\qquad \chi(a,b,c) = \int_0^t \left\{\frac{1}{2}(u^2+v^2+w^2) - u - \Omega\right\}dt,$$

so erhält man folgende Gleichung, der sich durch zyklische Vertauschu zwei entsprechende anschließen:

$$(30)\qquad \left\{\begin{aligned}
\frac{Dx}{Dt}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{Dy}{Dt}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{Dz}{Dt}\frac{\partial z}{\partial a} &= u_0 + \frac{\partial \chi}{\partial a},\\
\frac{Dx}{Dt}\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{Dy}{Dt}\frac{\partial y}{\partial b} + \frac{Dz}{Dt}\frac{\partial z}{\partial b} &= v_0 + \frac{\partial \chi}{\partial b},\\
\frac{Dx}{Dt}\frac{\partial x}{\partial c} + \frac{Dy}{Dt}\frac{\partial y}{\partial c} + \frac{Dz}{Dt}\frac{\partial z}{\partial c} &= w_0 + \frac{\partial \chi}{\partial c}.
\end{aligned}\right.$$

Diese „Weberschen Gleichungen" verbinden die Geschwindigk u, v, w zur Zeit t mit den Geschwindigkeiten u_0, v_0, w_0 desselb Teilchens zur Zeit $t=0$. Wir werden im folgenden gewisse Erhaltun sätze kennen lernen, die aussagen, daß, wenn ein Teilchen zu einer l liebigen Zeit $t=0$ gewisse Eigenschaften besitzt (oder nicht besitz das Teilchen diese Eigenschaft zu allen anderen Zeiten besitzt (oder ni besitzt). Zum Beweise dieser Sätze ist die Webersche Transformati der hydrodynamischen Gleichungen offenbar besonders geeignet.

172. Oberflächenbedingungen.

Besondere Gleichungen gelten für die Oberfläche der Flüssigk Darunter verstehen wir sowohl die freie Oberfläche als auch diejenig Flächen, in denen sie andere Körper berührt.

Man kann zunächst leicht zeigen, daß jedes Teilchen, das einmal in der Oberfläche war, stets in derselben bleibt, resp. umgekehrt, daß ein Teilchen, das zu einer beliebigen Zeit nicht in der Oberfläche lag, nie in derselben liegt.

Denken wir uns einen Punkt, der zur Zeit t nicht in der Oberfläche liegt, und umgeben ihn mit einem unendlich kleinen Parallelepipedon, so bleibt er stets innerhalb desselben und kann nie an die Oberfläche des Parallelepipeds gelangen. Dies folgt unmittelbar aus den allgemeinen Sätzen der Nr. 169. Die Bewegung des Parallelepipeds könnte nun allerdings derartig sein, daß ein Teil der Parallelepipedoberfläche mit der Flüssigkeitsoberfläche zusammenfiele; aber auch in diesem Falle könnte der betrachtete Punkt im Innern des Parallelepipeds nie an die Flüssigkeitsoberfläche gelangen. Damit ist der Satz bewiesen, der auch folgendermaßen formuliert werden kann: **Die Oberfläche einer Flüssigkeit besteht immer aus denselben Teilchen.**

Es sei die Oberfläche durch die Gleichung gegeben:

$$F(x, y, z, t) = 0. \tag{31}$$

Es liege nun der Punkt (x, y, z) zur Zeit t auf der Oberfläche, erfülle also die Gleichung (31). Dann müssen auch zu jeder anderen Zeit, z. B. $t+dt$, seine Koordinaten $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$ die Gleichung $F=0$ erfüllen, d. h. es muß sein:

$$F(x+dx, \quad y+dy, \quad z+dz, \quad t+dt) = 0. \tag{32a}$$

Die Entwickelung nach dem Taylorschen Satze liefert:

$$F(x, y, z, t) + \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = 0, \tag{32b}$$

oder nach Subtraktion von (31) und Division mit dt:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0.$$

$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$, sind aber die Komponenten u, v, w der Geschwindigkeit des betrachteten Teilchens; also kann die letzte Gleichung geschrieben werden:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + u\frac{\partial F}{\partial x} + v\frac{\partial F}{\partial y} + w\frac{\partial F}{\partial z} = 0,$$

oder endlich:

$$\frac{DF}{Dt} = 0. \tag{33}$$

Man kann sie noch etwas anders formulieren, indem man die Normale n der Fläche im betrachteten Punkt errichtet. Deren Richtungskosinusse sind offenbar

$$\cos(n\,x) = \frac{1}{R}\,\frac{\partial F}{\partial x}, \quad \cos(n\,y) = \frac{1}{R}\,\frac{\partial F}{\partial y}, \quad \cos(n\,z) = \frac{1}{R}\,\frac{\partial F}{\partial z},$$

wo $R = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}$ ist.

Also kann (33) geschrieben werden:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + R\{u\cos(n\,x) + v\cos(n\,y) + w\cos(n\,z)\} = 0.$$

Die geschweifte Klammer ist aber offenbar nichts anderes als die Normalkomponente der Geschwindigkeit, die wir mit $\mathfrak{c}_n$ bezeichnen wollen. Also lautet die Bedingung (33) in anderer Form:

$$(34) \qquad \frac{\partial F}{\partial t} + R\,\mathfrak{c}_n = 0.$$

Im stationären Zustande ist $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$, also geht dann Gleichung (34) über in die Forderung:

$$(35) \qquad \mathfrak{c}_n = u\cos(n\,x) + v\cos(n\,y) + w\cos(n\,z) = 0\,.$$

Betrachten wir nun ein Stück einer Grenzfläche zweier aneinander stoßender Flüssigkeiten oder einer Flüssigkeit und eines festen Körpers, und bezeichnen die von einem Körper zum anderen gezogene Normale mit n, so gelten für beide Seiten der Trennungsfläche die Gleichungen (33) oder (34). Bezeichnen wir die Normalkomponenten auf beiden Seiten durch $\mathfrak{c}_{n1}$ resp. $\mathfrak{c}_{n2}$, so haben wir also die beiden Forderungen:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + R\,\mathfrak{c}_{n1} = 0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial t} + R\,\mathfrak{c}_{n2} = 0,$$

und durch Subtraktion folgt daraus:

$$(36) \quad \mathfrak{c}_{n1} - \mathfrak{c}_{n2} = (u_1 - u_2)\cos(n\,x) + (v_1 - v_2)\cos(n\,y) + (w_1 - w_2)\cos(n\,z) = 0,$$

d. h. **die Normalkomponente der Geschwindigkeit geht stetig durch die Trennungsfläche hindurch; über die Tangentialkomponenten machen die Gleichungen keine Aussage.** Es muß also grundsätzlich eine Unstetigkeit derselben zugelassen werden. Solche Unstetigkeitsflächen für die tangentiellen Komponenten der Geschwindigkeit können übrigens, wie Helmholtz zuerst erkannt hat und worauf wir noch zurückkommen, auch im Innern einer homogenen Flüssigkeit auftreten.

Ist die Oberfläche frei, so herrscht offenbar in derselben ein konstanter Druck. Sie wird daher gegeben durch die (31) analoge Gleichung:

$$(31\text{a}) \qquad P(x, y, z, t) = 0,$$

oder auch, indem hier dieselben Schlüsse gezogen werden können, die dort zur Gleichung (33) führten:

(33a) $$\frac{DP}{Dt} = 0.$$

Im stationären Zustande muß also nach (36) die Normalkomponente der Geschwindigkeit an einer freien Oberfläche gleich Null sein.

173. Geschwindigkeitspotential; Erhaltung des Geschwindigkeitspotentials.

Eine große und wichtige Klasse der Flüssigkeitsbewegungen ist dadurch charakterisiert, daß der Ausdruck $u\,dx + v\,dy + w\,dz$ gleich dem totalen Differential einer Funktion φ ist. Damit dies der Fall sei, muß sein:

(37) $$\begin{cases} u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad \text{oder auch} \\ \mathfrak{c} = \operatorname{grad} \varphi. \end{cases}$$

Die Geschwindigkeitskomponenten leiten sich also in diesem Falle aus der Funktion ebenso ab, wie konservative Kräfte aus einem Potential. Deshalb nennt man die Funktion φ nach dem Vorgang von Helmholtz ein „Geschwindigkeitspotential". Die Existenz eines Geschwindigkeitspotentials wird in diesem Kapitel stets vorausgesetzt.

Diese Funktion hat eine sehr einfache physikalische Bedeutung. Um diese zu erkennen, gehen wir aus von den Eulerschen Gleichungen (11), die wir in vektorieller Form offenbar schreiben können:

$$\frac{D\mathfrak{c}}{Dt} = \mathfrak{K} - \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{grad} P$$

Wird diese Gleichung mit dt multipliziert und integriert von $t=0$ bis $t=\tau$, wo τ eine sehr kleine Größe ist, so folgt, wenn für $t=0$: $\mathfrak{c}=0$ genommen wird:

$$\mathfrak{c} = \int_0^\tau \mathfrak{K}\,dt - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau \operatorname{grad} P\,dt = \int_0^\tau \mathfrak{K}\,dt - \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{grad} \int_0^\tau P\,dt.$$

Im allgemeinen sind wegen des kleinen Wertes von τ die rechtsstehenden Integrale sehr klein, wenn nicht $\mathfrak{K}$ und P sehr groß, im Grenzfalle $\tau=0$ sogar unendlich groß werden. In diesem Falle nennt man das Zeitintegral über die Kraft

$$[\mathfrak{K}] = \int_0^\tau \mathfrak{K}\,dt$$

(nach Nr. 82, p. 104ff.) bekanntlich eine „Stoßkraft" oder einen „Impuls". Ebenso heißt $\int_0^\tau P\,dt$ der „Druckimpuls" oder der „im-

pulsive Druck", den wir mit $[P]$ bezeichnen wollen. Sind die Stoßkräfte gleich Null, so haben wir einfacher aus der obigen Gleichung:

$$\mathfrak{c} = -\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{grad}[P],$$

und man erkennt durch Vergleich mit der zweiten Formulierung der Gleichung (87), daß:

$$\operatorname{grad}\varphi = -\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{grad}[P] \text{ ist.}$$

Mithin ist für räumlich konstante Dichte:

$$-\varphi = \frac{1}{\varepsilon}[P] + C_1, \quad \text{oder} \quad [P] = -\varepsilon\varphi + C_2.$$

D. h.: die physikalische Bedeutung von φ ist der durch die Dichte dividierte impulsive Druck, der nötig wäre, um die anfangs ruhende Flüssigkeit in ihren augenblicklichen Bewegungszustand zu bringen. Daraus folgt übrigens weiter, daß jede durch einen rein impulsiven Druck aus der Ruhe erzeugte Flüssigkeitsbewegung ein Geschwindigkeitspotential besitzen muß und auch umgekehrt durch geeigneten impulsiven Druck zur Ruhe gebracht werden kann. Bewegungen ohne Geschwindigkeitspotential (das sind, wie wir bald sehen werden, Rotationsbewegungen), können also auf diese Weise nie erzeugt werden.

Damit u, v, w in der Form (87) dargestellt werden können, müssen sie der Bedingung gehorchen:

$$(88)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial z} - \dfrac{\partial w}{\partial y} = \dfrac{\partial w}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial z} = 0; \\ \text{oder vektoriell:} \quad \operatorname{rot}\mathfrak{c} = 0. \end{cases}$$

Darin aber stellen die linken Seiten nach Gleichung (8) [resp. (8a)] die doppelten Komponenten der Rotationsgeschwindigkeit p, q, r dar, so daß wir den Satz haben: „Diejenigen Teile der Flüssigkeit, denen ein Geschwindigkeitspotential zukommt, besitzen keine Rotationsbewegung". Wir können die in diesem Kapitel zu behandelnden Flüssigkeitsbewegungen daher auch als „rotationslose" oder „wirbelfreie" charakterisieren.

In diesem Falle nehmen die Eulerschen Gleichungen (11) und die Kontinuitätsgleichung (15) die Form an:

$$(89)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t\,\partial x} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial x} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial x} = -\dfrac{\partial}{\partial x}(U+\Omega), \\ \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t\,\partial y} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial y} = -\dfrac{\partial}{\partial y}(U+\Omega), \\ \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t\,\partial z} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial z} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial y} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -\dfrac{\partial}{\partial z}(U+\Omega), \\ \dfrac{\partial\varepsilon}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\varepsilon\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = 0. \end{cases}$$

Für inkompressible Flüssigkeiten von räumlich konstanter Dichte geht die letzte Gleichung über in die Laplacesche:

(39a) $$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \equiv \Delta \varphi = 0.$$

Die drei ersten Gleichungen (39) können etwas anders geschrieben werden; es mag genügen, dies für die erste derselben auszuführen. Durch Vertauschung der Reihenfolge der Differentiation hat man offenbar:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right] = -\frac{\partial}{\partial x}(U + \Omega).$$

Denkt man sich ebenso die zweite und dritte Gleichung in dieser Form geschrieben, multipliziert mit resp. dx, dy, dz, und addiert, so gewinnt man die Gleichung:

$$d\left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right\} + U + \Omega\right] = 0,$$

oder nach Integration:

(40) $$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\mathfrak{c}^2 + U + \Omega = \text{Const.},$$

Dabei ist die resultierende Geschwindigkeit vom Betrage

$$\sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2}$$

mit $\mathfrak{c}$ bezeichnet. Die rechts auftretende Konstante ist dies nur mit Bezug auf die Variabeln x, y, z, kann jedoch noch Funktion von t sein. Denken wir uns nun diese Funktion von t mit dem Ausdruck $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ vereinigt, was ja auf die Bestimmung der Geschwindigkeitskomponenten nach (37) offenbar ohne Einfluß ist, so erhält man aus (40):

(41) $$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\mathfrak{c}^2 + U + \Omega = 0.$$

Denkt man sich in dieser Gleichung $\mathfrak{c}$ wieder durch φ ausgedrückt, so lehrt diese Gleichung U, d. h. auch den Druck P als Funktion von φ kennen; drückt man ferner in der vierten Gleichung (39) ε als Funktion von P — die ja gegeben sein muß —, also auch mit Hilfe von (41) als Funktion von φ aus, so liefert die vierte Gleichung (39) die Funktion φ selbst. Ist diese Funktion bestimmt, so hat man nach (37) sofort die Geschwindigkeitskomponenten u, v, w.

Bevor wir die Gleichungen (41) nebst Kontinuitätsgleichung auf spezielle Fälle anwenden, wollen wir zunächst einen wichtigen Satz beweisen, der schon von Lagrange aufgestellt wurde. Lagranges Beweis war jedoch nicht stichhaltig, und der fragliche Satz wurde zuerst von Cauchy streng bewiesen. Er lautet: „Wenn für ein Flüssig-

keitsteilchen zu irgend einer Zeit ein Geschwindigkeitspotential existiert, existiert es zu allen Zeiten für dieses Flüssigkeitsteilchen". Wir wollen diesen Satz als den Satz von der „Erhaltung des Geschwindigkeitspotentials" bezeichnen.

Da es sich darum handelt, für ein und dasselbe Teilchen eine Eigenschaft zu verschiedenen Zeiten zu betrachten, so sind zum Beweise die Weberschen Gleichungen (30) offenbar besonders geeignet. Wir multiplizieren die Gleichungen (30) der Reihe nach mit da, db, dc und addieren, dann ergibt sich, da

(42) $$\frac{\partial x}{\partial a} da + \frac{\partial x}{\partial b} db + \frac{\partial x}{\partial c} dc = dx,$$

usw. ist:

(43) $$\frac{Dx}{Dt} dx + \frac{Dy}{Dt} dy + \frac{Dz}{Dt} dz = u_0 da + v_0 db + w_0 dc + d\chi.$$

Nach Voraussetzung ist aber $u_0 da + v_0 db + w_0 dc$ das Totaldifferential einer Funktion φ_0, da für das Teilchen zur Zeit $t = 0$ ein Geschwindigkeitspotential existieren soll. Setzt man demgemäß diesen Wert ein und substituiert an Stelle von $\frac{Dx}{Dt}$, $\frac{Dy}{Dt}$, $\frac{Dz}{Dt}$ die Werte u, v, w, so kann (43) geschrieben werden:

(44) $$u dx + v dy + w dz = d(\varphi_0 + \chi),$$

d. h. die Geschwindigkeitskomponenten u, v, w, zur Zeit t sind ebenfalls aus einem Geschwindigkeitspotential $(\varphi_0 + \chi)$ ableitbar, womit der Satz bewiesen ist. Es ist aber wohl zu bemerken, daß der Satz für bestimmte Teilchen der Flüssigkeit gilt, nicht etwa für den Raum, den diese Teilchen zur Zeit $t = 0$ einnahmen. Die Teilchen mit Geschwindigkeitspotential bleiben stets solche, während sie in der Flüssigkeit fortschwimmen.

174. Spezielle Fälle stationärer Bewegung.

Wir wollen einige einfache Anwendungen der Gleichung (41) behandeln, und zwar für den stationären Zustand. Dann müssen alle $\frac{\partial}{\partial t}$ verschwinden, und man erhält als Gleichung für den stationären Zustand:

(45) $$\frac{1}{2} c^2 + U + \Omega = 0.$$

Beschränken wir uns ferner der Einfachheit wegen auf inkompressible homogene Flüssigkeiten, so tritt noch dazu die Kontinuitätsgleichung in der Form:

(45a) $$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \text{ oder:} \\ \operatorname{div} \mathfrak{c} = 0. \end{cases}$$

Aus Gleichung (45) läßt sich ein wichtiger Schluß ziehen. U ist abhängig von dem Drucke P in der bewegten Flüssigkeit, dem wir für einen Moment den Index „dyn" (dynamisch) geben wollen. Setzen wir für U den Wert für eine inkompressible Flüssigkeit ein, so haben wir:

(46) $$P_{\mathrm{dyn}} = -\varepsilon\,\Omega - \frac{\varepsilon}{2}\,\mathfrak{c}^2.$$

In einer ruhenden Flüssigkeit dagegen lautet die Gleichgewichtsbedingung:

(47) $$P_{\mathrm{stat}} = -\varepsilon\,\Omega,$$

wie aus (46) durch Nullsetzen von $\mathfrak{c}$ hervorgeht. Dabei bedeutet der

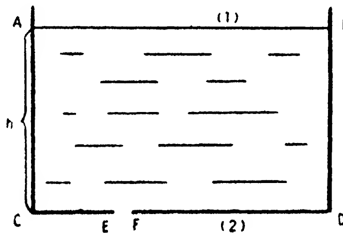


Fig. 203.

Index „stat", daß es sich jetzt um den hydrostatischen Druck handelt. Durch Kombination von (46) und (47) folgt:

(48) $$P_{\mathrm{dyn}} = P_{\mathrm{stat}} - \frac{\varepsilon}{2}\,\mathfrak{c}^2,$$

d. h. der hydrodynamische Druck ist um den Betrag $\frac{\varepsilon}{2}\mathfrak{c}^2$ (kinetische Energie der Volumeinheit) kleiner, als der hydrostatische Druck ceteris paribus wäre. Daraus ergibt sich eine wichtige Konsequenz: Da die tropfbaren Flüssigkeiten keinen Zug aushalten können, ohne zu zerreißen, so folgt, daß der kleinste Wert des hydrodynamischen Druckes, den eine Flüssigkeit aushalten kann, $=0$ ist. Daraus folgt, daß, wenn die Geschwindigkeit der Flüssigkeit den Wert

(48a) $$\mathfrak{c}_0 = \sqrt{\frac{2\,P_{\mathrm{stat}}}{\varepsilon}}$$

überschreitet, die Flüssigkeit an dieser Stelle zerreißen muß.

Wir behandeln nun einige Spezialfälle und zwar zunächst die folgenden: In Fig. 203 bedeute $ABCD$ ein Gefäß, das bis zur Höhe h mit Flüssigkeit von der Dichte ε erfüllt sei.

Der Querschnitt der freien Oberfläche AB sei f_1; im Boden des Gefäßes befinde sich ein kleines Loch EF vom Querschnitte f_2, durch

das die Flüssigkeit ausströmt. Gefragt wird nach der **Ausflußgeschwindigkeit**. Das Flüssigkeitsniveau werde konstant erhalten, so daß ein stationärer Zustand möglich ist; die xy-Ebene falle mit dem Boden des Gefäßes CD zusammen, die positive z-Achse sei nach oben genommen. Unter dieser Bedingung haben wir:

(49) $$U = \frac{P - P_0}{s} + C_1; \quad \Omega = gz + C_2,$$

wo C_1 und C_2 Konstante bedeuten. Die Gleichung (45) wird also:

$$\frac{1}{2}\mathfrak{c}^2 + \frac{P}{s} + gz = \text{Const.}$$

Wenden wir diese Gleichung zweimal an, einmal auf die Punkte der freien Oberfläche $\overline{AB}$ $(z = h)$ und auf die der Bodenfläche $(z = 0)$. Bezeichnen wir die Geschwindigkeit im Niveau h durch $\mathfrak{c}_1$, am Boden durch $\mathfrak{c}_2$, mit denselben Indizes die Drucke in den beiden Ebenen, so folgt:

(50) $$\frac{1}{2}\mathfrak{c}_1^2 + \frac{P_1}{s} + gh = \frac{1}{2}\mathfrak{c}_2^2 + \frac{P_2}{s}.$$

Nun liefert die Kontinuitätsgleichung (45a) unter gewissen vereinfachenden Annahmen eine Beziehung zwischen $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{c}_2$. Durch Multiplikation mit $d\tau$ und Integration über das Volumen der Flüssigkeit folgt der Ausdruck:

$$0 = \int\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) d\tau.$$

Bedeutet n die innere Normale, so kann man nach dem Gaussschen Satze [Gleichung (8) des XI. Kapitels auf pag. 502] schreiben:

(51) $$\left\{\begin{aligned} 0 &= \int\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) d\tau \\ &= -\int[u\cos(nx) + v\cos(ny) + w\cos(nz)]\,dS, \end{aligned}\right.$$

das Integral rechts erstreckt über die Oberfläche der Flüssigkeit. Der Klammerausdruck ist nichts anderes, wie wir z. B. in Nummer 172 gesehen haben, wie die Normalkomponente $\mathfrak{c}_n$ der Geschwindigkeit. Setzt man dies ein, so folgt

(52) $$\int \mathfrak{c}_n\, dS = 0.$$

An den Stellen nun, wo die Flüssigkeitsoberfläche vom Gefäß gebildet wird, ist offenbar $\mathfrak{c}_n = 0$. Diese Teile liefern also keinen Beitrag zum Integral. Dies tun nur die freien Oberflächenteile, nämlich $\overline{AB}$ im Niveau h und $\overline{EF}$ im Boden. Für ersteres ist der Querschnitt $dS = f_1$, für letzteres $dS = f_2$. Werden die Normalkomponenten der Geschwindigkeit mit denselben Indices bezeichnet, so hat man aus (52):

$$\mathfrak{c}_{n_1} f_1 + \mathfrak{c}_{n_2} f_2 = 0 .$$

Genau genommen sind dabei $\mathfrak{c}_{n_1}$ und $\mathfrak{c}_{n_2}$ gewisse Mittelwerte der Normalkomponente in den beiden Niveaux.

Endlich wollen wir noch in dem Loch $\overline{EF}$ die Normalenrichtung nach außen nehmen, wodurch $\mathfrak{c}_{n_2}$ das negative Vorzeichen erhält. Dann wird die letzte Gleichung:

(53)
$$\begin{cases} \mathfrak{c}_{n_1} f_1 = \mathfrak{c}_{n_2} f_2 , \quad \text{oder} \\ \mathfrak{c}_{n_1} = \dfrac{f_2}{f_1} \mathfrak{c}_{n_2} . \end{cases}$$

Nehmen wir nun an, daß wir die seitlichen Geschwindigkeiten vernachlässigen dürfen, so sind die Größen $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{c}_2$ resp. gleich $\mathfrak{c}_{n_1}$ und $\mathfrak{c}_{n_2}$ zu nehmen, so daß man durch Kombination von (53) mit (50) erhält:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{f_2}{f_1}\right)^2 \mathfrak{c}_2^{\,2} + \frac{P_1}{\varepsilon} + g h = \frac{1}{2} \mathfrak{c}_2^{\,2} + \frac{P_2}{\varepsilon} ,$$

oder endlich:

(54)
$$\mathfrak{c}_2^{\,2} = 2 \frac{\dfrac{P_2 - P_1}{\varepsilon} - g h}{\dfrac{f_2^{\,2}}{f_1^{\,2}} - 1} .$$

In dem hier betrachteten Falle wollen wir annehmen, daß auf dem Niveau $z = h$ der Atmosphärendruck P_0 lastet; ebenso drücke derselbe unten in der Öffnung $\overline{EF}$, d. h. $P_1 = P_2 = P_0$. Ist ferner $\frac{f_2}{f_1}$ eine kleine Zahl, so reduziert sich (54) auf:

(55)
$$\begin{cases} \mathfrak{c}_2^{\,2} = 2 g h , \\ |\mathfrak{c}_2| = \sqrt{2 g h} . \end{cases}$$

Diese Gleichung, die unter dem Namen des Torricellischen Theorems bekannt ist, sagt aus: Die Ausflußgeschwindigkeit ist so groß, als ob die Flüssigkeitsteilchen die Höhe h frei heruntergefallen wären. Die Erfahrung stimmt insofern damit überein, als die Ausflußgeschwindigkeit proportional der Wurzel aus der Niveauhöhe ist; aber der Proportionalitätsfaktor ist ein anderer als der in Gleichung (55) geforderte, und zwar kleiner. Das liegt im wesentlichen daran, daß man unten doch nicht die seitlichen Komponenten der Geschwindigkeit ignorieren darf.

Ein hiermit verwandter Fall ist derjenige, in dem ein Gas aus einer engen Öffnung unter Druck ausströmt. Dabei können wir die Wirkung der Schwere vernachlässigen und in erster Annäherung die Dichte als konstant behandeln. Dann folgt, wenn auch noch $\left(\frac{f_2}{f_1}\right)$ wieder sehr klein ist, aus (54):

(56 a)
$$\mathfrak{c}_2^{\,2} = 2 \frac{P_2 - P_1}{\varepsilon}$$

und für ein zweites Gas von der Dichte $\bar{s}$:

(56b) $$\bar{\mathfrak{c}}_2^{\,2} = 2\,\frac{P_2 - P_1}{\bar{s}}\,.$$

Durch Division folgt der Satz:

(57) $$|\mathfrak{c}_2| : |\bar{\mathfrak{c}}_2| = \sqrt{\bar{s}} : \sqrt{s}\,,$$

d. h. die Ausflußgeschwindigkeiten zweier Gase unter gleichem Druck verhalten sich umgekehrt wie die Quadratwurzeln aus ihren Dichten. Diese Gesetzmäßigkeit wird in einer von Bunsen herrührenden und nach ihm benannten Methode benutzt, um Gasdichten zu bestimmen.

Endlich betrachten wir drei Querschnitte f_1, f_0, f_2 eines Gefäßes (Fig. 204), das mit tropfbarer Flüssigkeit gefüllt sei, die in stationärem

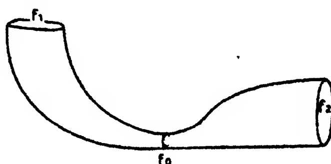


Fig. 204.

Strome durch f_1 eintritt und durch f_2 austritt. Für f_0 und f_2 liefert Gleichung (45):

$$\tfrac{1}{2}\,\mathfrak{c}_0^{\,2} + U_0 + \Omega_0 = \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{c}_2^{\,2} + U_2 + \Omega_2\,.$$

Nun sei f_2, wie in der Figur angedeutet, auf etwa gleichem Niveau mit f_0. Dann wird natürlich $\Omega_0 = \Omega_2$; also liefert die letzte Gleichung:

(58) $$\tfrac{1}{2}\,\mathfrak{c}_0^{\,2} + U_0 = \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{c}_2^{\,2} + U_2\,,$$

oder für inkompressible Flüssigkeiten:

$$\frac{1}{2}\,\mathfrak{c}_0^{\,2} + \frac{P_0}{s} = \frac{1}{2}\,\mathfrak{c}_2^{\,2} + \frac{P_2}{s}\,,$$

oder

(59) $$\frac{P_0 - P_2}{s} = \frac{1}{2}\,\mathfrak{c}_2^{\,2} + \frac{1}{2}\,\mathfrak{c}_1^{\,2}.$$

Ferner ist genau wie bei der Herleitung des Torricellischen Theorems infolge der Inkompressibilitätsbedingung:

(60) $$|\mathfrak{c}_0|\,f_0 = |\mathfrak{c}_2|\,f_2\,, \quad \text{also} \quad |\mathfrak{c}_0| = \frac{f_2}{f_0}\,|\mathfrak{c}_2|\,.$$

Also wird (59):

(61) $$\frac{P_0 - P_2}{s} = \frac{1}{2}\,\mathfrak{c}_2^{\,2} - \frac{1}{2}\left(\frac{f_2}{f_0}\right)^2 \mathfrak{c}_2^{\,2} = \frac{1}{2}\,\mathfrak{c}_2^{\,2}\left(1 - \frac{f_2^{\,2}}{f_0^{\,2}}\right).$$

Ist nun, wie in der Figur angedeutet, $f_2 \gg f_0$, so ist die rechte Seite negativ, also muß $P_0 < P_2$ sein. Man erkennt, daß durch geeignete Querschnittswahl P_0 viel kleiner als P_2 gemacht werden kann. Herrscht also an der Öffnung f_2 Atmosphärendruck, so ist an der Stelle f_0 der Druck sehr viel kleiner als der einer Atmosphäre. Wird daher das Gefäß bei f_0 angebohrt und mit einem Rezipienten verbunden, so strömt die Luft aus dem Rezipienten aus und wird von der Flüssigkeit mit fortgeführt, so lange, bis der Druck im Rezipienten gleich dem Drucke P_0 geworden ist. Das obige System wirkt also als Luftpumpe (Wasserluftpumpe).

175. Der Stokessche Satz; Geschwindigkeitspotential in einfach und mehrfach zusammenhängenden Räumen.

Wir wollen nun von einer anderen Seite an die Untersuchung der Eigenschaften des Geschwindigkeitspotentials und von Flüssigkeitsbewegungen mit dieser Eigenschaft herangehen.

Wir ziehen im Flüssigkeitsgebiet eine Kurve, die etwa vom Raumpunkte A zum Punkte B gehe. Die Geschwindigkeit der Flüssigkeit werde mit $\mathfrak{c}$ bezeichnet, und wir bilden an der Stelle eines Elementes $d\mathfrak{s}$ der Kurve das skalare Produkt $(\mathfrak{c}, d\mathfrak{s})$, d. h. das Produkt aus der tangentiellen Komponente $\mathfrak{c}_s$ der Geschwindigkeit und dem Betrage ds des Kurvenelementes. Das Integral $\int_A^B (\mathfrak{c}, d\mathfrak{s}) = \int_A^B \mathfrak{c}_s ds$, erstreckt längs der Kurve, wird die „Strömung längs AB" genannt. Der Ausdruck kann umgeformt werden, indem man $\mathfrak{c}_s$ und ds auf die Koordinatenachsen projiziert. Dann ist, wenn die Projektionen von ds mit dx, dy, dz bezeichnet und für die Geschwindigkeitskomponenten die alten Bezeichnungen beibehalten werden:

$$u = \mathfrak{c}_s \cdot \cos(sx); \quad dx = ds \cdot \cos(sx);$$
$$v = \mathfrak{c}_s \cdot \cos(sy); \quad dy = ds \cdot \cos(sy);$$
$$w = \mathfrak{c}_s \cdot \cos(sz); \quad dz = ds \cdot \cos(sz),$$

durch deren Kombination man findet:

$$\int_A^B \mathfrak{c}_s ds = \int_A^B (u\,dx + v\,dy + w\,dz). \tag{62}$$

Ist die Kurve AB geschlossen, d. h. fällt B mit A zusammen, so deuten wir dies im Integralzeichen durch einen kleinen Kreis $\circlearrowleft$ an, der mit einer Pfeilrichtung im Sinne des Durchlaufens versehen ist. Den Ausdruck

$$\oint \mathfrak{c}_s ds = \oint (u\,dx + v\,dy + w\,dz)$$

nennt man nach Stokes die „Zirkulation" längs der geschlossenen Kurve.

Es sei nun eine Fläche S mit einer Randkurve s gegeben, und längs letzterer soll die Zirkulation bestimmt werden (Fig. 205), in dem als positiv angenommenen Umlaufssinne, der dadurch charakterisiert ist, daß ein sich in dieser Richtung bewegender Beobachter die Fläche stets zur Linken hat. Dann kann man auf beliebige Weise die Fläche S in kleinere Flächengebiete teilen und die Zirkulation längs der Randkurven der sämtlichen Teilgebiete bilden. In Fig. 205 ist eine derartige Teilung

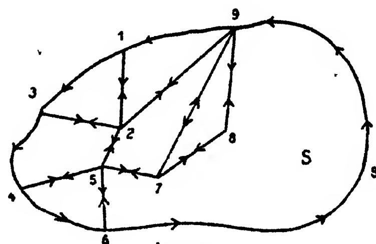


Fig. 205.

vorgenommen, und wir wollen die Zirkulation um die sämtlichen Randkurven der einzelnen Flächenteile im positiven Sinne bilden. Dann ist nach Figur die Zirkulation C:

$$\begin{aligned} C = {} & [(1;3)+(3;2)+(2;1)]+[(3;4)+(4;5)+(5;2)+(2;3)]+[(4;6) \\ & +(6;5)+(5;4)]+[(6;9)+(9;8)+(8;7)+(7;5)+(5;6)]+[(7;8) \\ & +(8;9)+(9;7)]+[(5;7)+(7;9)+(9;2)+(2;5)]+[(9;1)+(1;2) \\ & +(2;9)], \end{aligned}$$

wobei $(a;b)$ die Strömung zwischen a und b von a nach b bezeichnen soll. Nun ist offenbar nach Definition der Strömung:

$$\int_a^b \mathfrak{c}_s\,ds = -\int_b^a \mathfrak{c}_s\,ds, \quad \text{d. h.} \quad (a;b) = -(b;a),$$

und wenn man daraufhin den obigen Ausdruck für die Zirkulation C betrachtet, so findet man:

$$C = (1;3) + (3;4) + (4;6) + (6;9) + (9;1),$$

da alle übrigen Glieder sich paarweise fortheben; was noch übrig geblieben ist, ist nach Fig. 205 die Zirkulation über die Randkurve s der Gesamtfläche S. Daraus ergibt sich der Satz: **Die Zirkulation längs der Randkurve s einer Fläche S ist gleich der Summe der Zirkulationen über die Randkurven der Teilflächen, in die man jene erste Fläche S zerlegen kann.** Da wir im folgenden den Ausdruck $\int \mathfrak{c}_s\,ds$ über eine geschlossene beliebige Kurve

in der Flüssigkeit bilden wollen, machen wir von diesem Satze Gebrauch und zerlegen eine von der gegebenen Randkurve s umschlossene Fläche S in passend gewählte kleinere. Wir können sie etwa in unendlich kleine Dreiecke zerlegen. Die Summe der Zirkulationen längs der Randkurven der unendlich kleinen Dreiecke ist dann gleich der Zirkulation längs s.

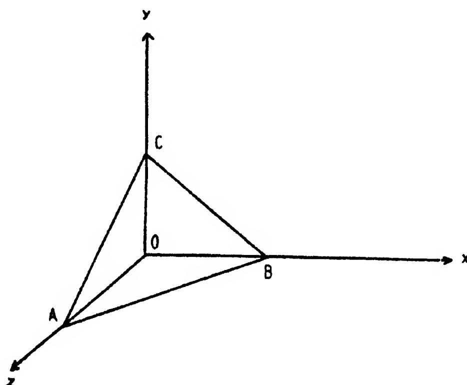


Fig. 206.

Es sei in Fig. 206 ABC eines dieser Teildreiecke; Ox, Oy, Oz seien den Koordinatenachsen parallele Gerade, die durch die Punkte A, B, C gehen. Wir haben dann zu bilden den Ausdruck:

$$(A; B) + (B: C) + (C: A)\,, \tag{63}$$

und dieser ist nach dem obigen Satze wiederum gleich der Summe der folgenden Ausdrücke:

$$[(A;B) + (B;O) + (O;A)] + [(B;C) + (C;O) + (O;B)] + [(C;A) + (A;O) + (O;C)]\,. \tag{63a}$$

Die drei ersten Glieder $[(A;B)+(B;O)+(O;A)]$ bedeuten die Zirkulation längs der Berandung des in der xz-Ebene liegenden Dreiecks ABO; entsprechende Bedeutung haben die übrigen Glieder, wenn man sie in der vorstehenden Reihenfolge zu je dreien betrachtet.

Wir betrachten also zunächst das Integral

$$\int_{ABOA} (u\,dx + v\,dy + w\,dz),$$

und da dieser Integrationsweg ganz in der xz-Ebene liegt, so ist hier $dy = 0$; also vereinfacht sich das Integral zu:

$$\int_{ABOA} (u\,dx + w\,dz).$$

In Fig. 207 ist das Dreieck ABO in die Papierebene geklappt. Wir betrachten nun das Integral:

$$\iint \frac{\partial u}{\partial z}\, dx\, dz,$$

Fig. 207.

erstreckt über die Dreiecksfläche ABO. Dies kann geschrieben werden:

$$\int dx \int \frac{\partial u}{\partial z}\, dz = \int dx\,(u_2 - u_1),$$

wo u_2 sich auf die Strecke AB, u_1 sich auf die Strecke OB bezieht, da die ersteren Werte die obere, die letzteren die untere Grenze des Integrals bei der Integration nach z darstellen. Schreiben wir das Integral ausführlich, so lautet es, wenn wir die Indizes jetzt als überflüssig weglassen:

$$\iint \frac{\partial u}{\partial z}\, dx\, dz = \int\limits_{AB} u\, dx - \int\limits_{OB} u\, dx,$$

oder auch, wenn wir die Integrationsrichtung im letzten Integrale umkehren und das verschwindende Integral $\int\limits_{OA} u\, dx$ (dx ist auf dieser Strecke $= 0$) hinzufügen:

(64) $$\iint \frac{\partial u}{\partial z}\, dx\, dz = \int\limits_{AOBA} u\, dx.$$

Ebenso behandeln wir das Integral:

$$\iint \frac{\partial w}{\partial x}\, dx\, dz = \int dz \int \frac{\partial w}{\partial x}\, dx = \int dz\,(w_2 - w_1),$$

wobei die Werte w_2 (obere Grenze) sich auf AB, w_1 (untere Grenze) auf OA beziehen. Ausführlich lautet dieses Integral:

$$\iint \frac{\partial w}{\partial x}\, dx\, dz = \int\limits_{BA} w\, dz - \int\limits_{OA} w\, dz,$$

oder, wenn wir im ersten Integral die Integrationsrichtung umkehren und das identisch verschwindende $\int\limits_{OB} w dz$ (für das $dz = 0$ ist) hinzufügen, so folgt aus der letzten Gleichung:

(65) $$-\iint \frac{\partial w}{\partial x}\, dx\, dz = \int\limits_{ABOA} w\, dz.$$

Die Addition von (64) und (65) liefert:

(66) $$\int\limits_{AOBA} \{u\, dx + (v\, dy) + w\, dz\} = (A; B) + (B; O) + (O; A) = \iint \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) dx\, dz.$$

Ebenso erhält man für die Zirkulation längs $BCOB$:

(67) $$\int\limits_{BCOB}\{u\,dx + v\,dy + (w\,dz)\} = (B;C)+(C;O)+(O;B) = \iint\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)dy\,dx,$$

und $BCOB$ endlich:

(68) $$\int\limits_{CAOC}\{(u\,dx) + v\,dy + w\,dz\} = (C;A)+(A;O)+(O;C) = \iint\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)dz\,dy.$$

Die Addition dieser drei letzten Gleichungen liefert die Zirkulation über die ursprüngliche Dreiecksfläche $ABCA$:

(69) $$\left\{\begin{aligned}\int\limits_{ABCA}\{u\,dx + v\,dy + w\,dz\} &= (A;B) + (B;C) + (C;A)\\ &= \iint\left[\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)dz\,dy + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)dx\,dz\right.\\ &\qquad\left. + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)dy\,dx\right].\end{aligned}\right.$$

Bezeichnen wir die Fläche des unendlich kleinen Dreieckes ABC durch dS, so sind offenbar:

(70) $$\left\{\begin{aligned}&\iint dx\,dy = dS\cdot\cos(nz); \qquad \iint dy\,dz = dS\cdot\cos(nx);\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \iint dz\,dx = dS\cdot\cos(ny).\end{aligned}\right.$$

In (69) können nun wegen der Kleinheit der Integrationsfläche die Ausdrücke $\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)$ ... vor das Integralzeichen gezogen werden, und dann ist nach (70):

$$\begin{aligned}\int\limits_{ABCA}\mathfrak{c}_s\,ds = &\left[\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\cos(nx) + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\cos(ny)\right.\\ &\left. + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\cos(nz)\right]dS.\end{aligned}$$

Da nun eine beliebige Fläche S mit einer Randkurve s aus kleinen Dreiecken ABC zusammengesetzt werden kann, und da die Summe der Zirkulationen über die einzelnen Dreiecke gleich der Zirkulation längs s ist, so erhalten wir aus der letzten Gleichung durch Summation über alle Teildreiecke:

(71) $$\left\{\begin{aligned}\int\limits_{s}\{u\,dx + v\,dy + w\,dz\} = &\iint dS\left[\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\cos(nx)\right.\\ &\left. + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial z}\right)\cos(ny) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\cos(nz)\right].\end{aligned}\right.$$

Darin bezieht sich das Integral links auf eine Kurve s, rechts auf eine beliebige, von s berandete Fläche S. Nun sind aber die Koeffizienten

der Kosinusse nichts anderes als die doppelten Komponenten der Rotationsgeschwindigkeit $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}$, womit die rechte Seite übergeht in:

$$2\iint [\mathfrak{p} \cos(n\,x) + \mathfrak{q} \cos(n\,y) + \mathfrak{r} \cos(n\,z)]\, d\,S\,.$$

Der Klammerausdruck ist aber die Normalkomponente $\mathfrak{u}_n$ der resultierenden Rotationsgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$; also liefert (71) endgültig:

$$(72)\quad \begin{cases} \int\limits_{\mathfrak{S}} (u\,d\,x + v\,d\,y + w\,d\,z) = 2\iint \mathfrak{u}_n\,d\,S, \text{ oder vektoriell, da } 2\mathfrak{u} = \operatorname{rot}\mathfrak{c}: \\ \int\limits_{\mathfrak{S}} (\mathfrak{c}, d\,\mathfrak{s}) = \int\limits_{\mathfrak{S}} \mathfrak{c}_s\,d\,s = \int \operatorname{rot}_n \mathfrak{c} \cdot d\,S\,. \end{cases}$$

Dies ist der „Stokessche Satz“, der ein Flächenintegral in ein Kurvenintegral zu transformieren gestattet. Es ist für das folgende wichtig, hervorzuheben, daß er zur Voraussetzung hat, daß die Funktionen u, v, w auf der ganzen Fläche S stetig und differentiierbar sind.

Wir wollen nun den Teil des von der Flüssigkeit eingenommenen Raumes, in dem ein Geschwindigkeitspotential existiert, in Zukunft kurz als „Potentialraum“ bezeichnen. Dazu gehören auch die Stellen, an denen die Flüssigkeit ruht ($u = v = w = 0$), da an diesen das Geschwindigkeitspotential gleich einer Konstanten ist.

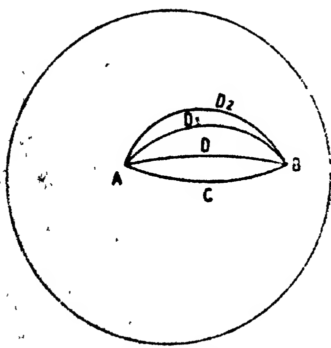


Fig. 208.

Wir wollen die geometrische Natur des Potentialraumes etwas näher ins Auge fassen. Ziehen wir in demselben eine Kurve $A\,C\,B$, und eine zweite von demselben Anfangspunkte A nach demselben Endpunkte B über einen Punkt D, also $A\,D\,B$. Beide Kurven sollen nach Voraussetzung ganz im Potentialraum liegen. Dabei können zwei Fälle eintreten, die wir nun diskutieren wollen.

Die erste Möglichkeit ist die folgende: Wenn man die Kurve $A\,D\,B$ durch stetige Deformation, ohne daß sie den Potentialraum verläßt, in die Kurve $A\,C\,B$ überführen kann, so heißen die beiden Kurven „ineinander überführbar“. Da die beiden Kurven $A\,C\,B$ und $A\,D\,B$ zusammen eine geschlossene Kurve bilden, so kann man dies auch so ausdrücken, daß man in diesem Falle die geschlossene Kurve auf einen Punkt zusammenziehen kann, ohne daß sie an irgendeiner Stelle den Potentialraum verläßt. Das ist z. B. der Fall, wenn der Potentialraum die Gestalt einer Kugel hat, die Fig. 208 im Schnitt zeigt. Alle Kurven im Innern der Kugel zwischen zwei Punkten A und B sind ineinander überführbar und folglich alle geschlossenen Kurven auf einen

Punkt zusammenziehbar, oder, wie man sagt, „reduzierbar". Diese Eigenschaft bleibt auch noch bestehen, wenn der Potentialraum etwa aus dem Raume zwischen zwei Kugelflächen besteht. Räume von solcher Beschaffenheit, daß alle geschlossenen Kurven in ihnen reduzierbar sind, heißen einfach zusammenhängende Räume.

Die andere Möglichkeit ist die, daß nicht alle geschlossenen Kurven, die im Potentialraum verlaufen, reduzierbar sind. Wir wollen daher jetzt einen Raum betrachten, dem diese Eigenschaft nicht mehr zukommt. Ein solcher ist z. B. der Innenraum eines Ringes (Fig. 209);

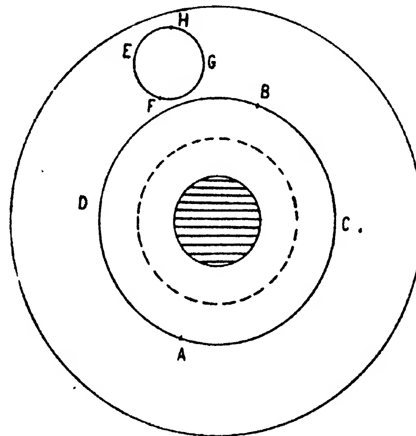


Fig. 209.

der schraffierte Teil gehört also nicht zum Potentialraum. Betrachten wir nun eine Kurve ACB, so ist es leicht, eine Kurve ADB anzugeben, die nicht in ACB überführbar ist; wir brauchen nur eine beliebige Kurve ADB zu wählen, die mit ACB zusammen den schraffierten Teil umschließt. Diese Kurve ADB müßte nämlich offenbar, wenn sie bei stetiger Deformation in ACB übergeführt werden sollte, den schraffierten, nicht zum Potentialraum gehörigen Raumteil passieren, was nach Voraussetzung nicht erlaubt ist. Dementsprechend ist die geschlossene Kurve $ACBDA$ unreduzierbar. Räume, in denen es möglich ist, unreduzierbare Kurven zu ziehen, heißen mehrfach zusammenhängende Räume.

Ziehen wir nun eine beliebige andere geschlossene Kurve in dem Innenraum des Ringes, so ist sie natürlich entweder reduzierbar oder nicht reduzierbar; in diesem letzteren Falle jedoch ist beim Ringe die Kurve in die (gleichfalls unreduzierbare) Kurve $ACBDA$ überführbar. Die punktierte Kurve in Fig. 209 ist offenbar unreduzierbar, aber in

ACBDA stetig überführbar, während *EFGH* reduzierbar ist. Alle im Ringe zu ziehenden unreduzierbaren Kurven lassen sich somit in eine einzige unreduzierbare Kurve überführen, und alle Kurven, die nicht in diese letztere überführbar sind, sind selbst reduzierbar. In diesem Sinne kann man sagen, daß es für den Ring nur eine unreduzierbare Kurve gibt, da alle anderen entweder selbst reduzierbar oder in die eine unreduzierbare überführbar sind. Man kann dies auch so ausdrücken: In dem Ringe sind zwischen zwei Punkten *A* und *B* nur zwei Kurven möglich, die nicht ineinander überführbar sind. Deshalb nennt man einen solchen Raum „zweifach zusammenhängend". Entsprechend werden drei- und mehrfach zusammenhängende Räume definiert.

Mit den oben besprochenen Eigenschaften mehrfach zusammenhängender Räume hängt die folgende, die wir später benutzen werden, innig zusammen. Da in einem einfach zusammenhängenden Raume alle geschlossenen Kurven reduzierbar sind, so kann man durch jede geschlossene Kurve stets Flächen legen, die ganz im einfach zusammenhängenden Raume liegen. In einem zweifach zusammenhängenden Raume ist dies nicht möglich. Allerdings kann man durch jede reduzierbare Kurve ganz in diesem Raume verbleibende Flächen legen; aber dies gilt nicht mehr für die unreduzierbaren Kurven, z. B. *ABCDA* in Fig. 209. Jede durch die unreduzierbare Kurve gelegte Fläche muß vielmehr notwendig aus dem Raume heraustreten, im Falle der Fig. 209 also zum Teil im schraffierten Gebiete liegen. Diese Unterschiede sind bei der Anwendung des Stokesschen Satzes von fundamentaler Wichtigkeit.

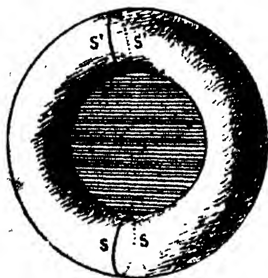


Fig. 210.

Noch von einem anderen Gesichtspunkte kann man mehrfach zusammenhängende Räume klassifizieren, der übrigens auch physikalisch von Bedeutung ist. Unter einem „Querschnitt" eines Raumes versteht man einen Schnitt durch denselben, der von den Grenzen des Raumes begrenzt wird. Also z. B. im Falle der Kugel, die einfach zusammenhängt, ist jede die Kugel schneidende Ebene, z. B. in Fig. 208 die Papierebene, ein Querschnitt. Oder im Falle des Ringes ein Schnitt *SS*, von der Art, wie Fig. 210 ihn zeigt, wodurch der Ring an einer Stelle gewissermaßen aufgeschnitten wird. Nun zeigt sich sofort ein Unterschied zwischen einfach und zweifach zusammenhängenden Gebilden: die Kugel wird durch den Querschnitt in zwei vollkommen getrennte Teile zerlegt, und es ist nicht möglich, von einem Punkte des einen Teiles zu einem Punkte des anderen zu gelangen, ohne den Schnitt zu passieren. Beim Ringe jedoch kann man auch, ohne den Schnitt *SS* zu überschreiten, noch von jedem Punkte des Ringes zu jedem anderen gelangen. Erst

ein zweiter Schnitt, etwa $S'S'$, teilt den zweifach zusammenhängenden Raum in zwei vollkommen getrennte Gebiete. Man erkennt also folgende Sätze:

„Ein einfach zusammenhängender Raum ist ein solcher, der durch einen Querschnitt in zwei vollkommen getrennte Teile zerlegt werden kann." Daraus folgt, „daß ein zweifach zusammenhängender Raum durch einen Querschnitt in einen einfach zusammenhängenden verwandelt wird; denn ein weiterer Querschnitt zerlegt ihn vollständig". Das gilt allgemein: Ein n-fach zusammenhängender Raum wird durch $m(m < n)$ Schnitte in einen $(n-m)$-fach zusammenhängenden, durch $(n-1)$-Schnitte, also in einen einfach zusammenhängenden verwandelt".

Wir wollen diese Sätze nun benutzen, um einige Eigenschaften des Geschwindigkeitspotentials φ daraus abzuleiten.

Sei zunächst der Potentialraum ein einfach zusammenhängender, d. h. alle in ihm liegenden geschlossenen Kurven reduzierbar. Bilden wir die Zirkulation längs einer solchen Kurve s, so können wir eine im übrigen beliebige Fläche S durch dieselbe legen, die ganz im Potentialraum verbleibt. Für alle Punkte dieser Fläche ist also die Normalkomponente der Rotation $\mathfrak{u}_n = 0$. Folglich gibt der Stokessche Satz, wenn wir darin die Geschwindigkeitskomponenten mit Hilfe des Potentials ausdrücken:

$$\oint \mathfrak{c}_s\, ds = \oint \frac{\partial \varphi}{\partial s}\, ds = \oint d\varphi = 0, \tag{73}$$

oder, wenn wir die geschlossene Kurve in zwei Teile (ACB und BDA) zerlegen:

$$\int\limits_{ACB} d\varphi + \int\limits_{BDA} d\varphi = 0,$$

oder mit Umkehrung der Integrationsrichtung im zweiten Integrale:

$$\int\limits_{ACB} d\varphi = \int\limits_{ADB} d\varphi. \tag{74}$$

D. h. aber: der Wert des Integrals $\int d\varphi$ hängt nicht vom Wege ab — da er auf zwei beliebigen Wegen sich als gleich ergibt —, sondern nur von der oberen und unteren Grenze. Also:

$$\int\limits_{ACB} d\varphi = \int\limits_{ADB} d\varphi = \varphi_B - \varphi_A.$$

Die Funktion φ hat also in jedem Punkte, auf welchem Wege derselbe auch erreicht werden mag, nur einen Wert: sie ist **eindeutig**. Also folgt der Satz: **In einfach zusammenhängenden Räumen ist das Geschwindigkeitspotential stets eine eindeutige Funktion der Koordinaten.**

Sei nun aber der Potentialraum ein zweifach zusammenhängender. Für jede reduzierbare Kurve ist offenbar alles so wie vorhin: die Zirkulation längs einer solchen ist gleich Null. Aber wenn wir eine unreduzierbare Kurve s nehmen, so muß jede durch sie gelegte Fläche teilweise den Potentialraum verlassen und zum Teil in Raumteilen verlaufen, in denen kein Geschwindigkeitspotential existiert. Wenn diese letzteren Raumteile mit Flüssigkeit erfüllt sind, so gelten dort offenbar nicht die Relationen (38), d. h. wir haben dort Rotationskomponenten. Diesen Raum nennen wir den „Wirbelraum"; durch ihn muß also die betrachtete Fläche hindurchgehen. Dies ist jedoch nicht der einzig mögliche Fall. Z. B. kann der die Flüssigkeit enthaltende Raum von vornherein durch die Wände so begrenzt sein, daß er zweifach zusammenhängend ist, z. B. durch eine hohlringförmige Wandung. Jede durch eine unreduzierbare Kurve gelegte Fläche muß also allerdings aus dem Potentialraum austreten, aber sie durchschneidet jetzt natürlich keinen Wirbelraum, sondern die Raumgebiete, in denen gar keine Flüssigkeit vorhanden ist. Da in diesem Falle die Funktionen u, v, w nicht auf der ganzen Fläche definiert sind, so kann der Stokessche Satz offenbar überhaupt nicht angewendet werden. Natürlich geht dies wieder, wenn man sich die Flüssigkeitsbewegung „fortgesetzt" denkt, also durch eine gedachte ergänzt, womit dieser Fall auf den ersten zurückgeführt ist. Wir können im folgenden also ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß der ersterwähnte Fall vorliegt, daß also die Raumgebiete, in denen kein Geschwindigkeitspotential existiert, mit rotierender Flüssigkeit angefüllt sind. Dann ist für gewisse Punkte einer Fläche S, die durch eine unreduzierbare Kurve hindurchgelegt ist, $\mathfrak{u}_n \neq 0$; es ist mithin nach dem Stokesschen Satze:

$$\int_s \mathfrak{c}_s \, ds = \int_s d\varphi = 2 \iint \mathfrak{u}_n \, dS,$$

oder, wenn wir die Kurve s in zwei Teile (ACB und BDA) zerlegen:

$$\int_{ACB} d\varphi + \int_{BDA} d\varphi = 2 \iint \mathfrak{u}_n \, dS, \tag{75}$$

oder endlich:

$$\int_{ACB} d\varphi = \int_{ADB} d\varphi + 2 \iint \mathfrak{u}_n \, dS. \tag{76}$$

D. h. wenn man von A nach B auf zwei Wegen ACB und ADB geht, die nicht ineinander überführbar sind, so gelangt man zu einem anderen Funktionswert φ_B. Die beiden Funktionswerte unterscheiden sich um $2\iint \mathfrak{u}_n \, dS$, d. h. um eine von den Eigenschaften des Wirbelraumes abhängige Größe. Jedenfalls folgt also, daß die Funktion φ in zweifach zusammenhängenden Räumen mehrdeutig sein muß.

Geht man von einem Werte $\varphi_B{}^0$ aus, beschreibt einen Weg, der den Wirbelraum einmal umschlingt, so erhält man im Ausgangspunkte B nun den Funktionswert $\varphi_B{}^0 + 2\iint \mathfrak{u}_n\, dS$; geht man nochmals in derselben Richtung herum, so vermehrt sich der Wert wieder um $2\iint \mathfrak{u}_n dS$, und so weiter. Diesen Wert nennt man nach Lord Kelvin „zyklische Konstante"[1] oder auch „Periodizitätsmodul" des Geschwindigkeitspotentials φ;

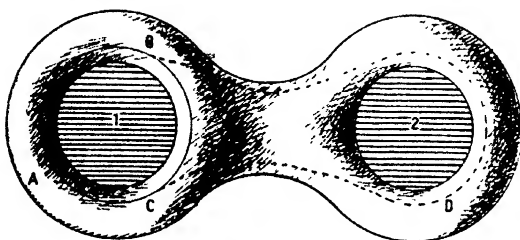


Fig. 211.

wir wollen die zyklische Konstante durch den Buchstaben $\varkappa$ bezeichnen. Dann hat also φ in jedem Punkte des Raumes unendlich viele Werte, die sich jedoch nur um ein Vielfaches der zyklischen Konstanten $\varkappa$ unterscheiden. Wir können also schreiben:

$$\varphi_B = \varphi_B^0 + \nu\varkappa, \tag{77}$$

wo φ_B und $\varphi_B{}^0$ zwei Werte von φ im Punkte B bedeuten, von denen der erstere aus dem letzteren hervorgeht, wenn der Wirbelraum ν-mal von der Kurve s in der positiven Richtung umkreist wird.

Ganz analog ist es mit höher zusammenhängenden Räumen; z. B. in Fig. 211 ist ein Doppelring dargestellt, der offenbar dreifach zusammenhängend ist; in demselben sind zwei Wirbelräume (1) und (2) enthalten, deren zyklische Konstanten wir $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ nennen wollen.

Gehen wir nun vom Punkte B aus nach C und von da auf der ausgezogenen Kurve nach B zurück, so hat das Potential in B zugenommen um $\varkappa_1$; würden wir dagegen von C die gestrichelte Kurve über D nach B genommen haben, so umschlingt diese Kurve beide Wirbelräume in positiver Richtung, also hat man jetzt in B einen Wert, der um $\varkappa_1 + \varkappa_2$ zugenommen hat. Allgemein läßt sich jeder Wert φ_B aus einem anderen ableiten, indem man ν_1 Umläufe um den ersten, ν_2 Umläufe um den zweiten Wirbelraum macht; man hat dann:

$$\varphi_B = \varphi_B^0 + \nu_1\varkappa_1 + \nu_2\varkappa_2. \tag{78}$$

[1]) Daß es wirklich eine Konstante ist, werden wir später beweisen (Nr. 183).

Es sei noch bemerkt, daß diese Eigenschaften des Geschwindigkeitspotentials in mehrfach zusammenhängenden Räumen auch in der Elektrodynamik eine beträchtliche Rolle spielen, da das magnetische Potential von elektrischen Strömen dieselben Eigenschaften hat.

176. Beispiele; Satz von Helmholtz.

Wir wollen jetzt einige einfache Lösungen der für das Geschwindigkeitspotential inkompressibler Flüssigkeiten geltenden Laplaceschen Gleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

anführen. Es ist bereits in Nr. 126 auseinandergesetzt, daß lineare Funktionen der Koordinaten und unter gewissen Bedingungen auch quadratische Funktionen der Koordinaten Lösungen dieser Gleichung sind. Viel wichtiger für die Theorie sind jedoch Lösungen, die in gewissen Punkten des Raumes eine Singularität besitzen, z. B. unendlich werden. Auch solche haben wir bereits in Nr. 126 bestimmt, z. B. befriedigt

$$\varphi = \frac{e}{r}, \tag{79}$$

wo e eine Konstante und $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$ die Entfernung eines variablen Punktes (x, y, z) von einem festen Punkte (x_0, y_0, z_0) bedeutet, die Gleichung $\Delta\varphi = 0$, wovon man sich durch Ausrechnen leicht überzeugt.

In diesem Falle haben wir es mit einer sehr einfachen Flüssigkeitsströmung zu tun, da um den Punkt (x_0, y_0, z_0) herum alles symmetrisch ist. Die Äquipotentialflächen sind die Kurven $r = \text{const}$, also konzentrische Kugeln um (x_0, y_0, z_0) als Zentrum.

Wir wollen nun Kurven definieren durch die Gleichung:

$$dx : dy : dz = u : v : w = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} : \frac{\partial \varphi}{\partial y} : \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \tag{80}$$

d. h. Kurven, deren Tangente in jedem Punkte mit der Richtung der Geschwindigkeit zusammenfällt. Solche Kurven nennen wir „Stromlinien". Es ist leicht zu zeigen, daß sie die orthogonalen Trajektorien der Flächen $\varphi = \text{Const.}$ sind. Denn in einem Punkte der Fläche $\varphi = \text{Const.}$ sind die Richtungskosinusse der Normalen proportional mit $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$, d. h. die Normalen der Niveauflächen fallen mit den Tangenten der Stromlinien nach (80) zusammen. Durch Konstruktion der Niveauflächen und der Stromlinien wird das ganze Feld in kleine Volumelemente eingeteilt, aus deren räumlicher Anordnung man leicht den

Charakter der Strömung erkennen kann. Ist $\varphi = \frac{e}{r}$, d. h. sind die Niveauflächen:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \text{Constans},$$

so lautet die Gleichung der Stromlinien:

$$dx : dy : dz = (x - x_0) : (y - y_0) : (z - z_0). \tag{81}$$

Das sind aber gerade Linien für den Punkt (x_0, y_0, z_0), die radial nach allen Richtungen ausgehen. Die Flüssigkeit strömt also vom Punkte (x_0, y_0, z_0) in radialer Richtung fort oder zu ihm hin. Im ersteren Falle sagt man, daß im Punkte (x_0, y_0, z_0) eine „Quelle", im zweiten eine „Senke" vorhanden sei. Das Kriterium dafür, ob das erstere oder letztere der Fall ist, bildet die Untersuchung der Flüssigkeitsmenge, die pro Sekunde aus einer den Punkt (x_0, y_0, z_0) umschließenden Fläche austritt. Nehmen wir dafür eine Kugelfläche, so ist die resultierende Geschwindigkeit $\mathfrak{c}$, da die Stromlinien radial verlaufen, senkrecht zur Fläche gerichtet; also erhalten wir:

$$\mathfrak{c} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{e}{r^2}.$$

Das ist auch die Flüssigkeitsmenge, die durch die Querschnittseinheit pro Sekunde austritt. Also ist für die ganze Kugelfläche:

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial r}\, dS = -e \int \frac{dS}{r^2} = -4\pi e. \tag{82}$$

Diese Gleichung zeigt, daß, wenn $e > 0$, die austretende Menge $-4\pi e$ negativ ist, d. h. die Flüssigkeit strömt zum Punkte (x_0, y_0, z_0) hin: dort befindet sich also eine „Senke". Umgekehrt, wenn $e < 0$ ist, befindet sich dort eine Quelle; der Betrag von e mißt die „Ergiebigkeit" der Quelle oder Senke. Im Punkte (x_0, y_0, z_0) selbst würden φ und $\mathfrak{c}$ unendlich werden; dies ist natürlich physikalisch nicht möglich und zeigt an, daß dort die Annahme $\frac{e}{r}$ für das Geschwindigkeitspotential nicht gelten kann. Wir schließen daher den Punkt (x_0, y_0, z_0) durch eine kleine Kugelfläche aus dem Felde aus. Im ganzen Außenraum ist dann der Ansatz $\varphi = \frac{e}{r}$ möglich, und man erkennt leicht, daß der Potentialraum einfach zusammenhängend ist.

Betrachten wir jetzt das Resultat zweier gleich starker Quellen e, die im Abstande a voneinander sich befinden; die Verbindungslinie der beiden nehmen wir als Abszissenachse (Fig. 212), den Punkt derselben, der die Entfernung halbiert, als Koordinatenanfangspunkt.

Das resultierende Geschwindigkeitspotential ist dann offenbar:

$$\varphi = e\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right); \tag{83}$$

dabei sind:

$$r_1 = \sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + z^2},$$

$$r_2 = \sqrt{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + z^2}.$$

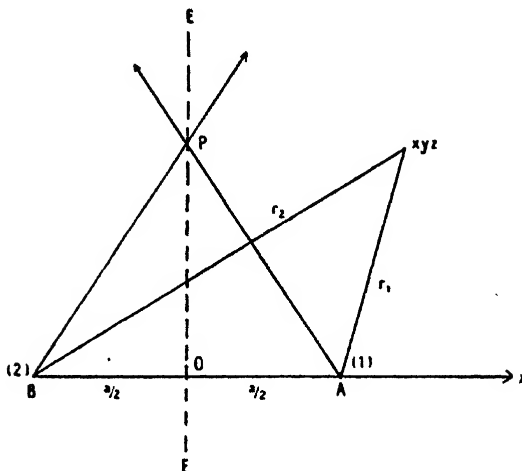


Fig. 212.

Die Niveauflächen sind die Kurven:

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \text{Const.},$$

die Geschwindigkeitskomponenten betragen:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -e\,x\left\{\frac{1}{r_1^3} + \frac{1}{r_2^3}\right\},$$

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -e\,y\left\{\frac{1}{r_1^3} + \frac{1}{r_2^3}\right\},$$

$$w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -e\,z\left\{\frac{1}{r_1^3} + \frac{1}{r_2^3}\right\}.$$

Nun wollen wir die mittelsenkrechte Ebene EE auf der Strecke AB errichten und einen Punkt P auf derselben betrachten. Die von der Quelle (1) herrührende Geschwindigkeit hat die Richtung des von A nach P gehenden Pfeiles, die von (2) herrührende die des von B nach P gehenden Pfeiles. Da die Quellen außerdem gleiche Ergiebigkeit besitzen, so sieht man unmittelbar, daß die resultierende Geschwindigkeit parallel der Mittelebene ist, d. h. es tritt keine Flüssigkeit durch die Mittelebene hindurch. Wenn man die Stromlinien konstruiert, so erhält man das Bild der Fig. 213.

Daraus ergibt sich: Wir würden genau dieselbe Strömung bekommen, wenn wir nur eine Quelle und eine unendlich ausgedehnte Ebene *EE* hätten. Natürlich gibt das nur eine Hälfte des obigen Bildes. Ist also die Aufgabe gestellt, die Flüssigkeitsströmung zu finden, die von einer im Abstande $\frac{a}{2}$ von einer unendlich ausgedehnten Ebene befindlichen Quelle erzeugt wird, so kann die Wirkung der Ebene ersetzt werden durch die einer zweiten gleichstarken Quelle, die um $\frac{a}{2}$ hinter der Ebene angebracht wird. Diese Hilfsquelle nennt man das „Bild" der ersten in Bezug auf die Ebene, weil sie dieselbe Lage hat, wie das von einem Spiegel erzeugte virtuelle Bild eines Gegenstandes.

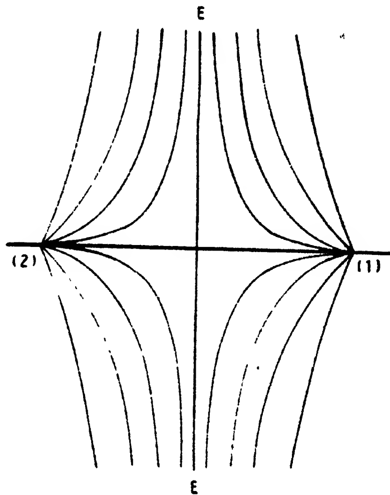


Fig. 213.

Dieses Beispiel ist starker Verallgemeinerung fähig, z. B. für den Fall, daß die Strömung einer Quelle untersucht werden soll, wenn eine Kugel sich im Flüssigkeitsfelde befindet. Die Wirkung der Kugel kann dann ersetzt werden durch innerhalb der Kugel passend angebrachte Hilfsquellen von geeigneter Ergiebigkeit, die also das Bild der ersten Quelle in Bezug auf die Kugel darstellen. Diese Methode ist von Lord Kelvin ursprünglich für die Probleme der Elektrostatik ersonnen worden und wird daher auch die Methode der „elektrischen Bilder" genannt.

Eine allgemeinere Strömung erhält man, wenn man an gewissen Stellen des Raumes Quellen von verschiedener Stärke anbringt, so daß das Geschwindigkeitspotential wird:

$$\varphi = \sum_a \frac{e_a}{r_a} \,. \tag{84}$$

Ist die Lage und Stärke der Quellen gegeben, so sind Geschwindigkeit und Stromlinien leicht zu berechnen.

In einem solchen von Quellen herrührenden einfach zusammenhängenden Felde — einem „Quellenfelde" — ist nach dem früheren die Zirkulation $\int\limits_{0} \mathfrak{c}_s\, ds$ für jede geschlossene Kurve gleich Null. Das hat nun eine Bedeutung für die Gestalt der Stromlinien. Wir wollen für einen Augenblick annehmen, es seien geschlossene Stromlinien möglich. Be-

rechnen wir für eine solche die Zirkulation, so müßte dieselbe von Null verschieden sein, da ja die Geschwindigkeit nach Definition an jeder Stelle parallel der Stromlinie ist, und daher das in positiver Richtung genommene Integral $\int\limits_{\circlearrowleft} \mathfrak{t}_s\, ds$ einen positiven Wert haben muß. Das ist aber in einem einfach zusammenhängenden Potentialraume unmöglich, mithin kann es keine geschlossenen Stromlinien in einem solchen geben; sie entspringen vielmehr sämtlich in den Quellen und endigen in den Senken (resp. im Unendlichen).

Zum Schluß wollen wir noch einen allgemeinen Satz für durch starre Wände geschlossene einfach zusammenhängende Räume beweisen.

Die kinetische Energie einer Flüssigkeit ist offenbar, wenn die Dichte als konstant angenommen wird:

(85) $$L = \frac{s}{2}\int\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right\} d\tau,$$

wo φ das Geschwindigkeitspotential ist. Ist eine solche Potentialbewegung für eine inkompressible Flüssigkeit in einem geschlossenen, einfach zusammenhängenden Raume möglich? Wir können setzen:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 = \frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) - \varphi\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2},$$

und entsprechend für die übrigen Glieder; also ist nach (85):

(86) $$\begin{cases} L = \frac{s}{2}\int\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\right\} d\tau \\ \qquad - \frac{s}{2}\int\varphi\,\Delta\varphi\cdot d\tau. \end{cases}$$

Darin ist aber das letzte Glied gleich Null, da φ die Laplacesche Gleichung erfüllt; auf das erste Glied wenden wir den Greenschen Satz an (Kap. XI, pag. 503) und finden:

(87) $$L = -\frac{s}{2}\int\varphi\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS,$$

worin das Integral sich auf die Grenze des Raumes bezieht. Da derselbe durch starre Wände überall geschlossen ist, so muß $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$, die Normalkomponente der Geschwindigkeit, gleich Null sein. Also folgt $L = 0$ und daraus:

(88) $$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0, \quad \text{d. h.} \quad \varphi = \text{Const.},$$

d. h. die Geschwindigkeiten u, v, w sind gleich Null. Also folgt der Satz: **In einem einfach zusammenhängenden, durch starre Wände geschlossenen Raume kann eine Potentialbewegung einer**

inkompressiblen Flüssigkeit nicht existieren. Dieser Satz ist von Helmholtz gefunden worden.

Mittels des Helmholtzschen Satzes ist leicht zu beweisen, daß die Potentialbewegung einer inkompressiblen Flüssigkeit vollkommen bestimmt ist, wenn die Normalkomponente der Geschwindigkeit $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ an der Oberfläche des Raumes gegeben ist. Denn nehmen wir einmal umgekehrt an, es gäbe zwei Funktionen φ_1 und φ_2, die den Bedingungen genügten, also:

$$\Delta \varphi_1 = 0, \qquad \Delta \varphi_2 = 0,$$
$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = f(x\,y\,z), \qquad \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = f(x\,y\,z),$$

wo $f(x, y, z)$ eben die gegebene Normalkomponente der Geschwindigkeit an der Oberfläche des Raumes ist, so bilde man $\varphi_1 - \varphi_2 = \psi$. Für diese Funktion ψ gelten die Gleichungen, die man durch Subtraktion der obigen erhält:

$$\Delta \psi = \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0.$$

Wendet man auf diese Funktion ψ den Helmholtzschen Satz an, indem man das Integral

$$\int \left\{ \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2 \right\} d\tau$$

betrachtet, so folgt unmittelbar $\psi = 0$, d. h. $\varphi_1 = \varphi_2$; m. a. W.: es gibt bei gegebener Normalkomponente der Geschwindigkeit an der Oberfläche nur eine Lösung.

Diese einfachen Verhältnisse gelten nicht mehr für Bewegungsformen, denen kein Potential zukommt, was später (Nr. 184) zu erörtern ist.

Es ist aber wohl zu beachten, daß, wie ebenfalls von Helmholtz betont worden ist, für mehrfach zusammenhängende Räume dieser Satz nicht mehr gilt, da dort der Greensche Satz nicht mehr angewendet werden darf, der die Eindeutigkeit der Funktion φ zur Voraussetzung hat. Dafür wollen wir sofort ein Beispiel geben. Wir betrachten ein zweidimensionales Problem, in dem φ von der z-Koordinate nicht abhängt. Es seien dann in der xy-Ebene Polarkoordinaten (r, ϑ) eingeführt, so daß die Kurven $\vartheta = $ Const. Radien darstellen. Nun setzen wir $\varphi = \vartheta$ als Geschwindigkeitspotential an; verschiedenen Werten von ϑ entsprechen also verschiedene Radien (Fig. 214).

Jetzt wollen wir die Stromlinien konstruieren; das sind offenbar konzentrische Kreise um den Anfangspunkt, die in der Figur gestrichelt sind. Der Raum sei geschlossen durch eine starre Wand W, die ebenfalls ein konzentrischer Kreis ist. Da die Geschwindigkeit überall tangential zu derselben ist, stört die Wand die Bewegung durchaus nicht. Drücken

wir $\vartheta =$ Const. in kartesischen Koordinaten aus, so haben wir, da $\operatorname{tang} \vartheta = \frac{y}{x}$ ist:

(89) $$\varphi = \vartheta = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{y}{x}\right).$$

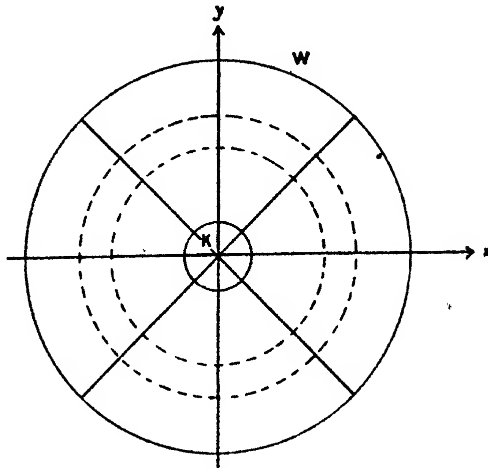


Fig. 214.

Dies Geschwindigkeitspotential ist offenbar vieldeutig, denn es nimmt bei jedem Umlauf ums Zentrum um 2π zu. Durch Differentiation folgen die Geschwindigkeitskomponenten:

(90) $$\begin{cases} u = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = -\dfrac{y}{r^2}, \\ v = \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = +\dfrac{x}{r^2}. \end{cases}$$

Man überzeugt sich an diesen Gleichungen leicht davon, daß unsere Funktion $\varphi = \operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}$ brauchbar ist; denn offenbar erfüllt sie die Gleichung $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$.

Man erkennt ferner aus (90), daß für $r = 0$, d. h. im Koordinatenanfangspunkt u und v unendlich werden. Deshalb wollen wir denselben durch eine kleine kreisförmige Wand K einschließen, wodurch die Bewegung ebenfalls nicht gestört wird. Die in (89) und (90) charakterisierte Bewegung geht also in dem zwischen K und W (und natürlich zwischen zwei Ebenen parallel zur xy-Ebene) eingeschlossenen ringförmigen Raume vor sich. Wir haben also eine Potentialbewegung in einem überall geschlossenen Raume; das ist möglich und kein Wider-

spruch zu dem Helmholtzschen Satz, weil dieser ringförmige Raum zweifach zusammenhängt, wie früher auseinandergesetzt. Anschaulich gesprochen liegt das daran, daß es hier bei der Potentialbewegung geschlossene Stromlinien gibt, die im einfach zusammenhängenden Raume nicht möglich sind. Natürlich ist hier auch die Zirkulation für eine Stromlinie von Null verschieden.

Die hier besprochene Bewegung ist in mehrfacher Hinsicht noch interessant. Da die Stromlinien Kreise sind, so wäre man versucht, hier von einer Rotation der Flüssigkeit um die z-Achse zu sprechen. Aber wenn man die Rotationskomponente $\dot{r}$ bildet, so findet man aus (90):

$$\dot{r} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^2}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r^2}\right) = 0,$$

also keine Rotation. Man kann in der Tat leicht einsehen, daß diese Flüssigkeitsbewegung ganz anders ist, als die in Nr. 166 besprochenen Rotationen. Dort hatten wir eine konstante Winkelgeschwindigkeit vom Betrage ω; also hatte ein Punkt im Abstande r von der Achse die Geschwindigkeit ωr. Hier dagegen ist die resultierende Geschwindigkeit nach (90):

(91) $$\sqrt{u^2 + v^2} = \frac{1}{r},$$

d. h. umgekehrt proportional dem Abstande vom Zentrum. Wendet man nun die allgemeinen Betrachtungen über Bewegung eines Flüssigkeitsteilchens der Nr. 169 an, so können wir schreiben unter Beschränkung auf zwei Dimensionen:

$$\begin{cases} du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy, \\ dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy, \end{cases}$$

und wenn man darin nach (90) die Werte einsetzt:

(92) $$\begin{cases} du = \frac{2xy}{r^4} dx + \left(\frac{2y^2}{r^4} - \frac{1}{r^2}\right) dy, \\ dv = \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2x^2}{r^4}\right) dx - \frac{2xy}{r^4} dy. \end{cases}$$

Nun ist aber z. B.

$$\frac{2y^2}{r^4} - \frac{1}{r^2} = \frac{2y^2 - r^2}{r^4} = \frac{y^2 - x^2}{r^4} = \frac{y^2 + x^2 - 2x^2}{r^4} = \frac{1}{r^2} - \frac{2x^2}{r^4};$$

folglich kann man statt (92) schreiben:

$$\begin{cases} du = \frac{2xy}{r^4} dx + \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2x^2}{r^4}\right) dy, \\ dv = \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2x^2}{r^4}\right) dx - \frac{2xy}{r^4} dy, \end{cases}$$

und das ist eine lineare infinitesimale Deformation mit symmetrischem Koeffizientenschema, stellt also eine Dehnung, aber keine Rotation dar.

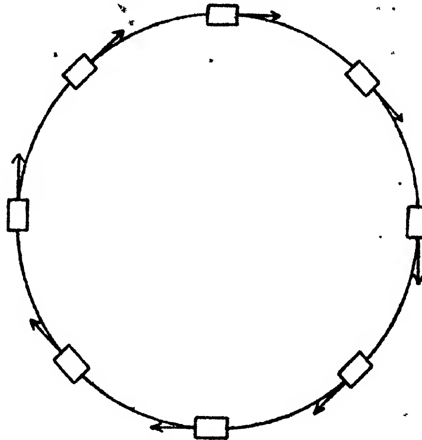


Fig. 215.

Die beifolgenden Figuren 214 und 215 mögen den Unterschied zwischen einer Rotation und der hier betrachteten Bewegung noch weiter veranschaulichen: Fig. 215 stellt eine wirkliche Rotation dar, Fig. 216 die hier untersuchte Bewegung.

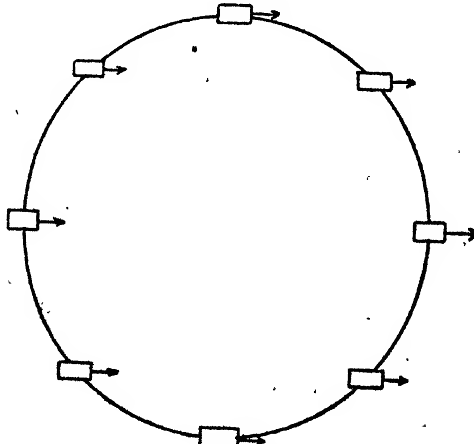


Fig. 216.

Während in Fig. 215 das Flüssigkeitsteilchen, während es auf der kreisförmigen Stromlinie einmal ums Zentrum herumschwimmt, sich gleichzeitig, wie die Pfeilrichtung anzeigt, um sich selbst dreht, behält das in Fig. 216 gezeichnete Teilchen seine Pfeilrichtung stets bei.

177. Zweidimensionale Probleme.

Die Probleme der stationären Bewegung einer inkompressiblen Flüssigkeit in zwei Dimensionen haben ein besonderes Interesse durch einen Zusammenhang mit der Theorie der Funktion einer komplexen Variabeln, der es ermöglicht, leicht Lösungen interessanter Probleme zu finden. Die Gleichungen, denen die Flüssigkeitsbewegung hier gehorcht, sind durch Spezialisierung aus (39a) und (41) zu erhalten, indem dort die Ableitungen nach t und z gleich Null gesetzt werden; auch die äußeren Kräfte sollen verschwinden. So folgt:

$$(93)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0, \\ \dfrac{1}{2}\left\{\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right\} + \dfrac{P}{\varepsilon} = \dfrac{P_0}{\varepsilon}. \end{cases}$$

Dazu treten noch die Oberflächenbedingungen hinzu; für eine freie Oberfläche speziell muß $P = \text{const.}$ sein, und diese Forderung liefert die Gleichung der freien Oberfläche. Die erste Gleichung (93) dient zur Bestimmung von φ, worauf die zweite den Druck P liefert.

Unter einer Funktion der komplexen Variabeln $z = x + iy$, wo i die imaginäre Einheit ist, versteht man eine Funktion der beiden Variabeln x und y, in der x und y nur in der Verbindung $(x + iy)$ vorkommen. Aus dieser Definition folgt unmittelbar die folgende Eigenschaft einer solchen Funktion, die wir $w = f(z)$ nennen wollen.[1]) Bezeichnen wir Differentiationen nach dem Argument z durch einen Strich, so haben wir:

$$(94)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial x} = \dfrac{dw}{dz}\,\dfrac{\partial z}{\partial x} = f'(z)\dfrac{\partial z}{\partial x} = f'(z), \\ \dfrac{\partial w}{\partial y} = \dfrac{dw}{dz}\,\dfrac{\partial z}{\partial y} = f'(z)\dfrac{\partial z}{\partial y} = f'(z)\cdot i. \end{cases}$$

also ist nach Elimination von $f'(z)$:

$$(95)\qquad \frac{\partial w}{\partial y} = i\,\frac{\partial w}{\partial x}.$$

Zerspalten wir die komplexe Größe w in ihren reellen und imaginären Bestandteil, indem wir schreiben:

$$(96)\qquad w = f(z) = \varphi(xy) + i\,\psi(xy),$$

so kann (95) geschrieben werden:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} + i\,\frac{\partial\psi}{\partial y} = i\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\,\frac{\partial\psi}{\partial x}\right),$$

[1]) Da bei den zweidimensionalen Problemen eine Geschwindigkeitskomponente w nach der z-Richtung nicht auftritt, so kann eine Verwechselung der Funktion w mit derselben wohl kaum eintreten.

und dies kann nur bestehen, wenn die reellen und imaginären Bestandteile auf beiden Seiten **für sich** gleich sind; also ist:

$$(97)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = -\dfrac{\partial \psi}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial y} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}. \end{cases}$$

Diesen beiden Bedingungen muß der reelle und imaginäre Bestandteil jeder Funktion einer komplexen Variabeln genügen. Diese Gleichungen können etwas anders formuliert werden, indem man einmal ψ, ein zweites Mal φ eliminiert. Ersteres geschieht durch sukzessive Differentiation der beiden Gleichungen nach y resp. x und Addition, letzteres durch sukzessive Differentiation nach x resp. y und Subtraktion. Dann folgen die beiden Gleichungen:

$$(98)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \\ \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0, \end{cases}$$

die beide die Form der ersten Gleichung (93) für das Geschwindigkeitspotential haben. Ferner gibt Multiplikation der beiden Gleichungen (97) miteinander:

$$(99)\qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0,$$

was offenbar nichts anderes ausspricht, als daß die Kurven $\varphi = \text{Const.}$ und $\psi = \text{Const.}$ **sich orthogonal durchschneiden.**

Man erkennt also folgendes: **Der reelle und der imaginäre Bestandteil einer beliebigen Funktion komplexen Argumentes kann als Geschwindigkeitspotential einer zweidimensionalen stationären Flüssigkeitsbewegung genommen werden.** Nehmen wir den reellen, so sind die Kurven $\varphi = \text{Const.}$ die **Niveaulinien**, nach (99) die Kurven $\psi = \text{Const.}$ die Stromlinien, und **umgekehrt.** Wegen dieser Vertauschbarkeit von φ und ψ heißen sie **„konjugierte Funktionen"**. **Man erhält also mit einem Schlage durch Wahl einer Funktion komplexen Argumentes zwei mögliche Lösungen eines hydrodynamischen Problems.**

Wir betrachten im folgenden eine Reihe einfacher Beispiele zu dieser Theorie.

1\. Wir setzen z. B.:

$$(100)\qquad \begin{cases} w = \varphi + i\psi = z = x + iy, \quad \text{d. h.} \\ \varphi = x, \quad \psi = y. \end{cases}$$

Die Kurven $\varphi = \text{Const.}$ liefern die Gleichungen:

$$x = \text{Const.},$$

das sind Parallele zur y-Achse. Die Kurven $\psi = \text{Const.}$ liefern:

$$y = \text{Const.},$$

d. h. Parallele zur x-Achse. Wir haben also, je nachdem wir φ oder ψ als Stromlinien auffassen, eine Parallelströmung parallel der x- resp.

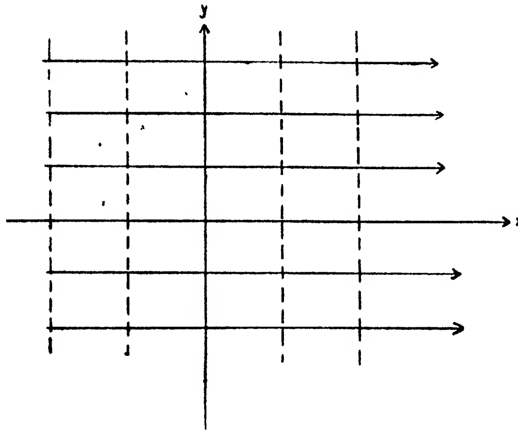


Fig. 217a.

y-Achse; in den Figg. 217a und 217b sind die Stromlinien ausgezogen, die Niveaulinien punktiert.

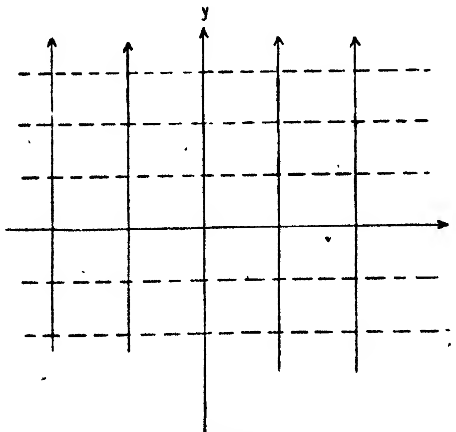


Fig. 217b.

Diese Strömungen können theoretisch durch im Unendlichen angebrachte Quellen erzeugt werden; zur praktischen Realisierung genügen geeignete Quellen in großer Entfernung von der betrachteten Stelle.

Ein zweites Beispiel ist:

(101) $$w = \varphi + i\psi = z^2 = (x + iy)^2,$$

also

$$\varphi = x^2 - y^2, \quad \psi = 2xy.$$

Wir erhalten also für $\varphi = \text{Const.}$:

$$x^2 - y^2 = \text{Const.},$$

für $\psi = \text{Const.}$:

$$xy = \text{Const.}$$

Das sind beides Scharen von sich rechtwinklig durchkreuzenden Hy-

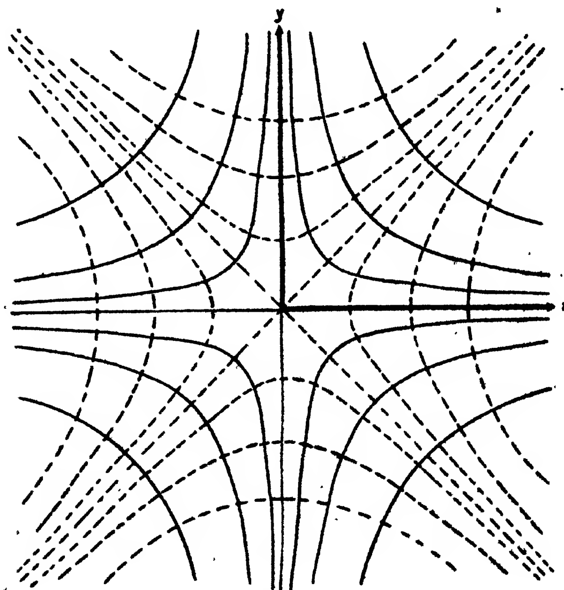


Fig. 218a.

perbeln, denen die in Fig. 218a und 218b dargestellten hydrodynamischen Probleme entsprechen.

Man erkennt, daß in Fig. 218a die x- und y-Achse selbst Stromlinien sind, d. h. es tritt keine Flüssigkeit durch sie hindurch. Deshalb kann man z. B. das stark ausgezogene Stück der beiden Achsen, die den ersten Quadranten bilden, als feste Scheidewände betrachten. Ganz ebenso liegt der Fall in Fig. 218b, nur daß dort die festen Wände um $\pi/4$ gegen die entsprechende Lage von Fig. 218a gedreht sind. Wir haben also die Strömung innerhalb eines rechtwinkligen Knies, die durch eine in unendlicher Entfernung auf der einen Scheidewand angebrachte Quelle und eine entsprechende Senke auf der anderen Scheidewand erzeugt werden kann.

Wir setzen in einem dritten Beispiel an:

(102) $$\omega = \varphi + i\psi = Az + \frac{B}{z} = A(x + iy) + \frac{B(x - iy)}{x^2 + y^2},$$

d. h.

$$\varphi = Ax + \frac{Bx}{x^2 + y^2}, \quad \psi = Ay - \frac{By}{x^2 + y^2}.$$

Hier wollen wir $\varphi = \text{Const.}$ als Niveaulinien, $\psi = \text{Const.}$ als Strom-

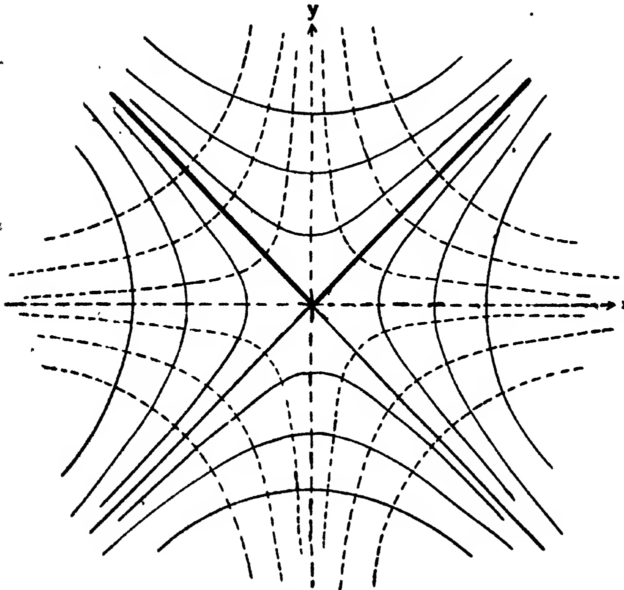


Fig. 218b.

linien nehmen. Dann sieht man sofort, daß für die Geschwindigkeitskomponenten sich ergibt:

(103) $$\begin{cases} u = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = A + \dfrac{B(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \\ v = \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = -\dfrac{2Bxy}{(x^2 + y^2)^2}. \end{cases}$$

Im Unendlichen wird nun offenbar $u_\infty = A$, $v_\infty = 0$; d. h. dort haben wir eine einfache Parallelströmung längs der x-Achse, und die Stromlinien $\psi = \text{Const.}$ gehen dort über in die Gleichung $y = \text{Const.}$ Betrachten wir anderseits die Stromlinie, der die Konstante $\psi = 0$ zukommt, so ist deren Gleichung:

$$y\left(A - \frac{B}{x^2 + y^2}\right) = 0$$

und dies kann befriedigt werden durch

$$(104)\qquad \begin{cases} y = 0, & \text{und durch} \\ x^2 + y^2 = \dfrac{B}{A}. \end{cases}$$

Dies ist aber einerseits die Abszissenachse und anderseits ein Kreis um den Anfangspunkt vom Radius $\sqrt{\frac{B}{A}}$. Ferner sieht man aus (103), daß für $x = y = 0$, d. h. im Anfangspunkt, die Geschwindigkeitskomponenten unendlich werden; der Anfangspunkt ist also auszuschalten. Man erhält also folgendes Bild der Strömungslinien (ausgezogen) und Niveaulinien (punktiert) in Fig. 219.

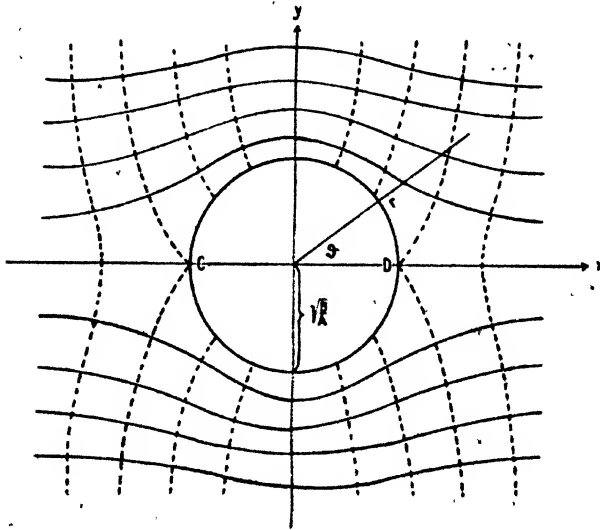


Fig. 219.

Man kann also, da ohnehin der Anfangspunkt ausgeschaltet werden muß, den als Strömungslinie dienenden Kreis vom Radius $\sqrt{\frac{B}{A}}$ als festes Hindernis betrachten und erhält die durch ein kreisförmiges Hindernis hervorgerufene Veränderung einer ursprünglich vorhandenen Parallelströmung. Für die Punkte

$$C\left(x = -\sqrt{\frac{B}{A}},\quad y = 0\right) \quad \text{und} \quad D\left(x = +\sqrt{\frac{B}{A}},\quad y = 0\right)$$

ergibt sich nach (103), daß dort die Geschwindigkeit in aller Strenge Null ist.

Wir wollen jetzt Polarkoordinaten (r, ϑ) einführen, so daß ist (s. Fig. 219):

$$x = r\cos\vartheta;$$
$$y = r\sin\vartheta.$$

Dann folgt aus (103) für das Quadrat der Geschwindigkeit:

$$(105)\quad \begin{cases} c^2 = u^2 + v^2 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 \\ \quad = A^2 + \frac{2BA}{r^2}(\sin^2\vartheta - \cos^2\vartheta) + \frac{B^2}{r^4}, \end{cases}$$

und daraus ergibt sich der hydrodynamische Druck P nach der ersten Gleichung (93):

$$(106)\quad P = P_0 - \frac{\varepsilon}{2}\left\{A^2 + \frac{2AB}{r^2}(\sin^2\vartheta - \cos^2\vartheta) + \frac{B^2}{r^4}\right\}.$$

Bestimmt man die unbekannte Konstante P_0 so, daß im Unendlichen $P=0$ wird, so folgt:

$$(107)\quad P_0 = \frac{\varepsilon}{2}A^2.$$

Aus (105) folgt für die Berandung des Kreises (d. h. für $r = \sqrt{\frac{B}{A}}$):

$$(108)\quad \overline{c^2} = 4A^2\sin^2\vartheta,$$

und folglich nach (106) und (107) für den Druck $\overline{P}$ an dem Kreisumfange:

$$(109)\quad \overline{P} = \frac{\varepsilon}{2}A^2 - 2\varepsilon A^2\sin^2\vartheta = \frac{\varepsilon}{2}A^2\{1 - 4\sin^2\vartheta\}.$$

Derselbe ist also ein Maximum an den Polen ($\vartheta=0$), ein Minimum am Äquator; entsprechend ist im ersten Falle die Geschwindigkeit ein Minimum, im zweiten Falle ein Maximum.

Dieser Fall kann realisiert werden, indem ein sehr langer Zylinder in ein gleichmäßiges Strömungsfeld gebracht wird. Denn dann sind annähernd alle Vorgänge von der z-Koordinate, die mit der Achse des Zylinders zusammenfallen soll, unabhängig, und für jede Ebene parallel zur xy-Ebene gelten die obigen Betrachtungen.

Von Interesse ist es, die Kraftwirkung zu berechnen, die von der Flüssigkeit auf den Zylinder ausgeübt wird. Es genügt dafür, ein Stück des Zylinders von der Länge 1 zu betrachten. Die Komponenten der Kraft sind offenbar:

$$(110)\quad \begin{cases} \mathfrak{K}_x = \int \overline{P}_x\, ds, \\ \mathfrak{K}_y = \int \overline{P}_y\, ds, \end{cases}$$

wenn $\overline{P}_x$, $\overline{P}_y$ die Druckkomponenten an der Oberfläche parallel den Achsen und s die Randkurve bedeutet. Es ist dabei:

$$(111)\qquad \begin{cases} \overline{P}_x = \overline{P}\cos\vartheta, \\ \overline{P}_y = \overline{P}\sin\vartheta, \end{cases}$$

und die Integration ist über die Kontur des Kreises auszudehnen. Man erhält also unter Berücksichtigung von (109):

$$(112)\qquad \begin{cases} \mathfrak{K}_x = \int\limits_0^{2\pi} \frac{\varepsilon}{2} A^2(1 - 4\sin^2\vartheta)\cos\vartheta \cdot \sqrt{\frac{B}{A}}\, d\vartheta = 0, \\ \mathfrak{K}_y = \int\limits_0^{2\pi} \frac{\varepsilon}{2} A^2(1 - 4\sin^2\vartheta)\sin\vartheta \sqrt{\frac{B}{A}} \cdot d\vartheta = 0. \end{cases}$$

Das Resultat, daß die Flüssigkeit keine Kraft auf den Zylinder ausübt, steht in völligem Gegensatz zur Erfahrung des täglichen Lebens. Das liegt daran, daß wir hier von der Wirkung der Reibung abgesehen haben. Es sei übrigens bemerkt, daß dies Resultat für jeden in eine Flüssigkeit eingetauchten Körper gilt. Wir werden später (im XIX. Kapitel) noch einmal auf diese Frage zurückkommen.

Als letztes Beispiel wollen wir ein zweidimensionales Problem behandeln, das zuerst von Helmholtz gelöst worden ist, und welches wir in der nächsten Nummer von einem anderen Gesichtspunkte aus betrachten werden. Wir haben bisher w als Funktion von $z = x + iy$ betrachtet. Damit ist gleichzeitig gesagt, daß auch umgekehrt z als Funktion von $w = \varphi + i\psi$ betrachtet werden kann, was häufig bequemer ist. Das wollen wir hier tun und setzen an:

$$(113)\qquad \begin{cases} z = -w + e^{-w}, \quad \text{oder} \\ x + iy = -(\varphi + i\psi) + e^{-(\varphi + i\psi)}, \end{cases}$$

woraus folgt:

$$(114)\qquad \begin{cases} x = -\varphi + e^{-\varphi}\cos\psi, \\ y = -\psi - e^{-\varphi}\sin\psi. \end{cases}$$

Wir nehmen die Kurven $\psi = \text{Const.}$ als Stromlinien.

Da die analytische Form hier schon ziemlich kompliziert ist, so legen wir der Konstanten sukzessive passende Werte bei. Zunächst sei $\psi = 0$. Das gibt die Gleichungen:

$$\text{für } \psi = 0: \begin{cases} x = -\varphi + e^{-\varphi} \\ y = 0, \end{cases}$$

d. h. also, daß die x-Achse selbst Stromlinie ist. Um zu sehen, in welcher Ausdehnung, ob ganz oder nur teilweise, legen wir jetzt dem Parameter φ, der ja längs einer Stromlinie variiert, verschiedene Werte bei. Für $\varphi = -\infty$ folgt $x = +\infty$, für $\varphi = 0$ folgt $x = +1$, für $\varphi = +\infty$

folgt $x=-\infty$. Also ist die ganze x-Achse Stromlinie. Jetzt nehmen wir eine andere Stromlinie, indem wir ψ etwa gleich $+\pi$ wählen; dann ist nach (114):

$$\text{für } \psi = \pi: \begin{cases} x = -\varphi - e^{-\varphi}, \\ y = -\pi. \end{cases}$$

Hier ist also gemäß der letzten Gleichung eine Parallele im Abstande $-\pi$ zur Abszissenachse Stromlinie; um festzustellen, in welcher Ausdehnung, legen wir wieder dem Parameter φ nach einander verschiedene Werte bei. Zunächst für $\varphi=-\infty$ ist $x=-\infty$, für $\varphi=0$ ist $x=-1$, für $\varphi=+\infty$ ist $x=-\infty$. Man erkennt leicht, daß $x=-1$ der größte Wert ist, der erreicht wird, während φ von $-\infty$ über Null bis $+\infty$ läuft. Die im Abstande $-\pi$ zur x-Achse gezogene Parallele ist daher von $-\infty$ bis -1 Stromlinie, und zwar läuft sie in sich selbst zurück.

Wir wählen jetzt $\psi=-\pi$. Dafür ist nach (114):

$$\text{für } \psi = -\pi: \begin{cases} x = -\varphi - e^{-\varphi}, \\ y = +\pi, \end{cases}$$

woraus man erkennt, daß für die im Abstande $+\pi$ gezogene Parallele zur x-Achse alles genau so ist wie oben.

Nehmen wir weiter $\psi=\frac{\pi}{2}$. Es folgt aus (114):

$$\text{für } \psi = +\frac{\pi}{2}: \begin{cases} x = -\varphi \\ y = -\frac{\pi}{2} - e^{-\varphi}. \end{cases}$$

Hier ist es zweckmäßig, φ zu eliminieren; es folgt dann als Gleichung der Stromlinie:

$$\text{für } \psi = +\frac{\pi}{2}: \left\{ y = -\frac{\pi}{2} - e^{+x}. \right.$$

Für große negative Werte von x ist nun e^x praktisch gleich Null. Im negativ Unendlichen fällt die Kurve also und zwar bis in ziemliche Nähe von $x=0$ mit der im Abstande $-\frac{\pi}{2}$ gezogenen Parallele zur x-Achse zusammen. Dann weicht sie nach unten ab, um schließlich für große Werte von x sehr stark zu fallen.

Nehmen wir endlich $\psi=-\frac{\pi}{2}$. Dafür folgt aus (114):

$$\text{für } \psi = -\frac{\pi}{2}: \begin{cases} x = -\varphi, \\ y = \frac{\pi}{2} + e^{-\varphi}. \end{cases}$$

Die Kurve, die man durch Elimination von φ erhält:

$$y = \frac{\pi}{2} + e^x \left(\text{für } \psi = -\frac{\pi}{2}\right),$$

ist das Spiegelbild der vorhin betrachteten in bezug auf die x-Achse.

Diese Daten genügen, um einigermaßen die durch (114) dargestellte

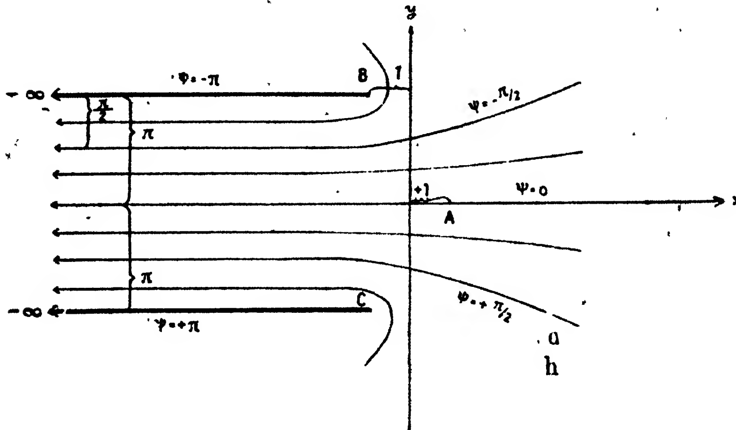


Fig. 220.

Strömung zu übersehen. Wir erhalten folgendes Strömungslinienbild (Fig. 220), das noch durch einige andere Stromlinien ergänzt ist.

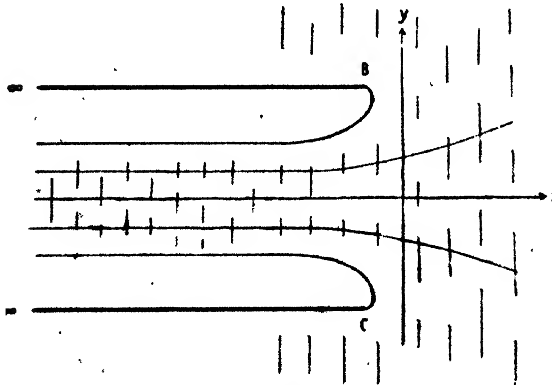


Fig. 221.

Man erkennt, daß durch die stark gezeichneten Parallelen zur x-Achse von $-\infty$ bis -1 keine Flüssigkeit hindurchströmt, so daß wir sie als dünne starre Wände ansehen können. Dann liefert das eben behandelte Problem die Strömung einer Flüssigkeit aus einem unendlich weiten Reservoir durch einen in dasselbe hineinragenden Kanal (sog. Bordasches Mundstück).

Es muß aber darauf hingewiesen werden, daß in der Natur die Flüssigkeitsströmung tatsächlich anders vor sich geht, nämlich so, daß die Flüssigkeit den Kanal nicht ganz ausfüllt, sondern sich kontrahiert und eine freie Oberfläche bildet, wie es Fig. 221 andeuten soll. An den Punkten B und C (Figg. 220 u. 221) des Kanals löst sich die Strömung von den Wänden ab; der von der Flüssigkeit im Kanal eingenommene Raum ist in Fig. 221 schraffiert.

An diesem Beispiele hat Helmholtz erkannt, worin die Abweichung der Theorie von der Erfahrung begründet ist, und er hat die Theorie so erweitert, daß sie mit der Beobachtung wesentlich besser übereinstimmt. Auf die Helmholtzsche Abhandlung, die einen der größten Fortschritte in der Hydrodynamik im 19. Jahrhundert darstellt, kommen wir in der nächsten Nummer ausführlich zurück.

178. Strahlbildung; unstetige Flüssigkeitsbewegung.

Wir berechnen für das letzte Beispiel die Geschwindigkeit und den Druck der Flüssigkeit und zwar insbesondere an den Stellen B und C des Kanals, wo der Theorie nach die Flüssigkeit plötzlich umbiegen soll, da die Stromlinien an dieser Stelle in sich zurücklaufen.

Zu diesem Zwecke bedürfen wir einiger Umrechnungsformeln. Die Geschwindigkeitskomponenten $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_y$ und $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_x$ sind aus (114) nicht bequem zu berechnen, wohl aber die Größen $\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)_\psi$ und $\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)_\psi$; wir müssen also den Zusammenhang zwischen diesen beiden Arten von Differentialquotienten angeben. Die Suffixe sollen andeuten, welche Variable bei der Differentiation als konstant betrachtet wird; in Zukunft werden wir sie fortlassen, da Mißverständnisse wohl nicht zu befürchten sind.

Es ist offenbar:

$$(115)\qquad \begin{cases} d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy, \\ d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy, \end{cases}$$

und umgekehrt:

$$(116)\qquad \begin{cases} dx = \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial x}{\partial \psi} d\psi, \\ dy = \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial y}{\partial \psi} d\psi. \end{cases}$$

Lösen wir das erste Gleichungssystem (115) nach dx und dy auf, so erhalten wir, wenn die Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{vmatrix}$$

durch D bezeichnet wird:

$$(117)\quad \begin{cases} dx = \dfrac{\frac{\partial \psi}{\partial y}}{D}\, d\varphi - \dfrac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{D}\, d\psi, \\ dy = -\dfrac{\frac{\partial \psi}{\partial x}}{D}\, d\varphi + \dfrac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{D}\, d\psi, \end{cases}$$

und durch Vergleich der Systeme (116) und (117) folgt:

$$(118)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} = +\dfrac{1}{D}\dfrac{\partial \psi}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial x}{\partial \psi} = -\dfrac{1}{D}\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} = -\dfrac{1}{D}\dfrac{\partial \psi}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial y}{\partial \psi} = +\dfrac{1}{D}\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}. \end{cases}$$

Unter Berücksichtigung der Gleichungen (97), denen φ und ψ gehorchen, folgt:

$$D = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2,$$

und endlich für die uns interessierenden Größen, ebenfalls nach (97):

$$(119)\quad \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)_\psi = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2}, \qquad \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)_\psi = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2}$$

Durch Quadrieren und Addieren folgt daraus die Gleichung:

$$(120)\quad \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 = \frac{1}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2} = \frac{1}{u^2 + v^2} = \frac{1}{c^2}.$$

Nun bilden wir $\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)_\psi$ und $\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)_\psi$ nach Gleichung (114). Das liefert:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)_\psi = -1 - e^{-\varphi}\cos\psi.$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)_\psi = +e^{-\varphi}\sin\psi.$$

Also erhalten wir nach (120) für das reziproke Quadrat der Geschwindigkeit:

$$(121)\quad \frac{1}{c^2} = 1 + 2e^{-\varphi}\cos\psi + e^{-2\varphi}.$$

Das liefert z. B. für die mittlere Stromlinie $\psi = 0$:

$$\left(\frac{1}{c^2}\right)_{\psi=0} = 1 + 2e^{-\varphi} + e^{-2\varphi} = (1 + e^{-\varphi})^2,$$

also ist längs dieser Stromlinie (Abszissenachse):

(122) $$(c)_{\psi=0} = \frac{1}{1+e^{-\varphi}}.$$

Für $\varphi=\infty$, d. h. für $x=-\infty$ folgt $c=1$; für $\varphi=0$, d. h. $x=+1$, (also schon außerhalb des Kanals im Punkte A der Fig. 220) herrscht die Geschwindigkeit $c={}^1/_2$; von da ab nimmt sie nach rechts hin immer weiter ab, um für $x=+\infty$ gleich Null zu werden.

Jetzt wollen wir die beiden Stromlinien $\psi=\pm\pi$ betrachten. Dafür liefert (121):

(123) $$(c)_{\psi=\pm\pi} = \frac{1}{1-e^{-\varphi}}.$$

Das liefert für $\varphi=+\infty$, d.h. für $x=-\infty$ (auf der Innenseite des Kanals), wieder die Geschwindigkeit $c=1$; für $\varphi=-\infty$, d. h. für $x=-\infty$ (auf der Außenseite der Kanalwand), $c=0$; aber für die Punkte $\varphi=0$, d.h. an den mit B und C bezeichneten Ecken des Kanals erhalten wir den Wert $c=\infty$.

Uns interessiert hier vor allem das Ergebnis, daß an den scharfen Ecken des Kanals die Geschwindigkeit unendlich groß wird. Und daraus folgt mit Hilfe der zweiten Gleichung (93), daß der Druck P an diesen Stellen negativ und zwar sogar negativ unendlich werden muß. Wir haben schon früher darauf hingewiesen, daß an solchen Stellen die Flüssigkeit zerreißen muß. In anderer Ausdrucksweise, die aber auf dasselbe hinausläuft, kann man auch sagen: Die Flüssigkeit kann, wenn sie längs der Außenwand des Kanals heranströmt, an der scharfen Kante nicht plötzlich umbiegen, um an der Innenwand des Kanals zurückzuströmen, sondern wegen der Trägheit der Flüssigkeitsteilchen haben die Strömungslinien auch an diesen Stellen stets eine endliche Krümmung, was nichts anderes bedeutet, als daß die Strömung an den kritischen Punkten B und C sich von der Wand ablöst und einen sogenannten „freien Strahl" oder auch kurz einen „Strahl" bildet.

An einer freien Oberfläche ist nun bekanntlich die Bedingung zu erfüllen, daß der Druck P längs derselben konstant sein muß und da bedeutet nach der zweiten Gleichung (93), daß

(124) $$c^2 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 = \text{Const.},$$

oder auch nach (120):

(124a) $$\frac{1}{c^2} = \left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2 = \text{Const.}$$

sein muß.

Wir wollen der Einfachheit halber für freie Oberflächen die Geschwindigkeit c im allgemeinen $=1$ wählen, was durch geeignete Wahl

der Einheiten geschehen kann. Dann muß also für eine solche stets sein:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 = 1. \tag{125}$$

Nun besteht eine Oberfläche stets aus Stromlinien $\psi = \text{Const.}$; es muß also gleichzeitig neben (125) auch noch ψ konstant sein.

Diesen beiden Bedingungen genügt offenbar der Ansatz (114) nicht, und wir können ihn daher auch nicht als die Lösung des behandelten Ausflußproblems betrachten. Helmholtz hat zuerst in einer berühmten Arbeit „Über diskontinuierliche Flüssigkeitsbewegungen" (Wissenschaftliche Abhandlungen Bd. I, p. 146) erkannt, daß es andere Lösungen solcher Probleme geben muß, bei denen die bis dahin übersehene Bedingung (125) sich erfüllen läßt.[1])

Wir geben im folgenden nicht den Gedankengang von Helmholtz wieder, der durch ein eigentümliches, seither nicht wieder benutztes Verfahren zur richtigen Lösung geführt wurde, sondern entwickeln eine allgemeine Methode.

Es sei gegeben $z = x + iy$ als Funktion von $w = \varphi + i\psi$; dann ist der Differentialquotient:

$$\frac{dz}{dw} = \frac{dz}{d(\varphi + i\psi)} = \frac{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} + i\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right) d\varphi + \left(\frac{\partial x}{\partial \psi} + i\frac{\partial y}{\partial \psi}\right) d\psi}{d\varphi + i\, d\psi},$$

oder unter Berücksichtigung der Gleichungen (97) und (118), (119), (120):

$$\frac{dz}{dw} = \frac{\partial x}{\partial \varphi} + i\frac{\partial y}{\partial \varphi}. \tag{126}$$

Diese Gleichung ist übrigens aus den Elementen der Theorie der Funktion einer komplexen Variabeln bekannt; $\frac{dz}{dw}$ ist selbst Funktion der komplexen Variabeln $w = x + iy$. Wir setzen nun $\frac{dz}{dw}$ in der folgenden Gestalt an:

---

[1]) Es scheint, daß diese Arbeit Helmholtz', da sie die Diskrepanzen zwischen Theorie und Erfahrung zwar vermindert, aber nicht vollständig beseitigt, neuerdings namentlich von Vertretern der technischen Hydrodynamik nicht ihrer Bedeutung entsprechend gewürdigt wird. Gelegentlich haben solche Urteile ihren Weg auch in die physikalische Literatur gefunden. Ich kann es mir deshalb nicht versagen, an dieser Stelle die Würdigung dieser Arbeit durch H. Hertz (Werke, Bd. I S. 362) anzuführen: „Eine kleinere theoretische Arbeit von H. behandelt die Bildung der Flüssigkeitsstrahlen. . . . Und doch erfüllt um der Art und Weise der Lösung willen das Studium einer Abhandlung, wie dieser, den Geist mit demselben erhebenden Staunen, welches ein echtes Kunstwerk mit sich führt. Man muß sich wohl denken, daß die Stärke des Gefühles in dem Verständnis für die Größe der überwundenen Schwierigkeit beruht. Wir sehen einen Geist, der das gewöhnliche Maß weit überschreitet, scheinbar mühelos, in Wahrheit mit äußerster Anstrengung, eine Kluft überspringen, die unüberschreitbar schien. Erst nach dem Sprunge wird uns die Weite der Kluft völlig klar, unser freudiger Beifall bricht von selber aus."

(127) $$\frac{dz}{dw} = \frac{\partial x}{\partial \varphi} + i\frac{\partial y}{\partial \varphi} = F(\varphi + i\psi) \pm \sqrt{F^2(\varphi + i\psi) - 1}.$$

Dann erkennt man folgendes: Für gewisse Werte von ψ (d. h. für gewisse Stromlinien) wird F reell sein können. Es ist dann nur noch Funktion von φ. Ist $F(\varphi)$ ferner so beschaffen, daß $F^2(\varphi) \geqq 1$ für gewisse Werte von φ ist, so ist auch die Wurzel in (127) reell, und die Gleichung (127) liefert durch Trennung des Reellen und Imaginären:

(128) $$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \varphi} &= F(\varphi) \pm \sqrt{F^2(\varphi) - 1} \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ für gewisse konstante Werte von } \psi \text{ und für } F^2(\varphi) \geqq 1.$$

Die Integration der zweiten Gleichung (128) ergibt $y = \text{Constans}$; das sind Teile von Parallelen zur Abszissenachse als Stromlinien, die jedoch **nicht freie Oberflächen** sein können, da sie offenbar die neue Bedingung von **Helmholtz** (125) nicht erfüllen, **sondern die als feste Wände betrachtet werden können.**

Für die **nämlichen** Werte von ψ, aber für andere, als die vorhin betrachteten φ-Werte, sei $F^2(\varphi) < 1$. Dann ist die Wurzel in (127) **imaginär**, und man kann diese Gleichung schreiben, wenn man ψ den betreffenden konstanten Wert beilegt:

(127a) $$\frac{\partial x}{\partial \varphi} + i\frac{\partial y}{\partial \varphi} = F(\varphi) \pm i\sqrt{1 - F^2(\varphi)}.$$

Dann liefert die Trennung des Reellen vom Imaginären:

(129) $$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \varphi} &= F(\varphi) \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} &= \pm\sqrt{1 - F^2(\varphi)} \end{aligned}\right. \text{ für dieselben } \psi\text{-Werte, wie in Gleichung (128) und für } F^2(\varphi) < 1.$$

(129) liefert aber durch Quadrieren und Addieren offenbar $\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right) = 1$, d. h. die **Helmholtz**sche Bedingung (125) ist jetzt erfüllt. **Damit haben wir beide Teile von Stromlinien, die als freie Oberflächen eines Strahles betrachtet werden können.**

Wir setzen nun, um das vorhin behandelte Ausflußproblem **wirklich** zu lösen, an:

$$\frac{dz}{dw} = \frac{\partial x}{\partial \varphi} + i\frac{\partial y}{\partial \varphi} = 1 + e^w - \sqrt{(1 + e^w)^2 - 1},$$

oder

(130) $$\frac{\partial x}{\partial \varphi} + i\frac{\partial y}{\partial \varphi} = 1 + e^{(\varphi + i\psi)} - \sqrt{\{1 + e^{(\varphi + i\psi)}\}^2 - 1}.$$

In unserer obigen Bezeichnung ist also $F = 1 + e^{\varphi + i\psi}$. Es erhebt sich zunächst die Frage: Für welche ψ-Werte ist F reell? Man erkennt sofort,

daß dies z. B. für die Werte $-\pi, 0, +\pi$ eintritt; die übrigen interessieren uns hier nicht. Nehmen wir zunächst $\psi = 0$. Dafür ist $F = 1 + e^{\varphi}$; also folgt nach (180):

$$\text{für } \psi = 0: \quad \frac{\partial x}{\partial \varphi} + i \frac{\partial y}{\partial \varphi} = 1 + e^{\varphi} - \sqrt{(1 + e^{\varphi})^2 - 1},$$

und es handelt sich jetzt darum, festzustellen, für welche Werte von φ die Wurzel reell und für welche sie imaginär ist. Da der kleinste Wert von e^{φ} Null ist, so ist die Wurzel stets reell, und es folgt:

$$\text{für } \psi = 0: \quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} = 1 + e^{\varphi} - \sqrt{(1 + e^{\varphi})^2 - 1}, \\ \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} = 0. \end{cases}$$

Das ist eine Parallele zur Abszissenachse als Stromlinie, die jedoch nicht freie Oberfläche, sondern nur feste Wand sein könnte. Wir wollen diese Stromlinie direkt mit der x-Achse zusammenfallen lassen: sie fungiert, wie man leicht feststellt, in ihrer ganzen Ausdehnung als Stromlinie.

Nehmen wir jetzt $\psi = +\pi$. Dafür ist:

$$F = 1 + e^{(\varphi + i\pi)} = 1 - e^{\varphi}.$$

Also wird nach (180):

$$\text{für } \psi = +\pi: \quad \left\{ \frac{\partial x}{\partial \varphi} + i \frac{\partial y}{\partial \varphi} = 1 - e^{\varphi} - \sqrt{(1 - e^{\varphi})^2 - 1}, \right.$$

Hier ist nun für gewisse φ die Wurzel reell, für andere imaginär. Schreibt man die Wurzel, nachdem der Radikand ausgerechnet ist:

$$\sqrt{(1 - e^{\varphi})^2 - 1} = \sqrt{-2e^{\varphi} + e^{2\varphi}} = \sqrt{e^{\varphi}}\sqrt{e^{\varphi} - 2},$$

so erkennt man, daß für $e^{\varphi} \geqq 2$ oder für $\varphi \geqq \log 2$ die Wurzel reell ist. Das liefert also:

$$(181) \qquad \text{für } \begin{Bmatrix} \psi = \pi \\ \varphi \geqq \log 2 \end{Bmatrix}: \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} = 1 - e^{\varphi} - \sqrt{(1 - e^{\varphi})^2 - 1}, \\ \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} = 0. \end{cases}$$

Das gibt eine Parallele zur Abszissenachse, die für alle Werte $\varphi \geqq \log 2$ als feste Wand betrachtet werden kann.

Nunmehr nehmen wir $\varphi \leqq \log 2$. Dann ist nach (180)

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} + i \frac{\partial y}{\partial \varphi} = 1 - e^{\varphi} - i\sqrt{1 - (1 - e^{\varphi})^2},$$

also:

$$(181\text{a}) \qquad \text{für } \begin{Bmatrix} \psi = \pi \\ \varphi \leqq \log 2 \end{Bmatrix}: \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} = 1 - e^{\varphi}, \\ \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} = -\sqrt{1 - (1 - e^{\varphi})^2}; \end{cases}$$

und hier ist die Bedingung:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 = 1$$

für Bildung einer freien Oberfläche offenbar erfüllt. Beide Gleichungen lassen sich leicht integrieren, und man erhält für die freie Stromkurve:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi - e^{\varphi}, \\ y &= C + \sqrt{2e^{\varphi} - e^{2\varphi}} + 2 \arcsin \sqrt{\frac{e^{\varphi}}{2}} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\text{für} \\ &\psi = \pi, \\ &\varphi \leqq \log 2, \end{aligned}$$

wenn C eine Integrationskonstante bedeutet. Diese läßt sich folgendermaßen bestimmen. Nimmt man $\varphi = -\infty$, so erkennt man, daß unsere Stromlinie im negativ Unendlichen eine im Abstande C zur Abszissenachse gezogene Parallele tangiert; denn es ist:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)_{\varphi = -\infty} = 1; \qquad \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)_{\varphi = -\infty} = 0; \qquad y_{\varphi = -\infty} = C.$$

Nach (118) kann man dafür setzen:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = 1; \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad \text{für } \varphi = -\infty,$$

und das liefert integriert als Gleichung der Stromkurve für $\varphi = -\infty$:

$$\psi = \psi_0 + y.$$

Dabei ist y der Abstand der betreffenden Stromlinie von der Abszissenachse. Wenden wir die letzte Gleichung einmal auf die Stromlinie $\psi = \pi$, ein zweites Mal auf die Stromlinie $\psi = 0$ an, die mit der Abszissenachse zusammenfällt, so haben wir die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \pi &= \psi_0 + C, \\ 0 &= \psi_0. \end{aligned}$$

Daraus folgt für die Integrationskonstante C der Wert π. Man erhält also endgültig für die freie Stromkurve:

$$(132) \quad \left\{\begin{aligned} x &= \varphi - e^{\varphi}, \\ y &= \pi + \sqrt{2e^{\varphi} - e^{2\varphi}} + 2 \arcsin \sqrt{\frac{e^{\varphi}}{2}} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\text{für} \\ &\psi = \pi, \\ &\varphi \leqq \log 2. \end{aligned}$$

Setzen wir darin $e^{\varphi} = 2$ (also gleich dem größten zulässigen Werte, an dem die freie Oberfläche in die feste Wand übergeht), so folgt aus (132)

$$(133) \quad \left\{\begin{aligned} x &= \log 2 - 2, \\ y &= 2 \arcsin 1 + \pi = 2\pi, \end{aligned}\right.$$

für $\varphi = -\infty$ folgt ebenso:

$$(134)\quad \begin{cases} x = -\infty, \\ y = 2 \arcsin(0) + \pi = \pi. \end{cases}$$

Die freie Stromlinie beginnt also am Punkte ($x = \log 2 - 2$, $y = 2\pi$) und tangiert im negativ Unendlichen die im Abstande π zur Abszissenachse gezogene Parallele.

Für die feste Wand liefert die Integration von (131):

$$(135)\quad \left\{ \begin{array}{l} x = \varphi - e^{\varphi} - \sqrt{e^{2\varphi} - 2e^{\varphi}} + 2\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}^{1)} \sqrt{\frac{e^{\varphi}}{2}} \\ y = \text{Const.} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{für} \\ \psi = \pi, \\ \varphi \geqq \log 2. \end{array}$$

Die durch diese Gleichung dargestellte Parallele zur Abszissenachse muß im Punkte ($x = \log 2 - 2$, $y = 2\pi$) an die freie Stromlinie sich anschließen, woraus sich durch Vergleich mit (133) der konstante Wert von y zu 2π ergibt. Ferner ergibt sich für $\varphi = \infty$ wegen des starken Anwachsens von e^{φ} der Wert $x = -\infty$. Nunmehr ist die Stromlinie für $\psi = \pi$ völlig klargestellt. Von $x = -\infty$ bis $x = \log 2 - 2$ fällt sie mit der Parallelen im Abstande 2π von der x-Achse zusammen; dann biegt sie um, um wiederum im negativ Unendlichen im Abstande π der x-Achse parallel zu laufen. Das Umbiegen erfolgt nicht plötzlich an der Ecke der Wand; vielmehr ergibt sich aus (132) folgendes: Der Maximalwert von x wird erhalten, indem man $\frac{\partial x}{\partial \varphi} = 0$ setzt; das liefert:

$$e^{\varphi} = 1; \quad \varphi = 0.$$

Die dazu gehörigen Werte von x und y sind: $x = -1$, $y = 1 + \frac{3\pi}{2}$. An diesem Punkte erst biegt die freie Stromlinie um.

Für $\psi = -\pi$ ergeben sich ganz analoge Verhältnisse: Hier ist alles das Spiegelbild der Stromlinie $\psi = +\pi$ in bezug auf die x-Achse. Demnach erhält man folgendes Bild der Strömung (Fig. 222). Dabei kann die x-Achse auch als feste Wand betrachtet werden. Man erkennt, daß die Breite des Strahles nur die Hälfte der Kanalbreite beträgt; die „Kontraktion" hat also den Wert $^1/_2$, was mit experimentellen Beobachtungen gut zusammen stimmt. Durch Integration der Gleichung (130) erhält man $(x + iy)$ als Funktion von $(\varphi + i\psi)$ und kann danach — obwohl mit ziemlichen rechnerischen Schwierigkeiten —, beliebig viele Stromlinien berechnen und die Fig. 222 dementsprechend ergänzen.

Es wird sich als wichtig erweisen, folgendes zu bemerken: Der Zwischenraum zwischen dem freien Strahl und der Kanalwand, den wir bisher als leer angenommen haben,

[1]) Es ist vielleicht nicht überflüssig, folgendes zu bemerken: Wenn $y = \mathfrak{Cof}\,x$ ist, so ist umgekehrt $x = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\,y$, und so fort für die übrigen hyperbolischen Funktionen.

kann auch mit ruhender Flüssigkeit erfüllt gedacht werden. In Wirklichkeit wird derselbe z. B. in vielen Fällen mit ruhender Luft erfüllt sein. Längs der freien Strahlfläche können also zu beiden Seiten die tangentiellen Geschwindigkeiten verschieden sein; die Geschwindigkeit kann also mit anderen Worten eine unstetige oder diskontinuierliche Funktion der Koordinaten sein. Eine derartige Diskontinuität ist mit der Natur der reibungslosen, vollkommenen Flüssigkeit sehr wohl vereinbar, da eben keine Tangentialspannungen vorhanden sind.

Wir wollen nun schließlich noch längs der festen Wand und der Strahlfläche für $\psi = \pi$ die Geschwindigkeit berechnen. Quadriert und

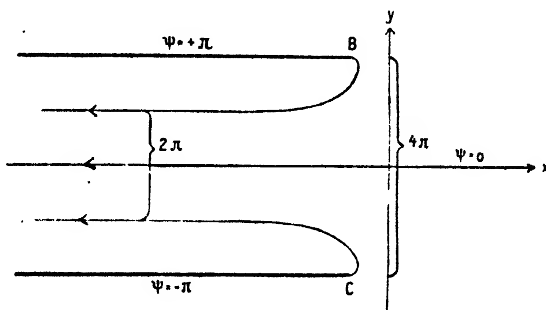


Fig. 222.

addiert man die beiden Gleichungen (131), die für die feste Wand gelten, so erhält man das reziproke Geschwindigkeitsquadrat $\frac{1}{c^2}$. Man übersieht unmittelbar, daß im links Unendlichen an der festen Wand die Geschwindigkeit $c = 0$ ist, um langsam anzusteigen, bis sie an der Ecke B, wo Kanal und freier Strahl aneinanderstoßen, den Wert 1 erreicht. Längs des ganzen freien Strahles herrscht nach (131) stets die Geschwindigkeit 1, wie es die Natur der freien Oberfläche erfordert. Es wird also nirgendwo mehr die Geschwindigkeit unendlich groß, und der Druck kann folglich stets oberhalb des Wertes Null gehalten werden.

Wir wollen noch ein zweites Ausflußproblem behandeln, das durch den Ansatz

(136) $$\frac{dz}{dw} = e^{w} + \sqrt{e^{2w} - 1}$$

geliefert wird. In unserer früheren Bezeichnungsweise ist $F = e^{(\varphi + i\psi)}$ und ist offenbar reell für $\psi = 0$ und $\psi = \pi$, während es für $\psi = \frac{\pi}{2}$ rein imaginär ist. Wir wollen zunächst einmal die Stromlinie $\psi = \frac{\pi}{2}$ untersuchen. Dafür haben wir:

$$F(\varphi + i\psi) = e^{\left(\varphi + i\frac{\pi}{2}\right)} = i e^{\varphi};$$

also wird nach (136):

(137) $$\frac{\partial x}{\partial \varphi} + i\frac{\partial y}{\partial \varphi} = i e^{\varphi} + \sqrt{-e^{2\varphi} - 1} = i e^{\varphi} + i\sqrt{e^{2\varphi} + 1},$$

und daraus folgt:

$$\text{für } \psi = \frac{\pi}{2}: \left\{ \frac{\partial x}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = e^{\varphi} + \sqrt{e^{2\varphi} + 1}; \right.$$

d. h. die Stromlinie $\psi = \frac{\pi}{2}$ ist eine Parallele zur y-Achse, die wir der Einfachheit halber als y-Achse selbst nehmen wollen; da längs derselben die Geschwindigkeit nicht den konstanten Wert 1 hat, so kann kein Teil derselben freie Grenze sein, wohl aber kann eine feste Wand diese Stromlinie vertreten.

Nehmen wir nun $\psi = 0$; dafür wird $F(\varphi + i\psi) = F(\varphi) = e^{\varphi}$, und Gleichung (136) liefert:

(138) $$\frac{\partial x}{\partial \varphi} + i\frac{\partial y}{\partial \varphi} = e^{\varphi} + \sqrt{e^{2\varphi} - 1} \quad \text{für } \psi = 0.$$

Hier sind wieder zwei Fälle möglich. Für $\varphi \geqq 0$ ist die Wurzel reell, und es folgt aus (138):

$$\left.\frac{\partial x}{\partial \varphi} = e^{\varphi} + \sqrt{e^{2\varphi} - 1}, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = 0\right\} \text{ für } \psi = 0 \text{ und } \varphi \geqq 0.$$

Dieser Teil der Stromlinie $\psi = 0$ läuft also parallel der x-Achse, oder wie wir der Einfachheit halber annehmen wollen, ist ein Teil der x-Achse selbst. Um festzustellen, welcher Teil der x-Achse in Betracht kommt, muß diese Gleichung integriert werden. Das liefert, wenn a eine Integrationskonstante bedeutet:

(138a) $$y = 0, \quad x = a + e^{\varphi} + \sqrt{e^{2\varphi} - 1} - \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\sqrt{e^{2\varphi} - 1}.$$

Daraus ergibt sich, wenn φ in dem für die feste Wand zulässigen Intervall von 0 bis ∞ variiert, folgendes: Für $\varphi = 0$ wird $x = a + 1$; für $\varphi = +\infty$ wird auch $x = +\infty$. Als feste Wand ist also zu betrachten das Stück der x-Achse von $x = a + 1$ ab bis in die positive Unendlichkeit. Am Punkte ($x = a + 1$, $y = 0$), wo die Wand endet, beginnt der freie Strahl, für den der andere Fall gilt, daß $\varphi \leqq 0$ ist. Dafür ergibt sich aus (138):

(139) $$\left.\frac{\partial x}{\partial \varphi} = e^{\varphi}; \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \sqrt{1 - e^{2\varphi}} \right\} \text{ für } \psi = 0 \text{ und } \varphi \leqq 0,$$

was integriert liefert:

(139a) $$\left.\begin{array}{l}\text{für } \psi = 0 \\ \text{und } \varphi \leqq 0\end{array}\right\} x = a + e^{\varphi}; \quad y = \sqrt{1 - e^{2\varphi}} + \frac{1}{2}\log\frac{1 - \sqrt{1 - e^{2\varphi}}}{1 + \sqrt{1 - e^{2\varphi}}}.$$

Diese Gleichungen stellen die Oberfläche des freien Strahles dar; man erhält für $\varphi=0$ natürlich wieder den Wert $(x=a+1, y=0)$; für $\varphi=-\infty$ dagegen folgt das Wertepaar: $(x=a, y=-\infty)$. Gleichzeitig ergibt sich aus (139), daß für $\varphi=0$:

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi}=1; \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi}=0$$

ist; dort, wo der freie Strahl sich an die Wand ansetzt, ist er also parallel zur x-Achse; für $\varphi=-\infty$ folgt dagegen:

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi}=0, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi}=1;$$

d. h. im negativ Unendlichen der y-Achse läuft der Strahl parallel zur

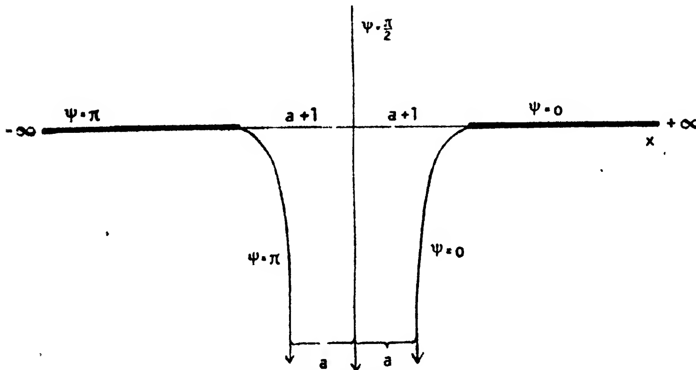


Fig. 223.

y-Achse, und zwar tangiert er die im Abstande a gezogene Parallele zur y-Achse.

Für die dritte Stromlinie $\psi=\pi$ ergibt sich, daß sie das Spiegelbild in Bezug auf die y-Achse der hier diskutierten Stromlinie $\psi=0$ ist. Wir erhalten also folgendes Bild (Fig. 223). Das hier behandelte Problem stellt also den Ausfluß aus einem unendlich großen Gefäß durch einen Spalt von der Breite $2(a+1)$ dar. Der Strahl kontrahiert sich auf die Breite $2a$. Der „Kontraktionskoeffizient" ist also

$$(140) \qquad \frac{a}{a+1},$$

wobei die bisher unbestimmt gebliebene Größe a noch festzulegen ist. Dies kann auf die nämliche Weise geschehen, wie beim vorhergehenden Beispiele.

Man findet so für den Kontraktionskoeffizienten:

$$\frac{a}{a+1} = \frac{\pi}{\pi+1} = 0{,}611\,, \tag{141}$$

was mit der Beobachtung gut übereinstimmt.

179. Bewegung einer ebenen Lamelle in einer Flüssigkeit.

Bereits in Nr. 177 haben wir das zweidimensionale Problem behandelt, daß ein Kreiszylinder in eine Flüssigkeit eingetaucht ist. Es ergab sich dort das paradoxe Resultat, *daß die Flüssigkeit keine Kräfte auf den Zylinder ausübt.* Mit diesem Problem aufs innigste zusammenhängend ist dasjenige, welches man erhält, wenn man die Flüssigkeit in Ruhe denkt und dafür den Zylinder mit gleichmäßiger Geschwindigkeit sich bewegen läßt. Diese verschiedene Auffassung kommt im wesentlichen ja nur darauf hinaus, daß man in einem Falle ein ruhendes, im anderen Falle ein mit dem Zylinder bewegtes Koordinatensystem einführt. Dann kann man das dort erhaltene Resultat so aussprechen, *daß der Zylinder bei seiner gleichmäßigen Bewegung in der Flüssigkeit keinen Widerstand erfährt.* Dies *Resultat ist weder auf die spezielle Form des sich bewegenden Körpers, noch auf zweidimensionale Probleme beschränkt.* Vielmehr gilt allgemein der Satz: *Ein in einer vollkommenen Flüssigkeit sich bewegender Körper erfährt gemäß den Euler-Lagrangeschen Gleichungen in derselben keinen Widerstand.* Dieses Resultat ist übrigens unmittelbar plausibel, wenn man bedenkt, daß Reibungskräfte fehlen und folglich die Flüssigkeit an der Oberfläche des eingetauchten Körpers entlang gleitet, ohne überhaupt die Möglichkeit zu haben, Kräfte auf denselben auszuüben.

Der vollkommene Gegensatz zur Erfahrung wird besonders kraß, wenn man eine ebene Lamelle mit ihrer Breitseite im Strome sich bewegen läßt; auch sie erfährt nach der gewöhnlichen Theorie keinen Widerstand.

Wir wollen jetzt das Problem der mit der Breitseite in der Flüssigkeit sich bewegenden Platte, oder der Strömung einer unendlich ausgedehnten *Flüssigkeit, die auf eine ruhende Platte trifft,* unter Berücksichtigung der vorhergehenden Nummer wieder aufnehmen. Wir beschränken uns notgedrungen — da das dreidimensionale Problem nicht erledigt ist — auf den zweidimensionalen Fall, indem wir die Höhe der Platte oder Lamelle als unendlich lang annehmen; nehmen wir diese Richtung als z-Achse, so hängt alles nur noch von x und y ab.

Wir machen, etwas allgemeiner als früher, den Ansatz:

$$\frac{dz}{dw} = \frac{\partial x}{\partial \varphi} + i\,\frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{1}{\sqrt{\varphi + i\psi}}\sqrt{\frac{1}{\varphi + i\psi} - A^2}\,, \tag{142}$$

wo A eine Konstante ist, deren physikalische Bedeutung später zutage treten wird. In unserer früheren Bezeichnung ist also

$$F(\varphi + i\psi) = \frac{1}{\sqrt{\varphi + i\psi}},$$

und diese Funktion ist reell nur für $\psi = 0$. Daher wird dann:

$$\text{(143)} \qquad \left.\frac{\partial x}{\partial \varphi} + i\frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{1}{\sqrt{\varphi}} + \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{\varphi}}\right)^2 - A^2}\ \right\}\ \text{für}\ \psi = 0.$$

Hier muß man wieder zwei Fälle unterscheiden, je nachdem die Wurzel reell oder imaginär ist. Ist

$$-\frac{1}{A} \leqq \sqrt{\varphi} \leqq +\frac{1}{A},$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt:

$$0 \leqq \varphi \leqq \frac{1}{A^2},$$

so ist die Wurzel reell, und es folgt aus (143):

$$\text{(144)} \quad \left.\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{1}{\sqrt{\varphi}} + \sqrt{\frac{1}{\varphi} - A^2},\quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = 0\ \right\}\ \text{für}\ \psi = 0,\quad 0 \leqq \varphi \leqq \frac{1}{A^2}$$

Diese Gleichungen liefern, integriert, denjenigen Teil der Stromlinie $\psi = 0$, der als feste Grenze betrachtet werden kann. Durch geeignete Wahl der Integrationskonstanten folgt:

$$\text{(145)} \qquad x = 2\sqrt{\varphi} + \frac{1}{A}\arcsin\left(A\sqrt{\varphi}\right) + \sqrt{\varphi}\sqrt{1 - A^2\varphi};\quad y = 0.$$

Läßt man $\sqrt{\varphi}$ zwischen den extremen Werten $-\frac{1}{A}$ und $+\frac{1}{A}$ variieren, so stellt (145) den Teil der Abszissenachse dar, der von $x = -\frac{2 + \frac{\pi}{2}}{A}$ bis $x = +\frac{2 + \frac{\pi}{2}}{A}$ geht. Das ist ein Stück von der Breite $\frac{4 + \pi}{A}$, das als feste Lamelle zu betrachten ist.

Ist umgekehrt:

$$-\infty \leqq \sqrt{\varphi} \leqq -\frac{1}{A}, \quad \text{oder} \quad +\frac{1}{A} \leqq \sqrt{\varphi} \leqq +\infty,$$

oder, was dasselbe ist $\frac{1}{A^2} \leqq \varphi \leqq +\infty$, so ist die Wurzel imaginär und es folgt aus (143):

$$\text{(146)} \quad \left.\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{1}{\sqrt{\varphi}};\quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \sqrt{A^2 - \frac{1}{\varphi}}\ \right\}\ \text{für}\ \psi = 0\ \text{und}\ \frac{1}{A^2} \leqq \varphi \leqq +\infty,$$

welche Gleichungen, integriert, die freie Grenze liefern. Denn es ist hierfür die Bedingung erfüllt:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 = A^2 = \text{const.},$$

die gleichzeitig die physikalische Bedeutung der Konstanten A erläutert: sie ist der reziproke Wert der Geschwindigkeit, die in der freien Grenze herrscht und die wir c_0 nennen wollen, also $A = \frac{1}{c_0}$. Man erhält zunächst:

$$x = 2\sqrt{\varphi}.$$

Für y erhält man, wenn man $A\sqrt{\varphi} = \beta$, also $d\varphi = \frac{2\beta\, d\beta}{A^2}$ setzt:

$$y = \int \sqrt{\frac{A^2\varphi - 1}{\sqrt{\varphi}}}\, d\varphi = \frac{2}{A}\int \sqrt{\beta^2 - 1}\, d\beta,$$

was durch die Substitution $\beta = \mathfrak{Cof}\, u$, $d\beta = \mathfrak{Sin}\, u\, du$ übergeht in:

$$y = \frac{2}{A}\int \mathfrak{Sin}^2 u\, du = \frac{1}{A}\int (\mathfrak{Cof}\, 2u - 1)\, du.$$

Das liefert also:

$$y = \frac{1}{2A}\mathfrak{Sin}\, 2u - \frac{u}{A} = \frac{1}{A}\mathfrak{Sin}\, u\, \mathfrak{Cof}\, u - \frac{u}{A},$$

oder, wenn man dieselben Substitutionen rückwärts macht:

$$y = -\frac{1}{A}\mathfrak{Ar\,Cof}\,(A\sqrt{\varphi}) + \sqrt{\varphi}\sqrt{A^2\varphi - 1}. \tag{147}$$

Setzt man noch für $\sqrt{\varphi}$ seinen Wert $\frac{x}{2}$ ein, so erhält man die Gleichung **der freien Grenze**. Man erkennt, daß für $\varphi = \infty$ sowohl x als auch y unendlich groß werden.

Man erhält also folgendes Bild der Strömung (Fig. 224), das noch durch einige weitere Stromlinien ergänzt worden ist. Der ganze schraffierte Raum ist mit ruhender Flüssigkeit, die man neuerdings vielfach „**Totwasser**" nennt, angefüllt; die freie Grenze ist also wieder tatsächlich eine Diskontinuitätsfläche.

Diese Art der Strömung bewirkt nun, daß auf die vordere Seite der Platte von der Flüssigkeit ein größerer Druck ausgeübt wird als auf die hintere. Es entsteht also ein Überdruck, mit anderen Worten: **Die Platte hat einen Widerstand bei ihrer Bewegung zu überwinden.** Wir wollen die an der Vorderseite der Lamelle herrschende Geschwindigkeit durch c bezeichnen; ist dann k eine noch näher zu bestimmende Konstante, so ist der Druck P auf der Vorderseite der Wand:

$$P = k - \frac{s}{2}c^2,$$

wobei, da an der festen Wand nach (144) $\frac{\partial y}{\partial \varphi} = 0$; $\frac{1}{c^2} = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2$, also $dx = \frac{1}{c}\, d\varphi$ ist. An der **freien Grenze** ist dagegen die Geschwindig-

keit $c_0 = \frac{1}{A}$ und der Druck, der längs derselben konstant ist, habe den Wert P_0. P_0 ist auch der Druck der ruhenden Flüssigkeit, d. h. des Totwassers; dieser Druck herrscht also auch an der Hinterfläche der Lamelle. Es ergibt sich dafür nach der obigen Gleichung:

$$P_0 = k - \frac{\varepsilon}{2} c_0^2 = k - \frac{\varepsilon}{2 A^2}.$$

Durch Subtraktion beider Gleichungen und Multiplikation mit einem

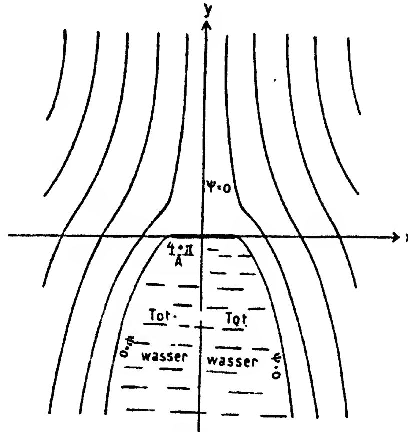


Fig. 224.

Längenelement dx der Lamelle folgt die Kraft, die von der Flüssigkeit auf das unendlich kleine Stück dx ausgeübt wird:

$$(148) \qquad (P - P_0)\,dx = d\mathfrak{K} = \frac{\varepsilon}{2}(c_0^2 - c^2)\,dx = \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{1}{A^2} - c^2\right) dx.$$

Setzen wir darin, nach dem Obigen, $dx = \frac{1}{c}\,d\varphi$, so folgt:

$$(149) \qquad d\mathfrak{K} = \frac{\varepsilon}{2}\left\{\frac{c_0^2}{c} - c\right\} d\varphi,$$

und daraus durch Integration über die feste Wand, d. h. von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \frac{1}{A^2}$ die Gesamtkraft dem Betrage nach:

$$(150) \qquad |\mathfrak{K}| = \frac{\varepsilon c_0}{2}\int_0^{\frac{1}{A^2}}\left(\frac{c_0}{c} - \frac{c}{c_0}\right) d\varphi = \varepsilon c_0 \int_0^{\frac{1}{A^2}} \sqrt{\frac{c_0^2}{\varphi} - 1}\; d\varphi = \varepsilon c_0 \int_0^{c_0^2} \frac{\sqrt{1 - \frac{\varphi}{c_0^2}}}{\sqrt{\frac{\varphi}{c_0^2}}}\, d\varphi.$$

Die letzteren Formeln ergeben sich, wenn man (144) berücksichtigt. Nach dieser Gleichung ist, was wir schon vorhin benutzten, $\frac{\delta x}{\delta \varphi} = \frac{1}{c}$, längs der festen Wand. Daher erhält man für $\frac{c_0}{c}$ den Wert:

$$\frac{c_0}{c} = \frac{c_0}{\sqrt{\varphi}} + \sqrt{\frac{c_0^2}{\varphi} - 1}, \quad \text{und für } \frac{c}{c_0} \text{ ebenso:}$$

$$\frac{c}{c_0} = \frac{c_0}{\sqrt{\varphi}} - \sqrt{\frac{c_0^2}{\varphi} - 1},$$

woraus der angegebene Wert sofort folgt. Die Ausführung der Integration liefert für den Betrag der Kraft:

(151) $$|\mathfrak{K}| = 8\pi c_0^3.$$

Dies ist die Kraft auf ein Stück der Lamelle von der Höhe 1 und der Breite $\frac{4+\pi}{A} = (4+\pi) c_0$. Demgemäß ist der resultierende Überdruck P pro Quadratzentimeter:

(152) $$\overline{P} = \frac{8\pi c_0^3}{(4+\pi) c_0} = \frac{8\pi c_0^2}{4+\pi}.$$

Der Widerstand, den die Lamelle bei ihrer Bewegung erfährt, ist demnach proportional dem Quadrate der Geschwindigkeit c_0, die an der freien Grenze herrscht.

Steht die Platte nicht senkrecht zu ihrer Fortbewegungsrichtung im Strome, sondern bildet ihre Ebene mit der Fortbewegungsrichtung den Winkel α, so erhält man durch eine ganz analoge Rechnung den Widerstand pro Flächeneinheit (der natürlich senkrecht zur Platte steht):

(153) $$\overline{P} = \frac{8\pi \sin\alpha \cdot c_0^2}{4 + \pi \cdot \sin\alpha}.$$

Für kleine Winkel α kann man also angenähert setzen:

(153a) $$\overline{P} = \gamma c_0^2 \cdot \sin\alpha, \text{ wo } \gamma = \frac{8\pi}{4} \text{ ist.}$$

Die Gleichungen (152) und (153) zeigen zunächst deutlich, welchen Fortschritt der Hydrodynamik die Einführung von Diskontinuitätsflächen darstellt; das theoretische Verhalten der Flüssigkeit kommt nach Berücksichtigung dieses Umstandes dem tatsächlichen Verhalten jedenfalls unendlich viel näher als vorher. Denn in der Tat ist der beobachtete Widerstand, den ein schnell in einer Flüssigkeit bewegter Körper erfährt, proportional dem Quadrate der Geschwindigkeit. Andererseits ist aber zu bemerken, daß der Widerstand tatsächlich mehrere Male größer ist als der nach (152) oder (153) berechnete. Lord Kelvin[1]) hat nach Versuchen von Dines einen Vergleich zwischen Theorie und Experiment durchgeführt, der ihn zu dem Ergebnis führte, daß (152) den Widerstand etwa um $^2/_3$ zu klein angibt, und für kleine Neigungswinkel α

[1]) Kelvin, Math. and phys. pap. IV, pag. 215ff.

kann die Diskrepanz noch erheblich größer werden.[1]) Es kann also anderseits keinem Zweifel unterliegen, daß die Widerstandsgesetze (152) oder (153) nicht zur völligen Erklärung der Beobachtungen ausreichen; es muß vielmehr der hier gänzlich vernachlässigten Reibung Rechnung getragen werden, die bewirkt, daß die Diskontinuitätsfläche nicht bestehen bleiben kann und daß Wirbel auftreten. Auf diese komplizierten Verhältnisse kommen wir im XIX. Kapitel noch einmal zurück.

Nimmt man jedoch (153a) rein formal, indem man den Koeffizienten γ nicht aus der Theorie bestimmt, sondern der Erfahrung entnimmt, so ist diese Gleichung, was zuerst Lord Rayleigh erkannt und betont hat, von großer Bedeutung für den künstlichen Flug, z. B. den horizontalen Flug von Aeroplanen. Wenn die Fläche eines solchen S ist, so ist die ganze ausgeübte Kraft auf denselben nach (153a): $\gamma S c_0^2 \sin \alpha$, die senkrecht auf der Ebene desselben steht. Die nach unten gerichtete (vertikale) Komponente ist also $\gamma S c_0^2 \sin \alpha \cos \alpha$, oder, da der $\cos \alpha$ wegen der vorausgesetzten Kleinheit von α nahezu gleich 1 ist, $\gamma S c_0^2 \sin \alpha$.

Um einen solchen Aeroplan vorwärts zu bewegen, bedarf es einer treibenden horizontalen Kraft $\mathfrak{K}$, die die horizontale Komponente des Widerstandes $\gamma \cdot S c_0^2 \sin^2 \alpha$ überwindet, d. h. einer Kraft vom Betrage K:

(154) $$K = \gamma S c_0^2 \sin^2 \alpha .$$

Anderseits aber ist, da der Aeroplan schwebt, das Gewicht W desselben gleich der Vertikalkomponente des Widerstandes, also angenähert:

(155) $$W = \gamma S c_0^2 \sin \alpha ,$$

woraus durch Vergleichung folgt:

(156) $$K = W \cdot \sin \alpha .$$

Daraus geht hervor, daß man mit einer gegebenen Kraft K beliebig große Gewichte schwebend halten kann, wenn man nur den Winkel α klein genug und c_0 groß genug wählt, damit die Gleichung (155) erfüllt werden kann.

189. Geschlossene Unstetigkeitsflächen.[2])

In der Atmosphäre kommen manchmal in sich zurücklaufende Potentialströmungen vor, d. h. solche, bei denen die Stromlinien geschlossene Kurven sind, die ein ruhendes Luftgebiet umkreisen. Es besteht dann an irgendeiner Stelle im Innern eine geschlossene Unstetigkeitsfläche. Da diese Fälle für die Meteorologie immerhin von Interesse

[1]) Dieselben Abweichungen zeigen sich bei den Untersuchungen von O. Föppl, Jahrbuch der Motorluftschiff-Studiengesellschaft 1911, S. 72; besonders Fig. 9.

[2]) Vergl. hierzu W. Wien, Lehrbuch der Hydrodynamik p. 115ff.

sind, wollen wir einen ganz einfachen Fall dieser Art hier behandeln. Wir setzen etwa zu diesem Zwecke:

(157) $$\frac{dz}{dw} = \frac{\partial x}{\partial \varphi} + i\frac{\partial y}{\partial \varphi} = e^{\varphi + i\psi}.$$

Daraus folgt zunächst:

$$z = x + iy = e^{\varphi + i\psi}, \quad \text{d. h.}$$

(158) $$\begin{cases} x = e^{\varphi} \cos \psi, \\ y = e^{\varphi} \sin \varphi. \end{cases}$$

Die Kurven $\varphi = \text{Const.}$, die wir hier als Stromlinien betrachten wollen, erhält man durch Quadrieren und Addieren und nachheriges Konstantsetzen von φ zu:

$$x^2 + y^2 = e^{2\varphi} = \text{Const.}$$

Es sind also Kreise um den Anfangspunkt.

Die Niveaulinien $\psi = \text{Const.}$ erhält man durch Division der beiden Gleichungen:

$$\psi = \text{arc tang} \frac{y}{x} = \text{Const.}$$

Das sind Radien, die unter verschiedenen Richtungen vom Anfangspunkte ausgehen. Wir haben also dasselbe Problem vor uns, das wir bereits in Nummer 176 behandelt haben: die Strömung ist dort durch die Figuren 214 und 216 dargestellt. Da die Stromlinien Kreise sind, so kann man eine von ihnen, die etwa den Radius R_2 haben möge, durch eine kreisförmige feste Wand ersetzen; ferner muß der Anfangspunkt, in dem die Geschwindigkeit unendlich wird, ausgeschlossen werden. Dies kann entweder so geschehen, wie in Nummer 176, daß derselbe durch eine zweite kreisförmige Wand vom Radius R_1 ($< R_2$) ausgeschlossen wird, oder aber auch dadurch, wie man ohne Rechnung ersieht, daß man den Innenraum bis zum Radius R_1 mit ruhender Flüssigkeit erfüllt denkt. Dann stoßen im Abstande R_1 vom Zentrum ruhende und bewegte Flüssigkeit aneinander, was mögist, da die Geschwindigkeiten tangential sind. Natürlich geht dies auch aus den Formeln (157) hervor. Sie liefern:

(159) $$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = e^{\varphi} \cos \psi; \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = e^{\varphi} \sin \psi,$$

und durch Addieren und Quadrieren folgt:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 = e^{2\varphi},$$

und das ist, da für die Stromlinie φ gleich einer Konstanten ist, die Bedingung, die für Diskontinuitätsflächen gelten muß. Wir haben also

das Bild der Fig. 125; der schraffierte Innenraum vom Radius R_1 ist mit Totwasser ($u=v=0$) erfüllt. Hier ist die Diskontinuitätsfläche also wirklich eine geschlossene.

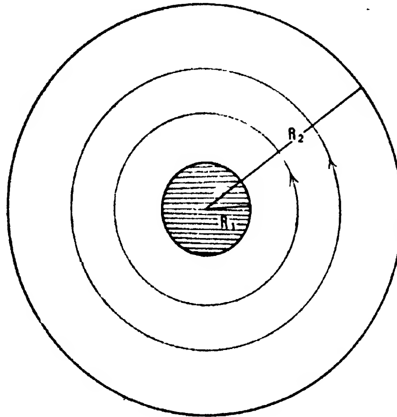


Fig. 225.

Denkt man sich, was ohne Storung geschehen kann, die Stromung durch zwei zur xy-Ebene parallele Wände begrenzt, so haben wir hier innerhalb starrer Wände eine Potentialströmung im einfach zusammenhängenden Raume; denn die Stellen $u=v=0$ im Totwasser gehören ja mit $\psi=$ Const auch zum Potentialraum. Das ist nur scheinbar ein Widerspruch mit dem Helmholtzschen Satze, der die Stetigkeit der Geschwindigkeitskomponenten voraussetzt, die hier verletzt ist.

Achtzehntes Kapitel.

Wirbelbewegung.

181. Erhaltung der Wirbelbewegungen.

Nachdem wir im vorigen Kapitel die mit Geschwindigkeitspotential ausgestatteten Bewegungsformen untersucht haben, gehen wir jetzt über zu den Rotations- oder Wirbelbewegungen von Flüssigkeiten. Dabei sind die Rotationskomponenten p, q, r, d. h. die Ausdrücke

$$(1)\qquad p = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right),\quad q = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right),\quad r = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

entweder sämtlich oder wenigstens teilweise von 0 verschieden. Das Verschwinden dieser Komponenten ist aber die Bedingung für die Existenz eines Geschwindigkeitspotentials. Man erkennt daher, daß Rotationsbewegung und Potentialbewegung sich gegenseitig ausschließen.

Wir haben in Nummer 173 den folgenden Satz bewiesen: „Wenn für ein Flüssigkeitsteilchen zu irgendeiner Zeit ein Geschwindigkeitspotential existiert, so existiert es zu allen Zeiten für dieses Teilchen". Ein analoger Satz existiert für die Rotationsbewegungen und wurde zuerst von Helmholtz ausgesprochen. Zum Beweise gehen wir aus von der dazu besonders geeigneten Weberschen Transformation [XVII. Kapitel Gleichung (30) pag. 768]:

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{Dx}{Dt}\dfrac{\partial x}{\partial a} + \dfrac{Dy}{Dt}\dfrac{\partial y}{\partial a} + \dfrac{Dz}{Dt}\dfrac{\partial z}{\partial a} = u_0 + \dfrac{\partial \chi}{\partial a}, \\[2ex] \dfrac{Dx}{Dt}\dfrac{\partial x}{\partial b} + \dfrac{Dy}{Dt}\dfrac{\partial y}{\partial b} + \dfrac{Dz}{Dt}\dfrac{\partial z}{\partial b} = v_0 + \dfrac{\partial \chi}{\partial b}, \\[2ex] \dfrac{Dx}{Dt}\dfrac{\partial x}{\partial c} + \dfrac{Dy}{Dt}\dfrac{\partial y}{\partial c} + \dfrac{Dz}{Dt}\dfrac{\partial z}{\partial c} = w_0 + \dfrac{\partial \chi}{\partial c}. \end{cases}$$

Darin bedeuten a, b, c, u_0, v_0, w_0 die Koordinaten resp. Geschwindigkeitskomponenten eines Teilchens zur Zeit 0; $x, y, z, \frac{Dx}{Dt}, \frac{Dy}{Dt}, \frac{Dz}{Dt}$ resp. dieselben Größen zur Zeit t und χ eine eindeutige Funktion der Koordinaten. Durch kreuzweise Differentiation kann man aus ihnen

Gleichungen ableiten, die die Rotationskomponenten zur Zeit t mit denen zur Zeit 0 in Verbindung setzen. Differentiieren wir z. B. die zweite Gleichung (2) nach c, die dritte nach b und subtrahieren, so erhalten wir rechts:

$$(3)\qquad \frac{\partial v_0}{\partial c} - \frac{\partial w_0}{\partial b} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial b\,\partial c} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial c\,\partial b} = \frac{\partial v_0}{\partial c} - \frac{\partial w_0}{\partial b},$$

und das ist gleich der negativen doppelten x-Komponente der Rotationsgeschwindigkeit zur Zeit $t = 0$, also in unserer alten Bezeichnungsweise $-2p_0$, wo der Index auf die Zeit 0 hindeuten soll. Wir erhalten also, wenn wir $\frac{Dx}{Dt}, \frac{Dy}{Dt}, \frac{Dz}{Dt}$ jetzt durch u, v, w bezeichnen:

$$(4)\quad \frac{\partial}{\partial c}\left[u\frac{\partial x}{\partial b} + v\frac{\partial y}{\partial b} + w\frac{\partial z}{\partial c}\right] - \frac{\partial}{\partial b}\left[u\frac{\partial x}{\partial c} + v\frac{\partial y}{\partial c} + w\frac{\partial z}{\partial c}\right] = -2p_0.$$

Führt man die Differentiationen aus, so folgt zunächst:

$$\frac{\partial u}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial b} + u\frac{\partial^2 x}{\partial b\,\partial c} + \frac{\partial v}{\partial c}\frac{\partial y}{\partial b} + v\frac{\partial^2 y}{\partial b\,\partial c} + \frac{\partial w}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial c} + w\frac{\partial^2 z}{\partial b\,\partial c}$$
$$-\frac{\partial u}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial c} - u\frac{\partial^2 x}{\partial b\,\partial c} - \frac{\partial v}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial c} - v\frac{\partial^2 y}{\partial b\,\partial c} - \frac{\partial w}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial b} - w\frac{\partial^2 z}{\partial b\,\partial c},$$

oder einfacher, da die geraden Glieder sich gegenseitig fortheben, in anderer Anordnung:

$$(5\text{a})\quad \begin{cases} \left(\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial u}{\partial c} - \frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial u}{\partial b}\right) + \left(\frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial v}{\partial c} - \frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial v}{\partial b}\right) \\ \qquad + \left(\frac{\partial z}{\partial b}\frac{\partial w}{\partial c} - \frac{\partial z}{\partial c}\frac{\partial w}{\partial b}\right) = -2p_0, \end{cases}$$

und dazu treten durch zyklische Vertauschung in bezug auf a, b, c noch zwei analoge:

$$(5\text{b})\quad \begin{cases} \left(\frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial u}{\partial a} - \frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial u}{\partial c}\right) + \left(\frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial v}{\partial a} - \frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial v}{\partial c}\right) \\ \qquad + \left(\frac{\partial z}{\partial c}\frac{\partial w}{\partial a} - \frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial w}{\partial c}\right) = -2q_0. \end{cases}$$

$$(5\text{c})\quad \begin{cases} \left(\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial u}{\partial b} - \frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial u}{\partial a}\right) + \left(\frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial v}{\partial b} - \frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial v}{\partial a}\right) \\ \qquad + \left(\frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial w}{\partial b} - \frac{\partial z}{\partial b}\frac{\partial w}{\partial a}\right) = -2r_0. \end{cases}$$

Diese Gleichungen werden der Reihe nach multipliziert mit $\frac{\partial x}{\partial a}, \frac{\partial x}{\partial b}, \frac{\partial x}{\partial c}$ und addiert; dann erhält man, da wieder eine Reihe von Gliedern sich gegenseitig forthebt:

$$
(6)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial v}{\partial a}\left[\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial c}-\frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial y}{\partial b}\right]+\frac{\partial v}{\partial b}\left[\frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial y}{\partial a}-\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial c}\right]\\
&+\frac{\partial v}{\partial c}\left[\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b}-\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial a}\right]-\frac{\partial w}{\partial a}\left[\frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial b}-\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial c}\right]\\
&-\frac{\partial w}{\partial b}\left[\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial c}-\frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial a}\right]-\frac{\partial w}{\partial c}\left[\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial a}-\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial b}\right]\\
&\qquad=-2\dot p_0\frac{\partial x}{\partial a}-2\dot q_0\frac{\partial x}{\partial b}-2\dot r_0\frac{\partial x}{\partial c}.
\end{aligned}\right.
$$

Um die linke Seite der Gleichung (6) weiter zu vereinfachen, sind einige Umrechnungen notwendig:

Wir betrachten die bereits im XVII. Kapitel in Nummer 171 eingeführte Determinante:

$$
(7)\qquad \Delta=\begin{vmatrix}
\frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial x}{\partial c}\\
\frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial c}\\
\frac{\partial z}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial c}
\end{vmatrix}.
$$

Die sechs Klammerausdrücke der linken Seite von (6) sind nun offenbar sämtlich Subdeterminanten von Δ. Die Subdeterminanten wollen wir zunächst durch ein einfacheres Symbol bezeichnen, zu dem man folgendermaßen gelangt: Wir greifen ein beliebiges Glied von Δ heraus, z. B. $\frac{\partial y}{\partial a}$ und denken uns die horizontale und vertikale Reihe, der dieses Glied angehört, durchstrichen. Dann bleibt die Subdeterminante

$$
\begin{vmatrix}
\frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial x}{\partial c}\\
\frac{\partial z}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial c}
\end{vmatrix}
=\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial z}-\frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial b}
$$

übrig, die wir die zu $\left(\frac{\partial y}{\partial a}\right)$ „zugehörige Subdeterminante" nennen und zur Kennzeichnung dieser Zugehörigkeit durch $\left[\frac{\partial y}{\partial a}\right]$ bezeichnen wollen. In dieser Bezeichnungsweise ist z. B.

$$
\begin{vmatrix}
\frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial c}\\
\frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial c}
\end{vmatrix}
=\left[\frac{\partial z}{\partial a}\right]\ \text{usw.}
$$

Mit diesen Abkürzungen kann (6) geschrieben werden:

$$(8)\quad \begin{cases} \left\{\dfrac{\partial v}{\partial a}\left[\dfrac{\partial z}{\partial a}\right] + \dfrac{\partial v}{\partial b}\left[\dfrac{\partial z}{\partial b}\right] + \dfrac{\partial v}{\partial c}\left[\dfrac{\partial z}{\partial c}\right]\right\} \\ -\left\{\dfrac{\partial w}{\partial a}\left[\dfrac{\partial y}{\partial a}\right] + \dfrac{\partial w}{\partial b}\left[\dfrac{\partial y}{\partial b}\right] + \dfrac{\partial w}{\partial c}\left[\dfrac{\partial y}{\partial c}\right]\right\} \\ = -2\dot{p}_0\dfrac{\partial x}{\partial a} - 2\dot{q}_0\dfrac{\partial x}{\partial b} - 2\dot{r}_0\dfrac{\partial x}{\partial c}. \end{cases}$$

Die Größen $\left[\dfrac{\partial x}{\partial a}\right]$ usw. stehen nun in einem einfachen Zusammenhange mit den „umgekehrten" Differentialquotienten $\left(\dfrac{\partial a}{\partial x}\right)$ usw. Denn man hat:

$$(9)\quad \begin{cases} dx = \dfrac{\partial x}{\partial a}da + \dfrac{\partial x}{\partial b}db + \dfrac{\partial x}{\partial c}dc, \\ dy = \dfrac{\partial y}{\partial a}da + \dfrac{\partial y}{\partial b}db + \dfrac{\partial y}{\partial c}dc, \\ dz = \dfrac{\partial z}{\partial a}da + \dfrac{\partial z}{\partial b}db + \dfrac{\partial z}{\partial c}dc, \end{cases}$$

und ferner ebenso, wenn a, b, c als Funktionen von x, y, z betrachtet werden:

$$(10)\quad \begin{cases} da = \dfrac{\partial a}{\partial x}dx + \dfrac{\partial a}{\partial y}dy + \dfrac{\partial a}{\partial z}dz, \\ db = \dfrac{\partial b}{\partial x}dx + \dfrac{\partial b}{\partial y}dy + \dfrac{\partial b}{\partial z}dz, \\ dc = \dfrac{\partial c}{\partial x}dx + \dfrac{\partial c}{\partial y}dy + \dfrac{\partial c}{\partial z}dz. \end{cases}$$

Löst man das System (9) nach da, db, dc auf, so erhält man in anderer Gestalt ein mit dem System (10) äquivalentes. Man erhält z. B. aus (9):

$$da = \frac{dx\left\{\dfrac{\partial y}{\partial b}\dfrac{\partial z}{\partial c} - \dfrac{\partial y}{\partial c}\dfrac{\partial z}{\partial b}\right\} + dy\left\{\dfrac{\partial x}{\partial c}\dfrac{\partial z}{\partial b} - \dfrac{\partial x}{\partial b}\dfrac{\partial z}{\partial c}\right\} + dz\left\{\dfrac{\partial x}{\partial b}\dfrac{\partial y}{\partial c} - \dfrac{\partial x}{\partial c}\dfrac{\partial y}{\partial b}\right\}}{\Delta},$$

und das ist in der oben eingeführten symbolischen Schreibweise für die Subdeterminanten:

$$(11)\quad da = \frac{\left[\dfrac{\partial x}{\partial a}\right]}{\Delta}dx + \frac{\left[\dfrac{\partial y}{\partial a}\right]}{\Delta}dy + \frac{\left[\dfrac{\partial z}{\partial a}\right]}{\Delta}dz \text{ u. s. f.}$$

Da (11) mit der ersten Gleichung von (10) identisch sein muß, so liest man leicht folgende Beziehungen ab:

$$(12)\quad \left[\frac{\partial x}{\partial a}\right] = \Delta\frac{\partial a}{\partial x}; \quad \left[\frac{\partial y}{\partial a}\right] = \Delta\frac{\partial a}{\partial y}; \quad \left[\frac{\partial z}{\partial a}\right] = \Delta\frac{\partial a}{\partial z},$$

und so allgemein. Daher kann (8) geschrieben werden:

$$\Delta\cdot\left\{\frac{\partial v}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial z}\right\} - \Delta\cdot\left\{\frac{\partial w}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial y}\right\}$$
$$= -2\dot{p}_0\frac{\partial x}{\partial a} - 2\dot{q}_0\frac{\partial x}{\partial b} - 2\dot{r}_0\frac{\partial x}{\partial c}$$

Durch zyklische Vertauschung in bezug auf x, y, z erhält man noch zwei analoge Gleichungen, die in vereinfachter Schreibweise lauten, da z. B.

$$\frac{\partial v}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z}$$

ist.

$$(13)\quad \begin{cases} \dot{p} = \dfrac{\dot{p}_0 \dfrac{\partial x}{\partial a} + \dot{q}_0 \dfrac{\partial x}{\partial b} + \dot{r}_0 \dfrac{\partial x}{\partial c}}{\varDelta}, \\[2ex] \dot{q} = \dfrac{\dot{p}_0 \dfrac{\partial y}{\partial a} + \dot{q}_0 \dfrac{\partial y}{\partial b} + \dot{r}_0 \dfrac{\partial y}{\partial c}}{\varDelta}, \\[2ex] \dot{r} = \dfrac{\dot{p}_0 \dfrac{\partial z}{\partial a} + \dot{q}_0 \dfrac{\partial z}{\partial b} + \dot{r}_0 \dfrac{\partial z}{\partial c}}{\varDelta}. \end{cases}$$

Dazu nehmen wir die Kontinuitätsgleichung in der Lagrangeschen Form [XVII. Kapitel Gleichung (23) auf pag. 767]:

$$\frac{D(\varepsilon \varDelta)}{Dt} = 0,$$

die aussagt, daß $\varepsilon \varDelta$ eine von der Zeit unabhängige Konstante ist. Multiplizieren wir also auf der rechten Seite von (13) oben und unten mit ε, so ergibt z. B. die erste Gleichung:

$$\dot{p} = \varepsilon \left\{ \frac{\dot{p}_0}{\varepsilon \varDelta}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\dot{q}_0}{\varepsilon \varDelta}\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\dot{r}_0}{\varepsilon \varDelta}\frac{\partial x}{\partial c} \right\}.$$

Darin sind $\frac{\dot{p}_0}{\varepsilon \varDelta}$, $\frac{\dot{q}_0}{\varepsilon \varDelta}$, $\cdots$ von der Zeit unabhängige Größen, wie sofort aus der Bedeutung von $\dot{p}_0, \dot{q}_0, \dot{r}_0$ folgt. Setzen wir zur Abkürzung:

$$(14)\qquad \frac{\dot{p}_0}{\varepsilon \varDelta} = A; \quad \frac{\dot{q}_0}{\varepsilon \varDelta} = B; \quad \frac{\dot{r}_0}{\varepsilon \varDelta} = C,$$

wo A, B, C von der Zeit unabhängig sind, so lassen sich die Gleichungen (13) schreiben:

$$(15)\quad \begin{cases} \dot{p} = \varepsilon\left(A \dfrac{\partial x}{\partial a} + B \dfrac{\partial x}{\partial b} + C \dfrac{\partial x}{\partial c}\right), \\[2ex] \dot{q} = \varepsilon\left(A \dfrac{\partial y}{\partial a} + B \dfrac{\partial y}{\partial b} + C \dfrac{\partial y}{\partial c}\right), \\[2ex] \dot{r} = \varepsilon\left(A \dfrac{\partial z}{\partial a} + B \dfrac{\partial z}{\partial b} + C \dfrac{\partial z}{\partial c}\right). \end{cases}$$

Diese Gleichungen, die man als die „Helmholtzschen Wirbelgleichungen" bezeichnen kann[1]), lehren folgendes: „Sind die Rotationskomponenten $\dot{p}_0, \dot{q}_0, \dot{r}_0$ zur Zeit Null gleich Null, so sind auch die

---

[1]) Helmholtz hat nicht diese Gleichungen selbst, sondern ihnen ähnliche aus den Eulerschen Gleichungen abgeleitet, doch ist seine Schlußweise nicht ganz streng. Die obige Darstellung stammt im wesentlichen von Kirchhoff, der sie dem Cauchyschen Beweise für den Lagrangeschen Satz von der Erhaltung des Geschwindigkeitspotentials nachgebildet hat.

Rotationskomponenten $\dot{p}$, $\dot{q}$, $\dot{r}$ zu jeder anderen Zeit gleich Null, und sind $\dot{p}_0$, $\dot{q}_0$, $\dot{r}_0$ zur Zeit 0 von Null verschieden, so sind $\dot{p}$, $\dot{q}$, $\dot{r}$ zu allen Zeiten von Null verschieden." Mit anderen Worten: „Ein Flüssigkeitsteilchen rotiert entweder nie oder immer." Oder noch anders ausgedrückt: „Rotationsbewegungen können durch konservative Kräfte, wie sie hier vorausgesetzt sind, nie erzeugt werden; wenn Rotationsbewegungen existieren, so existieren sie von Anbeginn an."

Dieses Theorem nennt man den „Satz von der Erhaltung der Rotationsbewegung"; er schließt den Lagrangeschen Satz von der Erhaltung der Potentialbewegung als speziellen Fall in sich. Wegen seiner Wichtigkeit ist es nicht überflüssig, einen zweiten kürzeren Beweis dieses Satzes zu geben, bei dem vom Stokesschen Satze Gebrauch gemacht wird. Wir multiplizieren zu dem Zwecke die Lagrangeschen Gleichungen (2) resp. mit da, db, dc und addieren. Dann folgt, da $\frac{Dx}{Dt}$, $\frac{Dy}{Dt}$, $\frac{Dz}{Dt}$ resp. gleich u, v, w sind:

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz = u_0\,da + v_0\,db + w_0\,dc + d\chi. \tag{16}$$

Nun wollen wir zur Zeit $t=0$ eine Kurve C_0, die innerhalb der Flüssigkeit sich befindet, betrachten. Diese Kurve C_0 wird zur Zeit $t=0$ von gewissen Flüssigkeitsteilchen gebildet; zur Zeit t bilden dieselben Teilchen eine andere Kurve, die wir C nennen wollen. Eine Kurve, die stets aus denselben materiellen Teilchen besteht, nennt man der Kürze halber eine materielle Kurve. C_0 und C stellen also dieselbe materielle Kurve zu verschiedenen Zeiten dar; der analytische Ausdruck von C_0 und C ist im allgemeinen natürlich verschieden. Wenn wir nun die Zirkulation längs einer materiellen Kurve bilden wollen, so haben wir auf der rechten Seite von (16), die sich ja auf $t=0$ bezieht, über die Kurve C_0 zu integrieren, links dagegen müssen wir, da die Integration sich ja auf die nämlichen Flüssigkeitsteilchen zur Zeit t bezieht, über C integrieren. Das liefert, da $d\chi$ das Differential einer eindeutigen Funktion der Koordinaten ist, dessen Integral über eine geschlossene Kurve verschwindet:

$$\int_C (u\,dx + v\,dy + w\,dz) = \int_{C_0} (u_0\,da + v_0\,db + w_0\,dc). \tag{17}$$

Durch die Kurve C_0 legen wir eine Fläche S_0; die auf derselben liegender Flüssigkeitsteilchen bilden zur Zeit t eine Fläche S, die von der Kurve C berandet wird. Also liefert der Stokessche Satz, wenn wir die Rotation zur Zeit $t=0$ durch den Index 0 auszeichnen, angewendet auf (17):

$$\int \mathfrak{u}_n\,dS = \int (\mathfrak{u}_n)_0\,dS_0. \tag{17a}$$

Ist die rechte Seite gleich Null, d. h. $\mathfrak{u}_0 = 0$, so muß auch $\mathfrak{u} = 0$ sein, und wenn $\mathfrak{u}_0 \neq 0$ ist, so muß auch $\mathfrak{u} \neq 0$ sein. Das ist also wieder der oben abgeleitete Erhaltungssatz.

182. Erhaltung der Wirbellinien.

Wir wollen jetzt zwei Teilchen betrachten, die zur Zeit $t=0$ auf der Rotationsachse liegen. Ihre Anfangskoordinaten seien (a, b, c) resp. $(a+da, b+db, c+dc)$. Die Verbindungslinie derselben ist nach Voraussetzung die Rotationsachse, und deren Richtungskosinusse sind daher offenbar gleich

$$\frac{da, db, dc}{\sqrt{da^2+db^2+dc^2}},$$

also proportional den Größen da, db, dc. Daraus folgt die Proportion

(18) $$da:db:dc = p_0:q_0:r_0.$$

Denn diese drückt [vgl. z. B. Gleichung (21) des X. Kapitels auf pag. 460] aus, daß die Richtung der Rotationsachse in die Verbindungslinie der beiden Teilchen fällt. Aus (14) folgt nun:

(19) $$p_0:q_0:r_0 = A:B:C,$$

d. h. unter Berücksichtigung von (18):

$$A:B:C = da:db:dc.$$

Also können wir schreiben, wenn δ eine unendlich kleine Konstante bedeutet:

(20) $$\begin{cases} \delta\cdot A = da, \\ \delta\cdot B = db, \\ \delta\cdot C = dc. \end{cases}$$

Diese Werte A, B, C wollen wir in die Helmholtzschen Wirbelgleichungen (15) einsetzen:

(21) $$\begin{cases} p = \frac{\varepsilon}{\delta}\left(\frac{\partial x}{\partial a}da + \frac{\partial x}{\partial b}db + \frac{\partial x}{\partial c}dc\right) = \frac{\varepsilon}{\delta}dx, \\ q = \frac{\varepsilon}{\delta}\left(\frac{\partial y}{\partial a}da + \frac{\partial y}{\partial b}db + \frac{\partial y}{\partial c}dc\right) = \frac{\varepsilon}{\delta}dy, \\ r = \frac{\varepsilon}{\delta}\left(\frac{\partial z}{\partial a}da + \frac{\partial z}{\partial b}db + \frac{\partial z}{\partial c}dc\right) = \frac{\varepsilon}{\delta}dz, \end{cases}$$

und daraus folgt die (18) analoge Proportion:

(22) $$p:q:r = dx:dy:dz,$$

deren physikalische Bedeutung leicht zu verstehen ist. Denn die beiden Flüssigkeitsteilchen (a, b, c) und $(a+da, b+db, c+dc)$, die wir eben zur Zeit 0 betrachteten, haben jetzt zur Zeit t die Koordinaten (x, y, z) und $(x+dx, y+dy, z+dz)$; ihre Verbindungslinie hat also Richtungskosinusse, die den Differentialen dx, dy, dz proportional sind. Demgemäß sagt Gleichung (22) aus, daß die beiden Teilchen auch zur Zeit t

noch auf der Rotationsachse liegen. Also folgt allgemein der Satz: „Liegt ein Teilchen zu irgendeiner Zeit auf der Rotationsachse, so liegt es stets auf derselben". Wir wollen nun Kurven von der Beschaffenheit ziehen, daß ihre Tangente in jedem Punkte mit der Richtung der Rotationsachse in diesem Punkte übereinstimmt. Diese Kurven heißen nach Helmholtz „Wirbelachsen" oder „Wirbellinien". Dann kann man den oben bewiesenen Satz so aussprechen: „Die Wirbellinien bestehen stets aus denselben materiellen Teilchen", oder: „Die Eigenschaft einer materiellen Kurve, Wirbellinie zu sein, bleibt für alle Zeiten erhalten".

Wir wollen diesen gleichfalls von Helmholtz herrührenden Satz als den „Satz von der Erhaltung der Wirbellinien" bezeichnen.

183. Zeitliche und räumliche Konstanz der Wirbelintensität.

Quadriert und addiert man die Gleichungen (21), so folgt aus ihnen:

$$p^2 + q^2 + r^2 = \frac{\varepsilon^2}{\delta^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

und wenn ω der Betrag der resultierenden Rotationsgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ und $ds = \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$ ein Längenelement der Wirbellinie bedeutet:

$$\omega = \frac{\varepsilon}{\delta}\, ds. \tag{23}$$

Wir wollen nun durch alle Punkte der Berandung einer unendlich kleinen Fläche die Wirbellinien ziehen. Dann entsteht (Fig. 226) ein röhrenförmiges Gebilde, dessen Mantel aus lauter Wirbellinien besteht und dessen senkrechter Querschnitt an der betrachteten Stelle f sein möge. Ein solches Gebilde nennen wir einen „Wirbelfaden" oder „Wirbelkanal". Grenzen wir ein Stück des Wirbelkanals von der Länge ds ab, so ist die in demselben eingeschlossene Masse $= \varepsilon f ds$, die natürlich zeitlich unveränderlich ist. Also haben wir die Gleichung:

$$\frac{D}{Dt}(\varepsilon f ds) = 0.$$

Daraus folgt, wenn wir Gleichung (23) auf beiden Seiten mit f multiplizieren, da δ eine Konstante ist:

$$\frac{D}{Dt}(\omega f) = \frac{D}{Dt}\left(\frac{\varepsilon f ds}{\delta}\right) = 0, \tag{24}$$

oder ωf gleich einer Konstanten in bezug auf die Zeit. D. h.: „Das Produkt aus der Drehungsgeschwindigkeit und dem

Querschnitt an einer Stelle eines Wirbelfadens ist von der Zeit unabhängig."

Für dieses Produkt hat Helmholtz den Namen „Wirbelintensität" eingeführt.

Man kann noch weiter beweisen, daß die Wirbelintensität auch längs des ganzen Wirbelkanals eine räumliche Konstante ist. Wir betrachten ein endliches Stück des Wirbelfadens (Fig. 227). An dem einen Ende

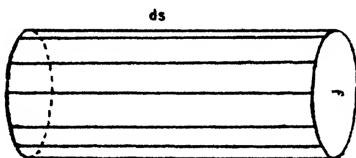


Fig. 226.

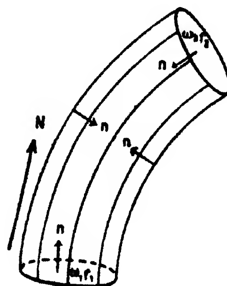


Fig. 227.

seien Rotationsgeschwindigkeit und Querschnitt ω_1 resp. f_1, an dem anderen ω_2 und f_2. Nun sind die Komponenten der Rotationsgeschwindigkeit definiert durch Gleichung (1):

$$2p = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z},$$
$$2q = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x},$$
$$2r = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Differentiieren wir diese der Reihe nach nach x, y, z und addieren, so ergibt die rechte Seite den Wert Null, weil die Divergenz eines Rotationsvektors stets gleich Null ist; also:

(25) $$\operatorname{div} \mathfrak{n} = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z} = 0.$$

Diese Gleichung multiplizieren wir mit einem Volumelement $d\tau$ und integrieren über den oben abgegrenzten Raum des Wirbelfadens:

(25a) $$\int \operatorname{div} \mathfrak{n}\, d\tau = 0.$$

Wendet man darauf den Gaussschen Satz an [XI. Kapitel Gleichung (7a) und (8) auf pag. 502], so folgt, wenn n die innere Normale und σ die Oberfläche des betrachteten Raumes bedeutet:

(26) $$\int \mathfrak{u}_n \, d\sigma = 0 .$$

Dabei ist $\mathfrak{u}_n$ die Normalkomponente der Rotationsgeschwindigkeit. Für den Mantel des Wirbelkanals, der aus Wirbellinien besteht, ist nun $\mathfrak{u}_n = 0$, da die Wirbellinien parallel der Rotationsachse gerichtet sind. Es bleiben also von dem Integral (26) nur die auf die Endflächen f_1 und f_2 bezüglichen Teile übrig. Das gibt, da $|\mathfrak{u}_n|_1 = \omega_1$ und $|\mathfrak{u}_n|_2 = \omega_2$ wegen der Kleinheit von f_1 und f_2 aus dem Integralzeichen heraustreten:

$$\omega_1 f_1 + \omega_2 f_2 = 0.$$

Jetzt wollen wir die Normalen nicht mehr nach innen, sondern in einer festen Richtung längs des Wirbelkanals rechnen; das kommt darauf heraus, daß wir etwa die in Fig. 227 neben dem Wirbelkanal eingezeichnete

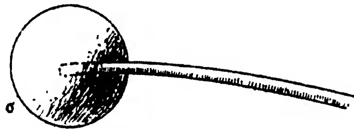


Fig. 228.

Normale N benutzen, die mit der Normalen von f_1 übereinstimmt, dagegen mit der von f_2 den Winkel π bildet. Dann haben wir das Vorzeichen des zweiten Gliedes der letzten Gleichung umzukehren, also folgt:

(27) $$\omega_1 f_1 = \omega_2 f_2 = \text{Const.}$$

Ist der Querschnitt nicht unendlich klein, so hätte man statt (27):

(27a) $$\int \omega_n \, df = \text{Const.}$$

Damit ist bewiesen, daß die Wirbelintensität längs eines Wirbelfadens konstant ist, und damit ist auch der früher verschobene Nachweis erbracht, daß die sogenannten „zyklischen Konstanten" (Nummer 175) wirklich Konstanten sind. Auf dieselbe Weise folgt weiter, daß ein Wirbelfaden nicht im Innern der Flüssigkeit endigen kann. Denn wir haben, wenn wir (25) über einen beliebigen Teil der Flüssigkeit integrieren, also σ eine beliebige geschlossene Fläche in derselben ist, nach (25a) und (26) allgemein:

(28) $$\int (\mathfrak{u}_n) \, d\sigma = 0 .$$

Würde nun der Wirbelfaden innerhalb der Flüssigkeit endigen, etwa wie Fig. 228 es andeutet, so könnte man eine geschlossene Fläche σ in der Flüssigkeit konstruieren, für die Gleichung (28) nicht mehr gilt.

Dies würde z. B. für die in der Figur gezeichnete Kugelfläche σ der Fall sein, da für alle außerhalb des Fadens gelegenen Teile derselben u_n gleich Null ist, während es für den Teil, der den Wirbelfaden durchschneidet, von Null verschieden ist. Daher wäre in der Tat $\int u_n\, d\sigma$ dafür von Null verschieden. Da dies nicht der Fall sein kann, so müssen die Wirbelfäden stets geschlossen sein oder ihre Enden in den Grenzen des Flüssigkeitsraumes haben. In diesem letzteren Falle können wir aber stets den Wirbelfaden außerhalb der Flüssigkeit zu einem geschlossenen ergänzt denken, so daß unter Hinzunahme dieser Raumteile der Wirbel dann wieder ringförmig geschlossen ist. Dann gilt allgemein der Satz: Die Wirbelfäden sind stets ringförmig geschlossen. Folglich ist der Wirbelraum stets mehrfach zusammenhängend, im einfachsten Falle zweifach zusammenhängend.

In der außerhalb des Wirbelgebietes befindlichen Flüssigkeit existiert natürlich ein Geschwindigkeitspotential. Der Potentialraum ist der Außenraum des Ringgebietes, das von der wirbelnden Flüssigkeit gebildet wird, also ebenfalls ringförmig. Man erkennt daher: Potentialraum und Wirbelraum umschließen sich gegenseitig ringförmig. Der Potentialraum ist daher ebenfalls mehrfach zusammenhängend, und das Geschwindigkeitspotential vieldeutig. Letzteres erkennt man besonders einleuchtend, wenn man den Stokesschen Satz auf eine im Potentialgebiet verlaufende, aber das Wirbelgebiet umzingelnde Kurve s anwendet. Dann schneidet jede durch s berandete Fläche S den Wirbelraum, und es ist:

$$\oint \frac{\partial \varphi}{\partial s}\, ds = 2\iint \omega_n\, dS,$$

d. h. aber, daß φ bei jedem positiven Umlauf um den Wirbelring um den Betrag der zyklischen Konstanten $2\iint \omega_n\, dS$ zunimmt. Geometrisch bedeutet dies, daß auch im Potentialraum die Stromlinien geschlossene Kurven sein müssen, da die Zirkulation ja von Null verschieden ist. Diese Bewegung ist aber natürlich keine Rotationsbewegung, sondern von der Art, wie die Nr. 176 untersuchte zweidimensionale zyklische Strömung. Man erhält also das Resultat: Ein Wirbelfaden erzeugt in der ihn umgebenden Flüssigkeit eine wirbelfreie zyklische Bewegung. Einen einfachen Fall, der dies illustriert, werden wir später besprechen.

184. Bestimmung der Geschwindigkeitskomponenten aus den Wirbelkomponenten.

Wenn die Geschwindigkeitskomponenten u, v, w gegeben sind, so lassen sich aus ihnen durch Differentiation, d. h. durch stets mögliche Operationen, die Wirbelkomponenten bilden. Aber auch umgekehrt,

wenn die letzteren (p, q, r) gegeben sind, lassen sich u, v, w bestimmen. Es handelt sich dann um die Integration folgender Differentialgleichungen:

(29) $$2p = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad 2q = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad 2r = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Wir wollen diese unter der Voraussetzung behandeln, daß die Flüssigkeit **inkompressibel** ist; die bisherigen Betrachtungen waren von dieser Beschränkung frei. Wir wollen ferner annehmen, daß die Wirbelstellen ($\omega \neq 0$) alle im Endlichen liegen, und daß im Unendlichen die Flüssigkeit ruht, d. h. $u_\infty = v_\infty = w_\infty = 0$ ist. Unter diesen Umständen ist die Aufgabe vollkommen bestimmt. Denn angenommen, es gäbe zwei Lösungen der Gleichung (29) und der oben formulierten Nebenbedingungen, die wir u', v', w' und u'', v'', w'' nennen wollen. Dann wäre von beiden (29) identisch erfüllt:

$$2p = \frac{\partial w'}{\partial y} - \frac{\partial v'}{\partial z}, \text{ usw.,}$$

$$2p = \frac{\partial w''}{\partial y} - \frac{\partial v''}{\partial z}, \text{ usw.}$$

Durch Subtraktion folgt daraus, wenn die Differenzen $u' - u''$ mit u_0, $v' - v''$ mit v_0, $w' - w''$ mit w_0 bezeichnet werden:

(30) $$\left\{\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial w_0}{\partial y} - \frac{\partial v_0}{\partial z}, \\ 0 &= \frac{\partial u_0}{\partial z} - \frac{\partial w_0}{\partial x}, \\ 0 &= \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y}. \end{aligned}\right.$$

Dazu tritt die Bedingung im Unendlichen: $(u_0 = v_0 = w_0)_\infty = 0$. (30) bedeutet aber, daß u_0, v_0, w_0 von einem Potential φ_0 ableitbar sind:

(31) $$u_0 = \frac{\partial \varphi_0}{\partial x}, \quad v_0 = \frac{\partial \varphi_0}{\partial y}, \quad w_0 = \frac{\partial \varphi_0}{\partial z}.$$

Also infolge der Inkompressibilitätsbedingung und der Bedingung im Unendlichen muß gelten:

(32) $$\Delta \varphi_0 = 0, \quad \text{und} \quad (\varphi_0)_\infty = 0.$$

Wenden wir darauf den **Helmholtz**schen Satz an, indem wir das Integral

$$\int \left\{ \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial z}\right)^2 \right\} d\tau$$

betrachten, so ergibt diese Untersuchung, die derjenigen in Nummer 176 ganz analog ist, $\varphi_0 = \text{Const}$; also:

$$u_0 = v_0 = w_0 = 0;$$

also:

$$u' = u''; \quad v' = v''; \quad w' = w'',$$

mit anderen Worten: Es gibt unter den oben formulierten Bedingungen nur eine Lösung der Gleichung (29).

Die Lösung selbst haben wir aber bereits im XIII. Kapitel gegeben, nämlich in Nummer 131. Dort sind die Verzerrungskomponenten ξ, η, ζ bestimmt, wenn die Rotationskomponenten p, q, r gegeben sind. Die dortigen Gleichungen (55) gehen in die unsrigen (29) über, wenn wir dort nach t differentiieren. Denn z. B. $u = \frac{d\xi}{dt}$, ... und $\dot{p} = \frac{dp}{dt}$. Demgemäß setzen wir wie dort mit Hilfe von zwei Funktionen, die wir hier sinngemäß durch $\dot{\psi}$ und $\dot{\mathfrak{A}}$ bezeichnen wollen, an:

$$(33) \quad \begin{cases} u = \dfrac{\partial \dot{\psi}}{\partial x} + \dfrac{\partial \dot{\mathfrak{A}}_z}{\partial y} - \dfrac{\partial \dot{\mathfrak{A}}_y}{\partial z}, \\ v = \dfrac{\partial \dot{\psi}}{\partial y} + \dfrac{\partial \dot{\mathfrak{A}}_x}{\partial z} - \dfrac{\partial \dot{\mathfrak{A}}_z}{\partial x}, \\ w = \dfrac{\partial \dot{\psi}}{\partial z} + \dfrac{\partial \dot{\mathfrak{A}}_y}{\partial x} - \dfrac{\partial \dot{\mathfrak{A}}_x}{\partial y}. \end{cases}$$

Hier können wir noch etwas einfacher schreiben, indem wir $\dot{\psi} = 0$ annehmen und jetzt der Einfachheit halber die Vektorsymbolik verwenden:

$$(34) \qquad \mathfrak{c} = \operatorname{rot} \dot{\mathfrak{A}}.$$

Der Funktion $\dot{\mathfrak{A}}$ ist wie früher noch die Bedingung aufzuerlegen:

$$(35) \qquad \operatorname{div} \dot{\mathfrak{A}} = 0.$$

Dann folgt aus (29):

$$(36) \qquad \Delta \dot{\mathfrak{A}} = -2 \operatorname{rot} \mathfrak{c} = -2 \dot{\mathfrak{u}}.$$

Das ist aber nichts anderes als die Poissonsche Gleichung, der die Potentialfunktionen gehorchen; also können wir die Lösung sofort hinschreiben:

$$(37) \quad \begin{cases} \dot{\mathfrak{A}} = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int \dfrac{\dot{\mathfrak{u}}}{R}\, d\tau; \text{ ausführlich:} \\ \dot{\mathfrak{A}}_x = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int \dfrac{\dot{p}}{R}\, d\tau, \\ \dot{\mathfrak{A}}_y = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int \dfrac{\dot{q}}{R}\, d\tau, \\ \dot{\mathfrak{A}}_z = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int \dfrac{\dot{r}}{R}\, d\tau. \end{cases}$$

Dabei sind die Integrationen zu erstrecken über den Raum, in dem die Wirbelkomponenten $\dot{p}$, $\dot{q}$, $\dot{r}$ (oder $\dot{\mathfrak{u}}$) von Null verschieden sind, oder auch über den gesamten Flüssigkeitsraum, da die übrigen Teile desselben nichts zu den Integralen beitragen. $\dot{\mathfrak{A}}$ ist selbst eine Potentialfunktion.

und zwar wie in Nummer 131, ein Vektorpotential. In (37) ist unter R der Abstand des Volumelementes $d\tau$ von dem Raumpunkte verstanden, für den $\mathfrak{A}$ berechnet werden soll, dem sogenannten Aufpunkte. Natürlich kann man zu allen Lösungen (37) noch ein beliebiges Integral der Laplaceschen Gleichung $\Delta\mathfrak{A}=0$ hinzu addieren. Diese hinzugefügten Glieder müssen so bestimmt werden, daß die Randbedingungen des gegebenen Problems befriedigt werden können.

Aus (37) folgen sofort in Verbindung mit (34) durch Ausführung der geforderten Differentiationen die gesuchten Geschwindigkeitskomponenten u, v, w; man erhält:

$$(38)\qquad \left\{\begin{aligned} u &= \frac{1}{2\pi}\int\left\{ r\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial y} - q\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial z}\right\}d\tau, \\ v &= \frac{1}{2\pi}\int\left\{ p\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial z} - r\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial x}\right\}d\tau, \\ w &= \frac{1}{2\pi}\int\left\{ q\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial x} - p\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial y}\right\}d\tau. \end{aligned}\right.$$

Diese Differentiationen geschehen nach x, y, z, d. h. nach den Koordinaten des Aufpunktes, in dem $\mathfrak{A}$ resp. seine Komponenten berechnet und als dessen Funktionen sie dargestellt sind: p, q, r hängen dagegen offenbar nicht von der Lage des Aufpunktes ab, sondern nur R. Daher sind die Differentiationen in der obigen Weise auszuführen.

Man sieht, daß zur Lösung der mit Wirbelbildung verbundenen hydrodynamischen Probleme mehr erfordert wird, als für die mit einem Geschwindigkeitspotential behafteten. Bei letzteren war die Strömung im Innern eines Raumes vollkommen bestimmt, wenn die Normalkomponente der Geschwindigkeit an der Oberfläche des Raumes gegeben war. Hier dagegen wird die Aufgabe der Wirbelkomponenten p, q, r im ganzen Raume verlangt. Darin liegt die unverhältnismäßig größere Schwierigkeit dieser letzteren hydrodynamischen Aufgabe begründet. Anderseits ist hervorzuheben, daß die Angabe der Wirbelkomponenten p, q, r nur für einen einzigen Zeitmoment, z. B. $t=0$, verlangt wird; dadurch ist dann die Bewegung für alle Zeiten bestimmt. Dieses merkwürdige Resultat kann man sich ohne Rechnung einigermaßen plausibel machen, wenn man bedenkt, daß für die Wirbelbewegung in vollkommenen Flüssigkeiten — in reibenden Flüssigkeiten gelten ja alle diese Betrachtungen nicht — sehr weittragende Erhaltungssätze bestehen, die wir in den Nr. 181 bis 183 kennen gelernt haben. Der analytische Beweis für die oben ausgesprochene Behauptung läßt sich folgendermaßen führen: Es seien etwa p_0, q_0, r_0, d. h. die Wirbelkomponenten für $t=0$ im ganzen Raume gegeben. Für $t=0$ reduzieren sich die Helmholtzschen Wirbelgleichungen (15), da

$$\frac{\partial x}{\partial a} = \frac{\partial y}{\partial b} = \frac{\partial z}{\partial c} = 1,$$

alle übrigen Ableitungen der x, y, z nach a, b, c gleich Null sind, auf die folgenden:

$$(39)\qquad \begin{cases} \dot{p}_0 = \varepsilon A, \\ \dot{q}_0 = \varepsilon B, \\ \dot{r}_0 = \varepsilon C, \end{cases}$$

Dabei sind die Größen A, B, C von der Zeit unabhängig, also durch $\dot{p}_0, \dot{q}_0, \dot{r}_0$ sofort für alle Zeiten gegeben. Durch $\dot{p}_0, \dot{q}_0, \dot{r}_0$ sind ferner, wie wir oben bewiesen haben, die Größen u, v, w zur Zeit $t = 0$ eindeutig bestimmt, und damit sind natürlich auch die Größen $x = u\,dt$, $y = v\,dt$, $z = w\,dt$ für den Zeitmoment $(0 + dt)$ gegeben. Also kann man für diesen Zeitmoment die Koeffizienten $\frac{\partial x}{\partial a}, \frac{\partial x}{\partial b}, \ldots \frac{\partial z}{\partial c}$ herstellen, und damit ist nach den Wirbelgleichungen (15), die ja den Erhaltungssatz formulieren, auch $\dot{p}, \dot{q}, \dot{r}$ für die um dt spätere Zeit gegeben. Daraus aber folgen wieder durch Differentiation nach Gleichung (1) u, v, w für $t = 0 + dt$, und dann geht die Schlußkette von vorne an, indem man zu immer späteren Zeiten vorrückt. Also sind schließlich $\dot{p}, \dot{q}, \dot{r}$ für eine beliebige Zeit gegeben durch Angabe von $\dot{p}_0, \dot{q}_0, \dot{r}_0$ für $t = 0$, was zu beweisen war.

185. Analogien zur Elektrodynamik.[1])

Das in der vorhergehenden Nummer behandelte Problem hat übrigens auch eine Bedeutung für die Elektrodynamik. Denn wenn wir die Komponenten der elektrischen Strömung (= Strom pro Flächeneinheit) mit U, V, W, die Komponenten des von ihm erzeugten Magnetfeldes durch $\Lambda, \mathsf{M}, \mathsf{N}$ bezeichnen, so hängen diese Größen, wie in der Elektrodynamik gezeigt wird, durch folgende Gleichungen zusammen:

$$(40)\qquad \begin{cases} 4\pi U = \dfrac{\partial \mathsf{N}}{\partial y} - \dfrac{\partial \mathsf{M}}{\partial z}, \\[2mm] 4\pi V = \dfrac{\partial \Lambda}{\partial z} - \dfrac{\partial \mathsf{N}}{\partial x}, \\[2mm] 4\pi W = \dfrac{\partial \mathsf{M}}{\partial x} - \dfrac{\partial \Lambda}{\partial y}. \end{cases}$$

Die Integrale dieser Gleichungen, die das genaue Analogon zu (29) sind, ergeben sich durch das nämliche Verfahren nach (88) zu:

1) Der Anfänger mag diese Nr. beim ersten Studium überschlagen.

$$(41)\quad \begin{cases} \Lambda = \displaystyle\int \left\{ W \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial y} - V \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial z} \right\} d\tau, \\ \mathsf{M} = \displaystyle\int \left\{ U \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial y} - W \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial x} \right\} d\tau, \\ \mathsf{N} = \displaystyle\int \left\{ V \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial z} - U \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial y} \right\} d\tau. \end{cases}$$

Wir wollen die Analogie in dem speziellen Falle durchführen, daß wir sehr dünne Wirbelfäden und Ströme haben. Dann können wir in (38) setzen $d\tau = f\,ds$, wo f den Querschnitt, ds ein Element der Länge bedeutet. Ferner hat man offenbar:

$$(42)\quad \begin{cases} p = \omega \cos(sx), \\ q = \omega \cos(sy), \\ r = \omega \cos(sz), \end{cases}$$

und endlich kann man ωf, die längs des Wirbels konstante Wirbelintensität, vor das Integralzeichen ziehen. Dann erhält man aus (38):

$$(43)\quad \begin{cases} u = \dfrac{\omega f}{2\pi} \displaystyle\int \left\{ \cos(sz) \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial y} - \cos(sy) \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial z} \right\} ds, \\ v = \dfrac{\omega f}{2\pi} \displaystyle\int \left\{ \cos(sx) \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial z} - \cos(sz) \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial x} \right\} ds, \\ w = \dfrac{\omega f}{2\pi} \displaystyle\int \left\{ \cos(sy) \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial x} - \cos(sx) \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial y} \right\} ds. \end{cases}$$

Darin kann man noch setzen: $\dfrac{\partial \frac{1}{R}}{\partial x} = -\dfrac{1}{R^2} \cos(Rx)$, und so weiter, so daß man schließlich erhält:

$$(44)\quad \begin{cases} u = \dfrac{\omega f}{2\pi} \displaystyle\int \left\{ \cos(sy)\cos(Rz) - \cos(sz)\cos(Ry) \right\} \frac{ds}{R^2}, \\ v = \dfrac{\omega f}{2\pi} \displaystyle\int \left\{ \cos(sz)\cos(Rx) - \cos(sx)\cos(Rz) \right\} \frac{ds}{R^2}, \\ w = \dfrac{\omega f}{2\pi} \displaystyle\int \left\{ \cos(sx)\cos(Ry) - \cos(sy)\cos(Rx) \right\} \frac{ds}{R^2}. \end{cases}$$

Die Geschwindigkeitskomponenten sind hier dargestellt als Integrale über die Leitlinie oder Achse des Wirbelfadens, der als unendlich dünn gedacht ist. Jedes Längenelement derselben liefert seinen bestimmten Beitrag. Man kann sich also vorstellen, daß man die Wirkung eines Elementes erhält, wenn man das Integralzeichen rechts einfach fortläßt.

Auf diese Weise erhält man die Gleichungen (45), die die von einem Längenelement der Wirbellinie erzeugten Geschwindigkeitskomponenten δu, δv, δw liefern:

$$(45) \quad \begin{cases} \delta u = \frac{\omega f \, ds}{2\pi R^2} \left[\cos(sy)\cos(Rz) - \cos(sz)\cos(Ry) \right], \\ \delta v = \frac{\omega f \, ds}{2\pi R^2} \left[\cos(sz)\cos(Rx) - \cos(sx)\cos(Rz) \right], \\ \delta w = \frac{\omega f \, ds}{2\pi R^2} \left[\cos(sx)\cos(Ry) - \cos(sy)\cos(Rx) \right]. \end{cases}$$

Multipliziert man diese Gleichungen der Reihe nach mit $\cos(sx)$, $\cos(sy)$, $\cos(sz)$ und addiert, so folgt rechts der Wert 0; eben dasselbe Resultat erhält man auf der rechten Seite, wenn man die gleichen Operationen mit $\cos(Rx)$, $\cos(Ry)$. $\cos(Rz)$ vornimmt. Es bestehen also die Gleichungen:

$$(46) \quad \begin{cases} \delta u \cdot \cos(sx) + \delta v \cdot \cos(sy) + \delta w \cdot \cos(sz) = 0, \\ \delta u \cdot \cos(Rx) + \delta v \cdot \cos(Ry) + \delta w \cdot \cos(Rz) = 0, \end{cases}$$

die aussagen, daß die resultierende Geschwindigkeit vom Betrage $\delta c = \sqrt{\delta u^2 + \delta v^2 + \delta w^2}$ sowohl senkrecht zur Richtung s als zur Richtung R steht, d.h. die von einem Wirbelelement ds im Abstande R erzeugte Geschwindigkeit $\delta \mathfrak{c}$ steht senkrecht auf der durch s und R gelegten Ebene. Aus diesem Satze läßt sich wieder die schon bekannte Folgerung ziehen, daß die Stromlinien außerhalb des Wirbelgebietes geschlossene Kurven sind, d.h. daß außerhalb des Wirbels ein zyklisches mehrwertiges Geschwindigkeitspotential existiert.

Den absoluten Betrag der resultierenden Geschwindigkeit $\delta \mathfrak{c}$ erhält man aus (45), indem man die drei Gleichungen quadriert, addiert und die Wurzel zieht. Eine elementare Rechnung ergibt den Wert:

$$(47) \quad |\delta \mathfrak{c}| = \delta c = \frac{\omega f \, ds}{2\pi R^2} \sin(Rs).$$

Genau demselben Gesetze folgt die resultierende magnetische Kraft $\delta \mathsf{H} = \sqrt{\delta \Lambda^2 + \delta \mathsf{M}^2 + \delta \mathsf{N}^2}$, die durch ein Stromelement von der Länge ds hervorgehoben wird. Setzt man in (41) für $d\tau$ den Wert $f\,ds$, ferner $U = J \cdot \cos(sx)$, $V = J \cdot \cos(sy)$, $W = J \cdot \cos(sz)$, und zieht $J \cdot f$ die „Stromstärke" vor das Integralzeichen, so folgt schließlich in Analogie mit (45):

$$(48) \quad \delta \Lambda = \frac{Jf}{R^2} ds \left\{ \cos(sy)\cos(Rz) - \cos(sz)\cos(Ry) \right\}, \text{ und zwei analoge.}$$

Endlich bestehen offenbar auch die den Gleichungen (46) und (47) entsprechenden:

$$(49) \quad \begin{cases} \delta \Lambda \cos(sx) + \delta \mathsf{M} \cos(sy) + \delta \mathsf{N} \cos(sz) = 0, \\ \delta \Lambda \cos(Rx) + \delta \mathsf{M} \cos(Ry) + \delta \mathsf{N} \cos(Rz) = 0, \end{cases}$$

(50) $$\delta \mathsf{H} = \frac{J \cdot f \cdot ds}{R^2} \sin(R s).$$

Diese letzteren Gleichungen drücken das in der Elektrizitätslehre nach Biot und Savart benannte Elementargesetz aus, welches die magnetische Wirkung eines Stromelementes angibt.

Man erkennt aus den letzten Betrachtungen, daß folgende Größen der Hydrodynamik und Elektrodynamik parallel laufen:

Hydrodynamik	$u, \delta u$	$v, \delta v$	$w, \delta w$	$\delta \mathfrak{e}$	$\dot{p}$	$\dot{q}$	$\dot{r}$	ω
Elektrodynamik	$\Lambda, \delta \Lambda$	$\mathsf{M}, \delta \mathsf{M}$	$\mathsf{N}, \delta \mathsf{N}$	$\delta \mathsf{H}$	U	V	W	J

In diesem Sinne entspricht, wie bereits Helmholtz betonte, jedem hydrodynamischen Problem ein elektrodynamisches.

186. Lebendige Kraft von Wirbeln; magnetische Energie von Strömen.

Wir wollen die Analogie in diesem Falle noch etwas weiter verfolgen, indem wir die kinetische Energie eines Systems von Wirbelringen betrachten. Dem entspricht in der Elektrodynamik, da die magnetischen Kräfte in Analogie zu den Geschwindigkeiten sind, die sogenannte magnetische Energie von Systemen geschlossener Ströme. Wir betrachten also das Integral:

(51) $$L = \frac{\varepsilon}{2} \int (u^2 + v^2 + w^2)\, d\tau,$$

das über den gegebenen Flüssigkeitsraum zu erstrecken ist. Mit Hilfe der Gleichung (34) kann dies geschrieben werden:

(52) $$L = \frac{\varepsilon}{2} \int \left[u \left(\frac{\partial \dot{\mathfrak{A}}_z}{\partial y} - \frac{\partial \dot{\mathfrak{A}}_y}{\partial z} \right) + v \left(\frac{\partial \dot{\mathfrak{A}}_x}{\partial z} - \frac{\partial \dot{\mathfrak{A}}_z}{\partial x} \right) + w \left(\frac{\partial \dot{\mathfrak{A}}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{\mathfrak{A}}_x}{\partial y} \right) \right] d\tau.$$

Diesen Ausdruck kann man schreiben, indem man setzt:

$$u \frac{\partial \dot{\mathfrak{A}}_z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (u \dot{\mathfrak{A}}_z) - \dot{\mathfrak{A}}_z \frac{\partial u}{\partial y},$$

und so weiter:

(53) $$\left\{ \begin{aligned} L = \frac{\varepsilon}{2} \int \Big\{ & \frac{\partial}{\partial x} (w \dot{\mathfrak{A}}_y - v \dot{\mathfrak{A}}_z) + \frac{\partial}{\partial y} (u \dot{\mathfrak{A}}_z - w \dot{\mathfrak{A}}_x) \\ & + \frac{\partial}{\partial z} (v \dot{\mathfrak{A}}_x - u \dot{\mathfrak{A}}_y) \Big\} d\tau \\ + \frac{\varepsilon}{2} \int \Big\{ & \dot{\mathfrak{A}}_x \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \dot{\mathfrak{A}}_y \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ & + \dot{\mathfrak{A}}_z \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big\} d\tau, \end{aligned} \right.$$

oder, wenn man auf das erste Glied den Greenschen Satz anwendet und im zweiten die Wirbelkomponenten $\dot p$, $\dot q$, $\dot r$ einführt:

$$(54)\quad \begin{cases} L = -\frac{s}{2}\int\Big[(w\dot{\mathfrak{A}}_y - v\dot{\mathfrak{A}}_z)\cos(n\,x) + (u\dot{\mathfrak{A}}_z - w\dot{\mathfrak{A}}_x)\cos(n\,y) \\ \qquad\qquad + (v\dot{\mathfrak{A}}_x - u\dot{\mathfrak{A}}_y)\cos(n\,z)\Big]dS \\ \quad + s\int[\dot{\mathfrak{A}}_x\cdot\dot p + \dot{\mathfrak{A}}_y\cdot\dot q + \dot{\mathfrak{A}}_z\cdot\dot r]\,d\tau\,. \end{cases}$$

Lassen wir nun die Begrenzung des Raumes ins Unendliche rücken, so verschwindet das erste Integral. Denn $\dot{\mathfrak{A}}_x$, $\dot{\mathfrak{A}}_y$, $\dot{\mathfrak{A}}_z$ sind nach (37) im Unendlichen von der Ordnung $\frac{1}{R}$; u, v, w nach (44) von der Ordnung $\frac{1}{R^2}$; also werden alle Terme des ersten Integrals, da dS nur von der Ordnung R^2 unendlich groß wird, unendlich klein wie $\frac{1}{R}$. Es bleibt also übrig:

$$(55)\qquad L = s\int[\dot{\mathfrak{A}}_x\cdot\dot p + \dot{\mathfrak{A}}_y\cdot\dot q + \dot{\mathfrak{A}}_z\cdot\dot r]\,d\tau\,.$$

Dieser Ausdruck kann noch umgeformt werden, wenn man die Darstellung der Komponenten des Vektorpotentials in Gleichung (37) heranzieht. Wir schreiben, indem wir ein zweites Volumelement des Raumes zum Unterschiede von dem in (55) benutzten mit $d\tau'$ und die dort herrschenden Wirbelkomponenten mit $\dot p'$, $\dot q'$, $\dot r'$ bezeichnen:

$$\dot{\mathfrak{A}}_x = \frac{1}{2\pi}\int\frac{\dot p'}{R}\,d\tau',$$

und zwei entsprechende, wo R jetzt die Entfernung zwischen $d\tau'$ und dem Aufpunkte, d. h. $d\tau$ bedeutet. Durch die Substitution dieser Werte in (55) erhält man schließlich:

$$(56)\qquad L = \frac{s}{2\pi}\int\int\frac{\dot p\dot p' + \dot q\dot q' + \dot r\dot r'}{R}\,d\tau\,d\tau'.$$

In dieser Form erkennt man, daß es genügt, die Integrationen über den Wirbelraum zu erstrecken, da nur in diesem die Rotationskomponenten von 0 verschieden sind. Ist der Querschnitt der Wirbelringe sehr klein, so kann man setzen:

$$d\tau = f\,ds,\quad d\tau' = f'\,ds'.$$

Ferner ist:

$$\begin{aligned} \dot p &= \omega\cos(s\,x); & \dot p' &= \omega'\cos(s'x); & dx &= ds\cdot\cos(s\,x); & dx' &= ds'\cos(s'x);\\ \dot q &= \omega\cos(s\,y); & \dot q' &= \omega'\cos(s'y); & dy &= ds\cdot\cos(s\,y); & dy' &= ds'\cos(s'y);\\ \dot r &= \omega\cos(s\,z); & \dot r' &= \omega'\cos(s'z); & dz &= ds\cdot\cos(s\,z); & dz' &= ds'\cos(s'z). \end{aligned}$$

Also kann man weiter schreiben, wenn ωf und $\omega' f'$, die ja konstant sind, vor das Integralzeichen genommen werden:

$$L = \frac{\varepsilon \omega f \omega' f'}{2\pi} \int\int \frac{\cos(s\,x)\cos(s'\,x) + \cos(s\,y)\cos(s'\,y) + \cos(s\,z)\cos(s'\,z)}{R}\, ds\, ds',$$

oder endlich:

(57) $$L = \frac{\varepsilon \omega f \omega' f'}{2\pi} \int\int \frac{\cos(s\,s')}{R}\, ds\, ds'.$$

Ist im besonderen nur ein Wirbelring vorhanden, so beziehen sich ωf und $\omega' f'$ auf denselben Wirbel, sind also einander gleich, nämlich beide gleich der Wirbelintensität, für die wir den Buchstaben I_1 benutzen wollen. Dann ist also:

(58) $$L = \frac{\varepsilon I_1^2}{2\pi} \int\int \frac{\cos(s\,s')\, ds\, ds'}{R} = \frac{1}{2} T_{11} I_1^2,$$

wo

(59) $$T_{11} = \frac{\varepsilon}{2\pi} \int\int \frac{\cos(s\,s')\, ds\, ds'}{R}$$

gesetzt ist. Sind zwei Wirbelringe vorhanden, so ist der Ausdruck (57) viergliedrig, nämlich von folgender Gestalt (das zweite und dritte Glied sind einander gleich und mit dem Faktor 2 zusammengefaßt):

(60) $$L = \tfrac{1}{2}\{T_{11} I_1^2 + 2\, T_{12} I_1 I_2 + T_{22} I_2^2\}.$$

Dabei bedeuten I_1 und I_2 die Wirbelintensitäten der beiden Ringe, T_{22} den T_{11} analogen Ausdruck für den zweiten Wirbelring, während T_{12} definiert ist durch:

(61) $$T_{12} = \frac{\varepsilon}{\pi} \int\int \frac{\cos(s_1\,s_2)\, ds_1\, ds_2}{R},$$

wo ds_1 ein Element des ersten, ds_2 ein Element des zweiten Ringes, R ihre gegenseitige Entfernung und $(s_1 s_2)$ der Wirbel zwischen beiden ist.

Die Größen T hängen, wie man sieht, nur von der geometrischen Gestalt und Lage der Wirbelringe und von der Dichte der Flüssigkeit ab; T_{11} und T_{22} beziehen sich auf je einen Wirbelring, T_{12} drückt ihre gegenseitige Beeinflussung aus. Zwei Wirbelringe in ein und derselben Flüssigkeit sind also nie voneinander unabhängig, sondern stellen, wie man sagt, ein „gekoppeltes" System dar. Genau die nämliche Form (60) hat die magnetische Energie zweier Stromkreise; dort werden die hier als T bezeichneten Größen Induktionskoeffizienten genannt, und zwar T_{11} und T_{22} die „Koeffizienten der Selbstinduktion", T_{12} „Koeffizient der gegenseitigen Induktion". Die exakte Form der magnetischen Energie kann nach der Tabelle am Schlusse der vorigen Nummer leicht hergestellt werden.

187. Das logarithmische Potential.

Wir werden bei der Untersuchung der folgenden Nummer auf die Gleichung geführt werden:

(62) $$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -f(x\,y),$$

die offenbar das zweidimensionale Analogon der Poissonschen Gleichung des Potentials ist. In Nr. 127 haben wir für die dreidimensionale Gleichung das vollständige Integral hergestellt und haben jetzt dasselbe für den zweidimensionalen Fall zu leisten, um das Problem der folgenden Nummer bewältigen zu können. Wir gehen dazu aus von dem zweidimensionalen Greenschen Satze, den wir in Gleichung (178) des XV. Kapitels auf S. 708 formuliert haben und den wir hier noch einmal anschreiben:

$$\int u\,\Delta v\,dS - \int v\,\Delta u\,dS = -\int\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds. \tag{63}$$

Dabei sind u, v zwei eindeutige stetige Funktionen von x und y, S eine der xy-Ebene angehörige Fläche, s ihre Berandung.

Wir gehen genau so vor, wie im dreidimensionalen Falle, d. h. wir suchen uns zunächst eine solche Lösung der zweidimensionalen Laplaceschen Gleichung:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0, \tag{64}$$

die an einem beliebigen Punkte (x_0, y_0) des Integrationsgebietes in gewisser Weise unendlich wird. Eine solche Lösung ist:

$$\varphi = \log R, \tag{65}$$

wo

$$R^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \text{ ist.}$$

Denn es ist:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{x}{R^2}; \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{y}{R^2};$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{R^2} - 2\frac{x^2}{R^4}; \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = \frac{1}{R^2} - 2\frac{y^2}{R^4};$$

also wirklich:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\log R = 0.$$

Diese Funktion wird an der Stelle $x = x_0$, $y = y_0$ logarithmisch unendlich. Nun wählen wir im Greenschen Satze (63) für v diese Lösung $\log R$, während wir für u die gesuchte Funktion φ nach Gleichung (62) einsetzen. Da aber $\log R$ in dem Punkte (x_0, y_0) des Integrationsgebietes unendlich wird, so ist dieser Punkt durch eine kleine Kreisfläche vom Radius R_0 auszuschließen. Die übrig bleibende Fläche, über die integriert wird, heiße nun S^*, zu deren Begrenzung nun natürlich die Kontur des Kreises mitgehört. Der Greensche Satz (63) liefert dann, wenn ein Element des Kreisumfanges durch dk bezeichnet wird:

$$\left\{\begin{aligned}\int\varphi(\Delta\log R)\,dS^* - \int\Delta\varphi\cdot\log R\,dS^* = -\int\left[\varphi\frac{\partial\log R}{\partial n} - \log R\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right]ds\\ -\int\left[\varphi\frac{\partial\log R}{\partial n}\right]dk - \int\left[\log R\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right]dk.\end{aligned}\right. \tag{66}$$

Das erste Glied der linken Seite fällt fort, da im Integrationsgebiet $\Delta(\log R) = 0$ ist; das zweite wird nach (62):

$$+\int f(xy) \log R \, dS^* .$$

Einer weiteren Behandlung bedürfen nur noch die rechtsstehenden, über die Kreisperipherie erstreckten Integrale; beachtet man, daß die Normalenrichtung n hier mit der von R zusammenfällt, und alle Größen unter dem Integralzeichen sich auf den Rand beziehen, so erhält man:

$$+\int \varphi \frac{\partial \log R}{\partial n} dk = \int \varphi \frac{\partial \log R}{\partial R} dk = \int \left(\varphi \frac{1}{R}\right)_{R=R_0} dk;$$

ebenso:

$$\int \log R \frac{\partial \varphi}{\partial n} dk = \int \log R_0 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial R}\right)_{R_0} dk;$$

oder, wenn $dk = R_0 d\psi$ gesetzt wird und wir zur Grenze $R_0 = 0$ übergehen, wodurch S^* in S übergeht:

$$\lim_{R_0=0} \int \varphi \frac{\partial \log R}{\partial n} dk = 2\pi \varphi(x_0 y_0); \quad \lim_{R_0=0} \int \log R \frac{\partial \varphi}{\partial n} dk = 0.$$

Die Gleichung (66) des Greenschen Satzes wird daher:

$$\int f(xy) \log R \, dS - \int \left[\varphi \frac{\partial \log R}{\partial n} - \log R \frac{\partial \varphi}{\partial n}\right] ds - 2\pi \varphi(x_0 y_0),$$

oder:

$$\varphi(x_0 y_0) = -\frac{1}{2\pi} \int f(xy) \log R \, dS + \frac{1}{2\pi} \int \left(\varphi \frac{\partial \log R}{\partial n} - \log R \frac{\partial \varphi}{\partial n}\right) ds.$$

Lassen wir nun die Begrenzung s der Fläche S ins Unendliche rücken, so verschwindet in vielen Fällen das Randintegral, und man erhält dann einfacher als Lösung von (62):

$$\varphi(x_0 y_0) = -\frac{1}{2\pi} \int f(xy) \log R \, dS. \tag{67}$$

Diese Funktion wird „logarithmisches Potential" genannt und spielt bei den zweidimensionalen Problemen dieselbe Rolle, wie der Ausdruck $\int \frac{f(xyz)}{R} d\tau$ bei den dreidimensionalen. Mit seiner Hilfe läßt sich das im Folgenden gestellte Problem lösen.

188. Geradlinige Wirbel.

Als erste Anwendung der Wirbelsätze wollen wir das zweidimensionale Problem betrachten, daß die Bewegung parallel der xy-Ebene vor sich geht, und alle Größen nur von x und y abhängig sind. Alle Differentiationen nach z sind gleich Null und ebenso die Geschwindigkeits- und Kraftkomponenten parallel der z-Achse. Also ist:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = w = 0, \tag{68}$$

und damit folgt aus (1):

$$\dot{p} = \dot{q} = 0, \quad \dot{r} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right). \tag{69}$$

Dazu tritt noch die entsprechend vereinfachte Gleichung der Inkompressibilität:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{70}$$

Wir haben also einen geradlinigen Wirbel parallel der z-Achse; die Flüssigkeit kann von $z = -\infty$ bis $z = +\infty$ reichend gedacht werden oder auch durch zwei feste Parallelebenen zur xy-Ebene begrenzt werden.

Wenn man jetzt die Helmholtzschen Wirbelgleichungen nach t differentiiert und berücksichtigt, daß z. B.

$$\frac{D}{Dt}\frac{\partial x}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a}\frac{Dx}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial a}$$

ist, und so fort, so folgt:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{D\dot{p}}{Dt} &= \varepsilon\left(A\frac{\partial u}{\partial a} + B\frac{\partial u}{\partial b} + C\frac{\partial u}{\partial c}\right), \\ \frac{D\dot{q}}{Dt} &= \varepsilon\left(A\frac{\partial v}{\partial a} + B\frac{\partial v}{\partial b} + C\frac{\partial v}{\partial c}\right), \\ \frac{D\dot{r}}{Dt} &= \varepsilon\left(A\frac{\partial w}{\partial a} + B\frac{\partial w}{\partial b} + C\frac{\partial w}{\partial c}\right). \end{aligned}\right. \tag{71}$$

Aus diesen Gleichungen folgt dann insbesondere, da $w = 0$ ist, daß auch $\frac{D\dot{r}}{Dt} = 0$ ist, d. h. daß die Wirbelgeschwindigkeit $\dot{r}$ eines bestimmten Teilchens zeitlich konstant ist.

Wir gehen nun an die Integration von (69) und (70). Letztere kann offenbar durch den Ansatz befriedigt werden, wenn W eine Funktion von x und y bedeutet:

$$\left\{\begin{aligned} u &= \frac{\partial W}{\partial y}, \\ v &= -\frac{\partial W}{\partial x}. \end{aligned}\right. \tag{72}$$

Setzt man diese Werte in (69) ein, so folgt zur Bestimmung von W die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = -2\dot{r}, \tag{73}$$

die offenbar das zweidimensionale Analogon der Poissonschen ist und als Lösung das in der vorigen Nummer eingeführte „logarithmische Potential" hat. Wir haben demgemäß:

$$W = -\frac{1}{\pi}\int \dot{r}\cdot\log R\, df, \tag{74}$$

wo R die Entfernung des Flächenelementes df vom Aufpunkt (xy) bedeutet, in dem W berechnet werden soll; $\dot{r}$ hängt von der Lage des Aufpunktes nicht ab. Um nach (72) u und v zu bilden, hat man nach x und y, den Koordinaten des Aufpunktes, zu differentiieren und erhält:

$$(75)\qquad \begin{cases} u = \dfrac{\partial W}{\partial y} = -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int \dfrac{\dot{r}}{R}\,\dfrac{\partial R}{\partial y}\,df, \\[2ex] v = -\dfrac{\partial W}{\partial x} = +\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int \dfrac{\dot{r}}{R}\,\dfrac{\partial R}{\partial x}\,df. \end{cases}$$

Jedes Element df des Wirbels ruft also eine Geschwindigkeit hervor, die man durch Fortlassen des Integralzeichens rechts erhält:

$$\delta u = -\frac{1}{\pi}\,\frac{\dot{r}}{R}\,\frac{\partial R}{\partial y}\,df,$$

$$\delta v = +\frac{1}{\pi}\,\frac{\dot{r}}{R}\,\frac{\partial R}{\partial x}\,df.$$

Das sind natürlich auch die Geschwindigkeiten, die ein unendlich dünner Wirbelfaden vom Querschnitt df hervorrufen würde. Wenn man die Koordinaten von df für einen Augenblick mit α und β bezeichnet, also $R^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2$ setzt, so ist:

$$(76)\qquad \begin{cases} \delta u = -\dfrac{1}{\pi}\,\dot{r}\,\dfrac{y-\beta}{R}\,df, \\[2ex] \delta v = +\dfrac{1}{\pi}\,\dot{r}\,\dfrac{y-\alpha}{R}\,df. \end{cases}$$

Der Betrag der resultierenden Geschwindigkeit $dc = \sqrt{\delta u^2 + \delta v^2}$ ist also:

$$(77)\qquad \delta c = \frac{1}{\pi}\,\frac{\dot{r}}{R}\,df.$$

Ferner ist, da

$$\cos(Rx) = \frac{x-\alpha}{R}, \quad \cos(Ry) = \frac{y-\beta}{R}$$

ist:

$$(77a)\qquad \delta u \cdot \cos(Rx) + \delta v \cdot \cos(Ry) = 0,$$

d. h. die resultierende Geschwindigkeit im Punkte (xy) steht senkrecht auf dem von df nach dem Punkte (xy) gezogenen Radiusvektor. Daraus folgt sofort, daß die Bewegung auch außerhalb des Wirbelzylinders in geschlossenen Stromlinien vor sich geht (zyklische Potentialbewegung).

Allgemeinere Resultate über die Bewegung mehrerer Wirbelzylinder in einer Flüssigkeit erhält man dadurch, daß man nach Helmholtz und Kirchhoff den sogenannten Schwerpunkt eines Systems von geradlinigen Wirbelfäden einführt. Wir definieren einen Punkt $(\bar{x}\,\bar{y})$ folgendermaßen:

$$(78)\qquad \bar{x}\int \dot{r}\,df = \int x\,\dot{r}\,df, \quad \bar{y}\int \dot{r}\,df = \int y\,\dot{r}\,df,$$

oder:

$$(78a) \qquad \bar{x} = \frac{\int x \dot{r}\, df}{\int \dot{r}\, df}; \quad \bar{y} = \frac{\int y \dot{r}\, df}{\int \dot{r}\, df}.$$

Bezeichnet man $\dot{r}\,df$ durch dm, $\int \dot{r}\,df$ durch M, so ist die Analogie zur Schwerpunktsbestimmung vollkommen, und daher nennt man den Punkt $(\bar{x}, \bar{y})$ den **Schwerpunkt des Wirbelsystems**. Es gilt nun zunächst der Satz: „**Der Schwerpunkt eines Systems geradliniger Wirbel bleibt in Ruhe.**" Denn bildet man die substantielle Ableitung nach t in (78a), so folgt:

$$(79) \qquad \begin{cases} \dfrac{D\bar{x}}{Dt} = \dfrac{\int \frac{Dx}{Dt} \dot{r}\, df}{\int \dot{r}\, df} = \dfrac{1}{M} \int u \dot{r}\, df, \\[2ex] \dfrac{D\bar{y}}{Dt} = \dfrac{\int \frac{Dy}{Dt} \dot{r}\, df}{\int \dot{r}\, df} = \dfrac{1}{M} \int v \dot{r}\, df. \end{cases}$$

Darin setzen wir für u und v die Werte nach (75) ein, indem wir ein anderes Element mit df' und seine Koordinaten mit (α', β') bezeichnen; df ist jetzt der Aufpunkt für dieses Integral und erhält daher die Koordinaten x, y; R ist also die Entfernung von (x, y) und (α', β'), also $\sqrt{(x-\alpha')^2 + (y-\beta')^2}$. Das liefert:

$$\bar{u} = \frac{D\bar{x}}{Dt} = -\frac{1}{\pi M} \int \dot{r}\, df \int \frac{\dot{r}'}{R} \cdot \frac{\partial R}{\partial y}\, df',$$

oder:

$$\bar{u} = -\frac{1}{\pi M} \iint \frac{\dot{r}\dot{r}'}{R} (y - \beta')\, df\, df';$$

entsprechend:

$$(80) \qquad \bar{v} = +\frac{1}{\pi M} \iint \frac{\dot{r}\dot{r}'}{R} (x - \alpha')\, df\, df'.$$

Diese Größen sind aber Null, wie aus einer Betrachtung der Integration hervorgeht. Jedes Element des Wirbels ist einmal als df (also als Aufpunkt mit den Koordinaten x, y), einmal als df' (mit den Koordinaten α', β') zu nehmen. Bei dieser Vertauschung bleibt der Ausdruck $\frac{\dot{r}\dot{r}'\, df\, df'}{R}$ offenbar ungeändert, aber $y-\beta'$ wird zu $(\beta'-y)$; $(x-\alpha')$ zu $(\alpha'-x)$, d. h. wechseln das Vorzeichen. Zu jedem Gliede der Summen (80) gehört also ein gleich großes mit entgegengesetztem Vorzeichen. Folglich sind:

$$(81) \qquad \bar{u} = \bar{v} = 0,$$

d. h. **der Schwerpunkt eines Systems geradliniger Wirbel bleibt in Ruhe.**

Die Integrale in (78) können offenbar als Summen von Integralen aufgefaßt werden, die über die einzelnen Wirbelfäden zu erstrecken sind. Bezeichnet man ein Element des n-ten Wirbels mit df_n, die Rotationsgeschwindigkeit an dieser Stelle mit $\dot{r}_n$, so ist offenbar nach (78a):

$$\int x\dot{r}\,df = \int x\dot{r}_1\,df_1 + \int x\dot{r}_2\,df_2 + \ldots + \int x\dot{r}_n\,df_n = \sum_n \int x\dot{r}_n\,df_n,$$

$$\int y\dot{r}\,df = \int y\dot{r}_1\,df_1 + \int y\dot{r}_2\,df_2 + \ldots + \int y\dot{r}_n\,df_n = \sum_n \int y\dot{r}_n\,df_n,$$

$$\int \dot{r}\,df = \int \dot{r}_1\,df_1 + \int \dot{r}_2\,df_2 + \ldots + \int \dot{r}_n\,df_n = \sum_n \int \dot{r}_n\,df_n.$$

Bezeichnet man die Wirbelintensität $\int \dot{r}_n\,df_n$ des $n$ten Wirbels mit $\int dm_n = m_n$, die Gesamtsumme der Wirbelintensitäten $\int \dot{r}\,df$ wie bisher durch M, so kann man die letzte Gleichung schreiben:

$$M = m_1 + m_2 + \ldots + m_n,$$

und man erkennt, daß:

$$(82)\qquad \begin{cases} \bar{x}_n = \dfrac{\int x\dot{r}_n\,df_n}{\int \dot{r}_n\,df_n} = \dfrac{\int x\,dm_n}{\int dm_n} = \dfrac{\int x\,dm_n}{m_n} \\[2ex] \bar{y}_n = \qquad\qquad\qquad\qquad\quad\; = \dfrac{\int y\,dm_n}{m_n} \end{cases}$$

die Schwerpunktskoordinaten des $n$ten Wirbels darstellen. Die Koordinaten des Gesamtschwerpunktes kann man daher in der Form schreiben (Helmholtz):

$$(83)\qquad \begin{cases} \bar{x} = \dfrac{m_1\bar{x}_1 + m_2\bar{x}_2 + \cdots m_n\bar{x}_n}{m_1 + m_2 + \cdots m_n} = \dfrac{\Sigma m_n\bar{x}_n}{M}, \\[2ex] \bar{y} = \dfrac{m_1\bar{y}_1 + m_2\bar{y}_2 + \cdots m_n\bar{y}_n}{m_1 + m_2 + \cdots m_n} = \dfrac{\Sigma m_n\bar{y}_n}{M}, \end{cases}$$

und folglich die Geschwindigkeiten des Gesamtschwerpunktes ($\bar{u} = \bar{v} = 0$):

$$(84)\qquad \begin{cases} \bar{u} = 0 = \dfrac{m_1\bar{u}_1 + m_2\bar{u}_2 + \cdots m_n\bar{u}_n}{M} = \dfrac{\Sigma m_n\bar{u}_n}{M}, \\[2ex] \bar{v} = 0 = \dfrac{m_1\bar{v}_1 + m_2\bar{v}_2 + \cdots m_n\bar{v}_n}{M} = \dfrac{\Sigma m_n\bar{v}_n}{M}. \end{cases}$$

Haben wir es nur mit einem geradlinigen Wirbel zu tun, so reduzieren sich die obigen Summen auf das erste Glied, und es ist:

$$\bar{u} = \bar{u}_1 = \bar{v} = \bar{v}_1 = 0,$$

d. h. der Schwerpunkt eines einzelnen Wirbelzylinders bleibt in Ruhe.

Derselbe liegt, wenn $\bar{r}$ innerhalb des Wirbels nicht das Vorzeichen wechselt, was wir annehmen wollen, entweder innerhalb des Wirbels oder jedenfalls in seiner unmittelbaren Nähe. In diesem Sinne kann man daher angenähert auch sagen, der Wirbel selbst habe keine Translationsbewegung, obwohl der Querschnitt Deformationen erleiden und also zu verschiedenen Zeiten der Schwerpunkt in verschiedenen Teilen des Querschnittes liegen kann.

Nehmen wir nun zwei geradlinige Wirbel, und zwar der Einfachheit halber zunächst von gleicher Stärke $(m_1 = m_2)$ der Wirbelintensität. Dann ist nach (83) für den gemeinsamen Schwerpunkt:

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2}{2}, \quad \bar{y} = \frac{\bar{y}_1 + \bar{y}_2}{2},$$

d. h. der Schwerpunkt liegt mitten zwischen den beiden Wirbelzylindern — genau genommen: mitten zwischen den Einzelschwerpunkten — und behält diese Lage auch während der Bewegung derselben bei. Da ferner nach (84):

$$\bar{u} = 0 = \frac{\bar{u}_1 + \bar{u}_2}{2}, \quad \bar{v} = 0 = \frac{\bar{v}_1 + \bar{v}_2}{2},$$

also:

$$\bar{u}_1 = -\bar{u}_2, \quad \bar{v}_1 = -\bar{v}_2$$

ist, und da ferner die resultierenden Geschwindigkeiten $\bar{c}_1$ und $\bar{c}_2$, die sich die beiden Wirbel gegenseitig erteilen, nach (77a) stets senkrecht zu ihrer Verbindungslinie gerichtet sind, so ist die erfolgende Bewegung eine Drehung der beiden Wirbel um ihren gemeinschaftlichen Schwerpunkt, wobei ihr Abstand unverändert bleibt. Die Drehungsgeschwindigkeit ist ferner nach (77) um so größer, je kleiner der Abstand der beiden Wirbelzylinder ist.

Fig. 229a erläutert diesen Sachverhalt. Die kleinen Kreisgebiete stellen die beiden Wirbel m_1 und m_2 $(m_1 = m_2)$ dar, der punktierte große Kreis die Bahn der Einzelschwerpunkte; O ist der gemeinsame Schwerpunkt $(\bar{x}, \bar{y})$, der in Ruhe bleibt.

Nehmen wir in einem zweiten Beispiele die Stärken der beiden Wirbel als entgegengesetzt gleich an $(m_1 = -m_2)$, so folgt aus (83)

$$\bar{x} = \bar{y} = \infty,$$

d. h. der gemeinsame Schwerpunkt liegt auf der Verlängerung der Verbindungslinie der Einzelschwerpunkte im Unendlichen. Die Bewegung der Einzelwirbel ist nun eine Drehung um den Gesamtschwerpunkt, d. h. hier eine Bewegung auf Kreisen mit unendlich großen Radien, deren Differenz gleich ihrem Abstande ist, oder einfacher: die beiden Wirbel bewegen sich jetzt senkrecht zu ihrer Verbindungslinie vorwärts, wobei die letztere sich parallel bleibt, mit einer Geschwindigkeit, die umgekehrt

proportional ihrem Abstande ist. Fig. 229b, die ohne Erläuterung verständlich ist, illustriert diesen Vorgang. Die Pfeile in den Figuren 229a und 229b im umgebenden Potentialraum deuten die Bewegung der die Wirbel umschließenden Flüssigkeit an. Speziell im Falle der Fig. 229b ist in der zwischen beiden Wirbeln befindlichen Ebene EE aus Symmetriegründen die Geschwindigkeit der Flüssigkeitsteilchen tangential zu derselben gerichtet. Man kann diese Ebene daher durch eine

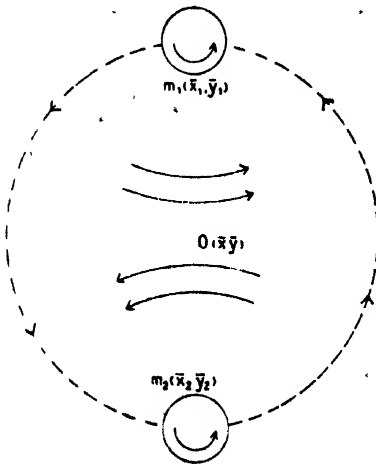


Fig. 229a.

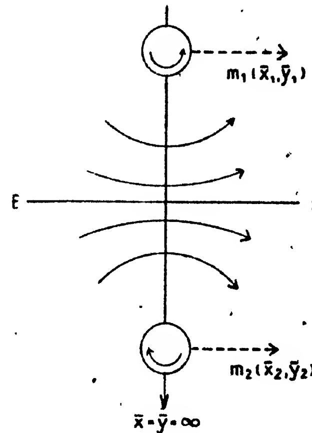


Fig. 229b.

feste Wand ersetzen und hat so auch das Problem gelöst, daß ein Wirbelzylinder parallel zu einer festen Wand sich bewegt. Die Flüssigkeitsströmung ist in beiden Fällen dieselbe. Der eine Wirbel ist offenbar — im Sinne der Methode der elektrischen Bilder — das Spiegelbild des anderen in Bezug auf diese Ebene EE.

Die obigen Sätze sind Spezialfälle des allgemeineren, daß bei beliebigen Wirbelintensitäten sich die beiden Wirbel stets um ihren gemeinsamen Schwerpunkt drehen, mag derselbe zwischen ihnen auf ihrer Verbindungslinie oder auf der Verlängerung derselben liegen.

Wir wollen nun, um zu detaillierteren Resultaten zu gelangen, weiterhin annehmen, daß wir es mit einem kreisförmigen Wirbelzylinder vom Radius R_1 zu tun haben. Die Wirbelgeschwindigkeit τ sei im ganzen Innern desselben der Einfachheit halber konstant. Unsere Aufgabe ist dann, sowohl im Innenraume des Wirbels als auch im Außenraum die Geschwindigkeitskomponenten u, v zu bestimmen, unter der Voraussetzung, daß $u_\infty = v_\infty = 0$ und daß für $R = R_1$, d. h. an der Trennungslinie des Wirbel- und Potentialraumes die tangentiellen Geschwin-

digkeiten stetig ineinander übergehen. Ferner werde angenommen, daß um die Achse herum alles symmetrisch sei („axiale Symmetrie"). Unter dieser letzteren Voraussetzung erhält man durch Einführung von Polarkoordinaten (R, ϑ) aus Gleichung (73), da von ϑ alles unabhängig ist:

(85) $$\frac{d^2 W}{d R^2} + \frac{1}{R} \frac{d W}{d R} = -2 \mathfrak{r}.$$

Gleichung (85) gilt für den Innenraum sowohl wie für den Außenraum, im letzteren natürlich mit der Spezialisierung $\mathfrak{r} = 0$. Bezeichnet man die auf den Innenraum bezüglichen Größen durch den Index i, die den Außenraum charakterisierenden durch den Index a, so haben wir statt (85) ausführlicher:

(86) $$\begin{cases} \dfrac{d^2 W_i}{d R^2} + \dfrac{1}{R} \dfrac{d W_i}{d R} = 2 \mathfrak{r}, \\ \dfrac{d^2 W_a}{d R^2} + \dfrac{1}{R} \dfrac{d W_a}{d R} = 0. \end{cases}$$

Für die linke Seite von (85) kann man schreiben:

$$\frac{d^2 W}{d R^2} + \frac{1}{R} \frac{d W}{d R} = \frac{1}{R} \frac{d}{d R} \left(R \frac{d W}{d R} \right);$$

also folgt in leichter Rechnung aus (86) unter Fortlassung einer belanglosen additiven Konstanten:

(87) $$\begin{cases} W_i = -\mathfrak{r} \dfrac{R^2}{2} + B_i \log R, \\ W_a = \qquad\quad B_a \log R. \end{cases}$$

B_i und B_a sind Integrationskonstanten. Nach (72) folgt daraus für die Geschwindigkeitskomponenten:

(88a) $$\begin{cases} u_i = \dfrac{\partial W_i}{\partial y} = -\mathfrak{r} y + \dfrac{B_i}{R^2} y, \\ v_i = -\dfrac{\partial W_i}{\partial x} = +\mathfrak{r} x - \dfrac{B_i}{R^2} x, \end{cases}$$

und:

(88b) $$\begin{cases} u_a = \dfrac{\partial W_a}{\partial y} = \dfrac{B_a}{R^2} y, \\ v_a = -\dfrac{\partial W_a}{\partial x} = -\dfrac{B_a}{R^2} x. \end{cases}$$

Daraus folgt für die Beträge der resultierenden Geschwindigkeiten:

$$c_i = \mathfrak{r} R + \frac{B_i}{R}; \quad c_a = \frac{B_a}{R}.$$

Im Innenraum würde c_i für $R = 0$ unendlich groß werden, was unmöglich ist, da die Wirbelgeschwindigkeit $\mathfrak{r}$ einen endlichen konstanten Wert hat; dies führt dazu, $B_i = 0$ zu nehmen; im Außenraum erkennt man,

daß, wie es die Aufgabe verlangt, c_a im unendlichen $= 0$ wird, also ist einfacher:

(89) $$c_i = \dot{r} \cdot R; \quad c_a = \frac{B_a}{R}.$$

Endlich müssen für $R = R_1$, d. h. an der Oberfläche des Wirbels, $c_i = c_a$ werden; das liefert die zur Bestimmung von B_a dienende Gleichung:

$$\dot{r} R_1 = \frac{B_a}{R_1},$$

oder

(90) $$B_a = \dot{r} R_1^2.$$

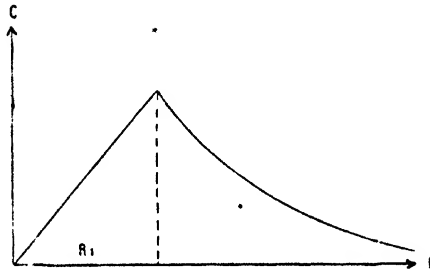


Fig. 230.

Demgemäß haben wir nach (89) endgültig:

(91) $$\begin{cases} c_i = \dot{r} \cdot R, \\ c_a = \dfrac{\dot{r} R_1^2}{R}. \end{cases}$$

Man erkennt deutlich, daß wir hier im Außenraum eine zyklische Potentialbewegung haben, nämlich genau dieselbe, die wir im vorigen Kapitel in Nr. 176 am Schluß behandelt haben. Die Stromlinien sind offenbar Kreise. Das Geschwindigkeitspotential φ hat den Wert:

(92) $$\varphi = \dot{r} R_1^2 \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{y}{x}\right) = \dot{r} R_1^2 \cdot \vartheta.$$

Bilden wir z. B. die Zirkulation längs eines Kreises mit dem Radius $R > R_1$, so haben wir:

$$\oint \frac{\partial \varphi}{\partial s} ds = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{d\vartheta} d\vartheta.$$

Benutzt man den Wert (92) für φ, so erhält man:

$$\oint \frac{\partial \varphi}{\partial s} ds = 2\pi \dot{r} R_1^2.$$

Das muß nach dem Stokesschen Satze gleich der doppelten Wirbelintensität des umschlungenen Wirbels: $2\int \mathfrak{r}\, df$ oder, da $\mathfrak{r}$ konstant ist, gleich $2\mathfrak{r}\int df = 2\mathfrak{r} R_1^2 \pi$ sein, da $\int df = R_1^2\pi$ ist. Der Stokessche Satz wird also in der Tat durch unsere Lösung befriedigt. Graphisch wird die Geschwindigkeit in ihrer Abhängigkeit von R in der folgenden Zeichnung dargestellt (Fig. 280), die ohne weitere Erläuterung verständlich ist. Demselben Gesetze folgt natürlich die magnetische Kraft im Innen- und Außenraum eines linearen Stromleiters.

189. Rankines kombinierter Wirbel.

In dieser Nummer wollen wir ein möglichst einfaches Beispiel eines geradlinigen Wirbels betrachten, der in einer freien Flüssigkeitsoberfläche endigt. Solche kann man häufig in Wasseroberflächen beobachten, in denen sich dann trichterförmige Vertiefungen bilden, die auch im Volksmunde als Wirbel bezeichnet werden. Wir wollen zunächst die Umgebung des Wirbels betrachten, der ein Geschwindigkeitspotential φ zukommt.

Für den stationären Zustand vereinfacht sich Gleichung (40) des XVII. Kapitels auf pag. 773 zu:

$$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right\} + \int_0^P \frac{dP}{s} + \Omega = \text{Const.},$$

oder für inkompressible Flüssigkeiten, die wir voraussetzen:

$$(93)\qquad \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right\} + \frac{P}{s} + \Omega = \text{Const.}$$

Von äußeren Kräften soll nur die Schwere wirken, deren Richtung mit der negativen z-Richtung zusammenfalle; dann ist $\Omega = g z$; das Geschwindigkeitspotential gehorcht ferner wegen der Inkompressibilität der Flüssigkeit der Laplaceschen Gleichung:

$$(94)\qquad \Delta\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Diese wollen wir auf Zylinderkoordinaten (R, ϑ, z) transformieren. Man erhält der Reihe nach $\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right.$ bleibt unverändert$\left.\right)$:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_y = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial R}\right)_\vartheta \left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)_y + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta}\right)_R \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)_y.$$

Entsprechend für $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_x$. Aus den Gleichungen

$$R^2 = x^2 + y^2,$$

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{y}{x}.$$

folgt leicht:

$$(95) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)_y = \frac{x}{R} = \cos\vartheta, & \left(\frac{\partial R}{\partial y}\right)_x = \frac{y}{R} = \sin\vartheta, \\ \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)_y = -\frac{\sin\vartheta}{R}, & \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y}\right)_x = +\frac{\cos\vartheta}{R}. \end{cases}$$

Benutzt man dies und bildet ebenso $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$, so erhält man:

$$\Delta\varphi \equiv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial R^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial \varphi}{\partial R} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0,$$

oder einfacher:

$$(96) \quad \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial \varphi}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Wir wollen annehmen, daß die Teilchen außerhalb des Wirbels sich in kreisförmigen Bahnen bewegen, die in horizontalen Ebenen liegen. Dann kann φ von R und z nicht abhängen und es ist einfach:

$$(97) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \vartheta^2} = 0,$$

was unter Fortlassung einer belanglosen additiven Konstanten liefert:

$$(98) \quad \varphi = A\vartheta = A \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{y}{x}\right),$$

woraus für die Geschwindigkeitskomponenten und ihre Resultierende folgt:

$$(99) \quad \begin{cases} u_a = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{A y}{R^2}, \quad v_a = +\frac{A x}{R^2}, \quad w_a = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \\ c_a = \sqrt{u_a^2 + v_a^2 + w_a^2} = \frac{A}{R}. \end{cases}$$

Der Index a deutet wie vorher auf den Außenraum. Demnach folgt aus (93) die Gleichung:

$$\frac{P}{s} + g z + \frac{1}{2}\frac{A^2}{R^2} = \text{Const},$$

woraus für den Druck folgt:

$$(100) \quad P = -s g z - \frac{s}{2}\frac{A^2}{R^2} + \text{Const}.$$

Für die freie Oberfläche muß P gleich einer Konstanten werden; also erhält man folgende explizite Gleichung derselben:

$$z = \frac{\text{Const}}{s g} - \frac{A^2}{2 g R^2}.$$

oder wenn man $z - \frac{\text{Const}}{sg} = z'$ setzt, was eine passende Verschiebung des Anfangspunktes längs der z-Achse bedeutet:

$$z' = -\frac{A^2}{2gR^2}. \tag{101}$$

Betrachtet man z' und R als kartesische Koordinaten, so stellt diese Gleichung eine Hyperbel dritter Ordnung dar, die die z'- und R-Achse zu Asymptoten besitzt. Durch die Rotation derselben um die z'-Achse entsteht die freie Oberfläche. Die Kurve (101) ist in Fig. 231 dargestellt.

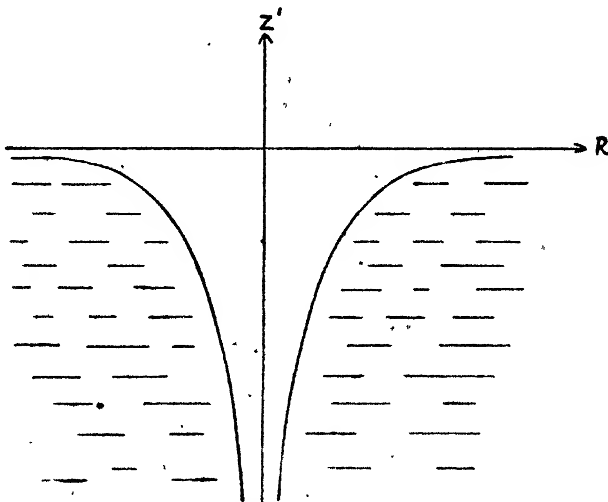


Fig. 231.

Man erhält also eine trichterförmige Oberfläche; für $R=0$ würde die Senkung unter das Normalniveau unendlich tief werden, da nach (100) die Geschwindigkeit unendlich groß wird. Man muß also die Umgebung der Stelle $R=0$ ausschalten.

Um die z-Achse herum können wir nun einen Wirbel anbringen. derartig, daß die Geschwindigkeiten an der Grenze von Wirbel und Potentialraum stetig ineinander übergehen; wir wollen den Wirbel etwa bis zum Werte $R=R_1$ gehen lassen. An dieser Stelle hat die oben diskutierte Potentialbewegung nach (99) die Geschwindigkeit $c_a = \frac{A}{R_1}$, so groß werden wir also auch die durch den Wirbel erzeugte Innengeschwindigkeit c_i an dieser Stelle machen müssen. Nehmen wir der Einfachheit halber an, daß die Wirbelgeschwindigkeit ω konstant sei, so ist die Geschwindigkeit c_i im Abstande R offenbar:

$$c_i = \omega R. \tag{102}$$

Führen wir nun ein mit dieser Winkelgeschwindigkeit ω mitrotierendes Koordinatensystem ein, so haben wir den Fall vor uns, den wir in Nr. 166 im XVI. Kapitel behandelt haben. Es gilt insbesondere die Gleichung (41) dieses Kapitels auf pag. 741:

$$\frac{P}{s} + gz - \frac{\omega^2}{2} R^2 = \text{Const.} \tag{103}$$

Setzen wir P gleich einer Konstanten, so folgt die Gleichung der freien Oberfläche:

$$z = \text{Const.} + \frac{\omega^2}{2g} R^2,$$

oder auch, wenn wir z durch das nur um eine belanglose additive Konstante verschiedene z' ersetzen:

$$z' = \frac{\omega^2}{2g} R^2 + C_2. \tag{104}$$

Das ist die Gleichung eines Rotationsparaboloides um die z'-Achse; für $R=0$ wird $z'=C_2$, bleibt also jedenfalls endlich.

Wir wollen nun die beiden Bewegungstypen an der Stelle $R=R_1$ aneinanderschließen. Die Stetigkeit der Geschwindigkeiten verlangt nach (99) und (102):

$$\text{für } R = R_1 \left\{ c_i = c_a, \quad \text{d. h.} \quad \omega R_1 = \frac{A}{R_1};\right.$$

also ergibt sich für die Wirbelgeschwindigkeit der Wert:

$$\omega = \frac{A}{R_1^2}. \tag{105}$$

Dies setzen wir in (104) ein und erhalten dann für den inneren Teil der freien Oberfläche:

$$z_i' = \frac{A^2 R^2}{2 g R_1^4} + C_2. \tag{106}$$

Damit endlich (101) und (106) eine einzige, stetig ineinander übergehende Fläche bilden, muß sein:

$$\text{für } R = R_1 \left\{ z_a' = z_i', \quad \text{d. h.:} \quad -\frac{A^2}{2 g R_1^2} = \frac{A^2}{2 g R_1^4} R_1^2 + C_2.\right.$$

Für die Konstante C_2 folgt der Wert:

$$C_2 = -\frac{A^2}{g R_1^2},$$

und damit wird endlich die innere Oberfläche:

$$z_i' = \frac{A^2}{2 g R_1^4} (R^2 - 2 R_1^2). \tag{107}$$

Wir erhalten dann das Bild der Fig. 232.

Dieses Beispiel hat **Rankine** zur Illustration der Verhältnisse an

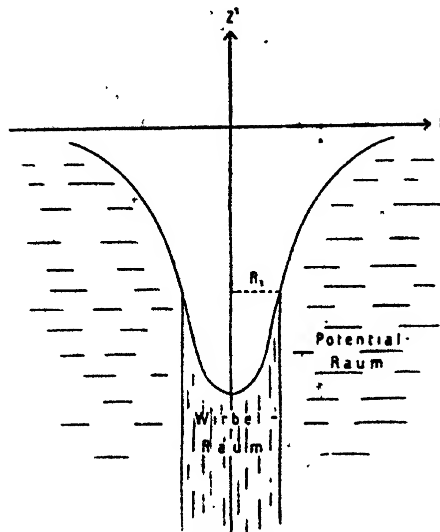


Fig. 232.

Wasserwirbeln gegeben. Er hat diese Bewegungsart einen „**kombinierten Wirbel**" genannt. Diese Flüssigkeitsströmung wird auch dadurch inter-

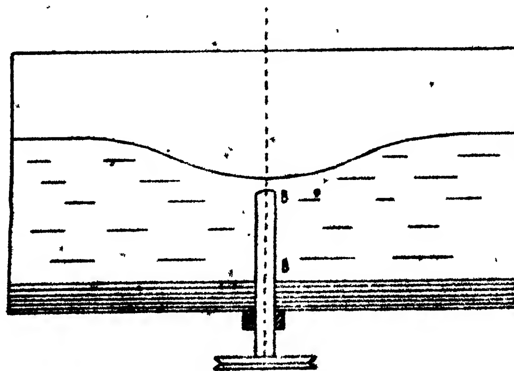


Fig. 233.

essant, daß sie experimentell leicht herstellbar ist. Da innerhalb des Wirbelfadens die Winkelgeschwindigkeit ω konstant ist, so rotiert die im Wirbelraum enthaltene Flüssigkeit wie ein **fester Körper** und kann

daher auch durch einen solchen ersetzt werden.[1]) Zur Demonstration bedient man sich der in Fig. 233 skizzierten Vorrichtung, d. h. eines weiten zylindrischen Gefäßes *AA*, durch dessen Metallboden eine Achse *BB* vom Radius *R* eingeführt ist, die in rasche Rotation versetzt werden kann. Diese teilt sich der Flüssigkeit derartig mit, daß die über *BB* befindliche Flüssigkeit dieselbe Wirbelgeschwindigkeit annimmt, und außerhalb derselben stellt sich die vorher besprochene Potentialbewegung von selbst ein. Man erkennt dann in dem Flüssigkeitsniveau deutlich die trichterförmige Vertiefung, die in Fig. 233 im Schnitt dargestellt ist.

190. Geschlossene Wirbel (Wirbelringe).

Sehr viel komplizierter sind die Verhältnisse bei geschlossenen Wirbeln, sogenannten Wirbelringen. Von diesen wollen wir nur die einfachste Form betrachten, nämlich kreisförmige Ringe. Das Verhalten eines einzigen kreisförmigen Wirbelringes in einer unendlich ausgedehnten

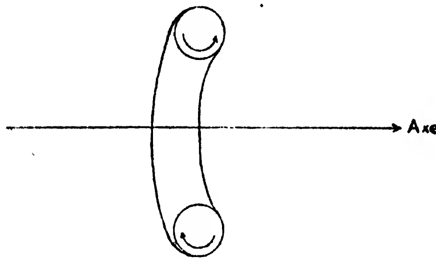


Fig. 234.

Flüssigkeit hat bereits Helmholtz in seiner berühmten Arbeit analytisch untersucht; wir wollen uns damit begnügen, die Resultate plausibel zu machen. Zu diesem Zwecke legen wir durch die Achse des Wirbelringes einen ebenen Schnitt, den wir mit der Papierebene zusammenfallen lassen wollen. Dann erhält man das Bild der Fig. 234 und man erkennt, daß in dieser Ebene die Verhältnisse qualitativ so liegen, wie beim zweidimensionalen Problem zweier gleichstarker aber entgegengesetzt rotierender Wirbelzylinder, die durch Fig. 229b dargestellt wurden. Daraus folgt sofort, daß auch ein einzelner Wirbelring nicht in Ruhe sein kann sondern in Richtung der Rotation längs der Achse vorwärts schreiten wird mit einer Geschwindigkeit, die umgekehr proportional dem Radius des Ringes ist. Die Fortbewegungsrichtung ist in Fig. 234 durch den Pfeil an der Achse angedeutet. Nunmehr kann man auch im allgemeinen übersehen, wie sich zwei Wirbe

[1]) H. Lorenz, Technische Hydromechanik S. 363 u. 364.

von derselben Wirbelstärke verhalten, die längs derselben Achse fortschreiten. Nehmen wir zunächst den Fall, daß sie in demselben Sinne fortschreiten (Fig. 235). Im Falle der Fig. 235 ist der vordere Ring der größere, also schreitet er infolge der eben besprochenen Wirkung seiner einzelnen Teile auf sich selbst langsamer fort, als der hintere kleinere. Das wird noch durch folgenden Umstand verstärkt: jeder Teil des einen Ringes wirkt ja auf jeden Teil des anderen Ringes; bisher haben wir nun bloß die Wirkung von a auf a' resp. b auf b' und umgekehrt in Rechnung

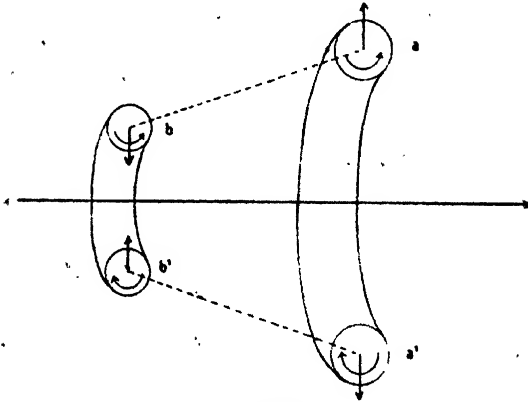


Fig. 235.

gesetzt. Aber es wirkt auch b auf a und b' auf a' und umgekehrt. Nun verhalten sich aber b und a ähnlich wie zwei gleichsinnig rotierende Wirbelzylinder, deren Bewegung eine Drehung um den gemeinsamen zwischen ihnen liegenden Schwerpunkt ist; dasselbe gilt von b' und a'. Ziehen wir die Verbindungslinien ba resp. $b'a'$, so hat die eben besprochene Kraftwirkung den Effekt, diese Linien zu drehen, und zwar in dem Sinne, daß der vordere Wirbelring noch größer und der hintere noch kleiner wird. Dieser Drehungssinn ist in Fig. 235 durch Pfeile angedeutet. Im nämlichen Sinne äußert sich auch die Wirkung von b auf a resp. b' auf a' und umgekehrt. Infolgedessen wird die Geschwindigkeit des vorderen Wirbelringes immer mehr verlangsamt, die des hinteren immer mehr beschleunigt, so daß schließlich der hintere den vorderen einholt: der kleinere Ring schlüpft durch den großen durch, und dann beginnt das Spiel von neuem: der nunmehr vordere, kleinere. wird größer unter gleichzeitiger Verlangsamung seiner Translationsgeschwindigkeit, der nunmehr hintere wird kleiner unter gleichzeitiger Beschleunigung seiner Vorwärtsbewegung, bis wiederum Einholen und Durchschlüpfen stattfindet, und so fort. Man kann unter günstigen Umständen dies Verhalten in der Tat an Rauchringen beobachten, die geschickte Raucher zu erzeugen vermögen.

Nehmen wir nun den Fall, daß die Ringe in verschiedener Richtung der Achse sich bewegen und zwar mögen sie sich zunächst voneinander entfernen (Fig. 236). Wir nehmen den einfachsten Fall, daß beide Ringe gleich sind. Dann ergibt die Anwendung der nämlichen Erwägungen,

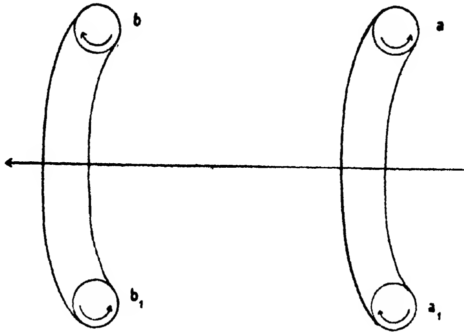


Fig. 236.

daß die Ringe immer kleiner werden und sich mit zunehmender Geschwindigkeit voneinander entfernen. Nehmen wir endlich auch den letzten Fall, daß die beiden Ringe sich aufeinander zu bewegen (Fig. 237), so erhält man das Resultat, daß die Ringe sich

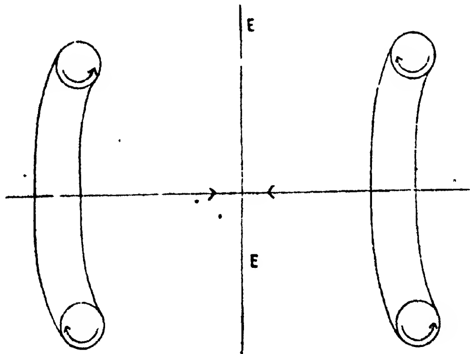


Fig. 237.

erweitern und immer langsamer sich einander nähern, ohne sich jemals zu berühren. Sie nähern sich unbegrenzt der Mittelebene EE_1, in der die Geschwindigkeit 0 herrscht, und die daher durch eine feste Wand ersetzt werden kann. Damit ist gleichzeitig das Verhalten eines Wirbelringes bei Annäherung an eine feste Wand klargestellt. Er nähert sich ihr unbegrenzt, ohne sie jemals zu berühren, und

erweitert sich dabei immer mehr. Dabei wird, da das Volumen des Ringes wegen der Inkompressibilität erhalten bleibt, der Querschnitt desselben kleiner und entsprechend nach dem Satze von der Erhaltung der Wirbelintensität die Rotationsgeschwindigkeit größer. Alle diese Phänomene kann man mit Rauchringen sehr schön verfolgen.

191. Wirbelflächen als Diskontinuitätsflächen.

Im allgemeinen sind die Wirbel räumlich angeordnet, jedoch kann man sich einen Grenzfall denken, in dem die Wirbel auf Flächen angeordnet sind. Es sei eine dünne Schicht von der kleinen Dicke δ gegeben. Wir führen ein Hilfskoordinatensystem von folgender Art ein: Die z-Achse werde als Normale der Schicht in dem betrachteten Punkte genommen, die xy-Ebene fällt dann mit der an diesem Punkte errichteten Tangentialebene zusammen. Dann haben wir für die Komponenten des Vektorpotentials nach (37):

$$\dot{\mathfrak{A}}_x = \frac{1}{2\pi}\int \frac{\dot{p}}{R}\,d\tau; \quad \dot{\mathfrak{A}}_y = \frac{1}{2\pi}\int \frac{\dot{q}}{R}\,d\tau; \quad \dot{\mathfrak{A}}_z = \frac{1}{2\pi}\int \frac{\dot{r}}{R}\,d\tau,$$

oder ausführlich geschrieben, wenn wir die Koordinaten eines in der Schicht liegenden Punktes mit x_0, y_0, z_0 bezeichnen:

$$\dot{\mathfrak{A}}_x = \frac{1}{2\pi}\iiint \frac{\dot{p}}{R}\,dx_0\,dy_0\,dz_0, \quad \dot{\mathfrak{A}}_y = \frac{1}{2\pi}\iiint \frac{\dot{q}}{R}\,dx_0\,dy_0\,dz_0,$$
$$\dot{\mathfrak{A}}_z = \frac{1}{2\pi}\int \frac{\dot{r}}{R}\,dx_0\,dy_0\,dz_0.$$

Darin ist die Integration über z_0 nur für das kleine Intervall δ auszuführen, innerhalb dessen $\dot{p}, \dot{q}, \dot{r}$ und R als konstant betrachtet werden dürfen, wenn wir den Wirbelraum auf diese dünne Schicht beschränken. Man kann also schreiben, indem man die Integration nach z ausführt:

(108) $$\left\{\begin{aligned} &\dot{\mathfrak{A}}_x = \frac{1}{2\pi}\iint \frac{\dot{p}\delta}{R}\,dx_0\,dy_0; \quad \dot{\mathfrak{A}}_y = \frac{1}{2\pi}\int \frac{\dot{q}\delta}{R}\,dx_0\,dy_0; \\ &\dot{\mathfrak{A}}_z = \frac{1}{2\pi}\iint \frac{\dot{r}\delta}{R}\,dx_0\,dy_0. \end{aligned}\right.$$

Wir wollen nun die Dicke der Schicht δ immer mehr abnehmen, gleichzeitig aber die Größen $\dot{p}, \dot{q}, \dot{r}$ derartig zunehmen lassen, daß die Produkte

(109) $$\dot{p}\delta = \dot{p}', \quad \dot{q}\delta = \dot{q}', \quad \dot{r}\delta = \dot{r}'$$

endlich bleiben. Gehen wir dann zur Grenze $\delta = 0$ über und bezeichnen wir $dx_0\,dy_0$, d. h. ein Flächenelement der unendlich dünnen Wirbelschicht, mit dS, so können wir (108) schreiben:

(110) $$\dot{\mathfrak{A}}_x = \frac{1}{2\pi}\int \frac{\dot{p}'\,dS}{R}; \quad \dot{\mathfrak{A}}_y = \frac{1}{2\pi}\int \frac{\dot{q}'\,dS}{R}; \quad \dot{\mathfrak{A}}_z = \frac{1}{2\pi}\int \frac{\dot{r}'\,dS}{R}.$$

Dabei ist R die Entfernung des Aufpunktes (x, y, z), in dem $\dot{\mathfrak{A}}_x$, $\dot{\mathfrak{A}}_y$, $\dot{\mathfrak{A}}_z$ berechnet werden sollen, von dem Flächenelement dS, dessen Koordinaten (x_0, y_0, z_0) sein mögen. Um nun die Eigenschaften der Wirbelschicht zu untersuchen, wollen wir den Aufpunkt immer näher an die Fläche von einer Seite herandrücken und ihn schließlich durch die Fläche hindurch nach der anderen Seite sich wieder entfernen lassen. Es handelt sich um das Verhalten von $\dot{\mathfrak{A}}_x$, $\dot{\mathfrak{A}}_y$, $\dot{\mathfrak{A}}_z$ und ihrer Ableitungen, die ja die Geschwindigkeit u, v, w bestimmen.

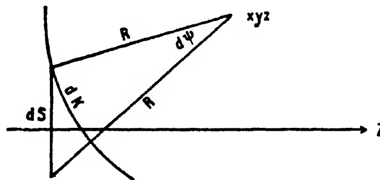


Fig. 238.

Nähert sich der Punkt (x, y, z) dem Punkt (x_0, y_0, z_0), so wird $R = 0$ und es bedarf einer genauen Untersuchung, was dann geschieht. Wir wollen zunächst den Punkt (x_0, y_0, z_0) zum Koordinatenanfangspunkte nehmen und gleichzeitig das Koordinatensystem um die z-Achse so drehen, daß die x-Achse mit der Richtung der Wirbelachse im Anfangspunkte zusammenfällt. Dann ist für diesen Punkt offenbar:

$$p' \neq 0, \quad q' = r' = 0.$$

Das diesen Punkt enthaltende Flächenelement liefert also zu den Integralen $\dot{\mathfrak{A}}_y$ und $\dot{\mathfrak{A}}_z$ keinen Beitrag und daraus folgt sofort, daß $\dot{\mathfrak{A}}_y$ und $\dot{\mathfrak{A}}_z$ sowie ihre Ableitungen endlich bleiben, auch wenn der Aufpunkt in den Koordinatenanfangspunkt, d. h. in einen beliebigen Punkt der Wirbelfläche hineinfällt. Ebenfalls ist natürlich die Änderung dieser Größen eine vollkommen stetige.

Anders liegt die Sache mit $\dot{\mathfrak{A}}_x$. Wir schlagen um den Aufpunkt (x, y, z) mit dem Radius R eine Kugel, aus der durch den von (x, y, z) nach dS gezogenen Strahlenkegel ein Element $dK = R^2 d\psi$ ($d\psi$ räumlicher Winkel) herausgeschnitten wird (Fig. 238). Dann ist offenbar:

$$dK = \pm dS \cos(Rz),$$

und zwar ist, wenn (x, y, z) auf Seite der positiven z liegt, wie in der Figur, $\cos(Rz)$ negativ, da (Rz) stumpf ist, also ist:

(111) für $z > 0$: $R^2 d\psi = - dS \cos(Rz)$.

Ebenso:

(112) für $z < 0$: $R^2 d\psi = + dS \cos(Rz)$.

Der Beitrag $d\dot{\mathfrak{A}}_x$ des Elementes dS, das den Koordinatenanfangspunkt enthält, zu $\dot{\mathfrak{A}}_x$ ist nach (110) also:

$$d\dot{\mathfrak{A}}_x = \pm \frac{1}{2\pi}\frac{p'}{R}\frac{R^2\,d\psi}{\cos(Rz)},$$

oder, da $\cos(Rz)$: $\pm\frac{z}{R}$ ist:

$$d\dot{\mathfrak{A}}_x = +\frac{1}{2\pi}\frac{p'}{R}\frac{R^2\,d\psi}{z} = \frac{1}{2\pi}p'\frac{R^2\,d\psi}{z}. \tag{113}$$

Läßt man nun R zu 0 abnehmen, so sieht man, daß $d\dot{\mathfrak{A}}_x$ ebenfalls 0 wird, also $\dot{\mathfrak{A}}_x$ beim Durchgange von (x, y, z) durch die Fläche endlich und stetig bleibt. Genau dasselbe gilt für die Ableitungen $\frac{\partial\dot{\mathfrak{A}}_x}{\partial x}$, $\frac{\partial\dot{\mathfrak{A}}_x}{\partial y}$, d. h. für die Ableitungen von $\dot{\mathfrak{A}}_x$ nach den tangentiellen Koordinaten x und y. Dagegen wird dies anders für die Ableitung $\frac{\partial\dot{\mathfrak{A}}_x}{\partial z}$ nach der Normalen. Wir haben zunächst:

$$\frac{\partial\dot{\mathfrak{A}}_x}{\partial z} = -\frac{1}{2\pi}\int\frac{p'}{R^2}\cos(Rz)\,dS;$$

der Beitrag des Flächenelementes dS, das den willkürlichen Koordinatenanfangspunkt enthält, ist also:

$$d\left(\frac{\partial\dot{\mathfrak{A}}_x}{\partial z}\right) = -\frac{1}{2\pi}\frac{p'}{R^2}\cos(Rz)\,dS,$$

und das hat, je nachdem $z > 0$ oder $z < 0$ die beiden Werte:

$$\text{(114)}\quad \begin{cases} \text{für } z > 0\text{:} & d\left(\frac{\partial\dot{\mathfrak{A}}_x}{\partial z}\right) = +\frac{1}{2\pi}\frac{p'}{R^2}\cos(Rz)\frac{R^2\,d\psi}{\cos(Rz)} = +\frac{1}{2\pi}p'\,d\psi, \\ \text{für } z < 0\text{:} & d\left(\frac{\partial\dot{\mathfrak{A}}_x}{\partial z}\right) = \qquad\qquad -\frac{1}{2\pi}p'\,d\psi. \end{cases}$$

Läßt man nun z von positiven Werten her sich der 0 nähern, so wird, da $\lim\limits_{z=0} d\psi = 2\pi$ ist:

$$\lim_{z=+0}\left[d\left(\frac{\partial\dot{\mathfrak{A}}_x}{\partial z}\right)\right]_+ = +p',$$

und ebenso, wenn z sich von negativen Werten her der 0 nähert:

$$\lim_{z=-0}\left[d\left(\frac{\partial\dot{\mathfrak{A}}_x}{\partial z}\right)\right]_- = -p'.$$

Also ist, da die übrigen Flächenelemente zu einer Unstetigkeit oder Unendlichkeit nicht beitragen können, allgemein:

$$\left(\frac{\partial\dot{\mathfrak{A}}_x}{\partial z}\right)_+ - \left(\frac{\partial\dot{\mathfrak{A}}_x}{\partial z}\right)_- = 2p'. \tag{115}$$

Nun wollen wir das Verhalten der Geschwindigkeitskomponenten zu beiden Seiten der Fläche untersuchen; daß u, v, w endlich bleiben, folgt daraus, daß alle Ableitungen von $\dot{\mathfrak{A}}_x$, $\dot{\mathfrak{A}}_y$, $\dot{\mathfrak{A}}_z$ endliche Größen sind. Aber u, v, w brauchen nicht stetig zu sein, d. h. $u_+ - u_-$, $v_+ - v_-$, $w_+ - w_-$ können von Null verschieden sein, da die normale Ableitung von $\dot{\mathfrak{A}}_x$ nach (115) unstetig ist. Wir erhalten nach (34):

$$(116) \quad \begin{cases} u_+ - u_- = \left(\frac{\partial \dot{\mathfrak{A}}_z}{\partial y}\right)_+ - \left(\frac{\partial \dot{\mathfrak{A}}_z}{\partial y}\right)_- - \left(\frac{\partial \dot{\mathfrak{A}}_y}{\partial z}\right)_+ + \left(\frac{\partial \dot{\mathfrak{A}}_y}{\partial z}\right)_- = 0, \\ v_+ - v_- = \left(\frac{\partial \dot{\mathfrak{A}}_x}{\partial z}\right)_+ - \left(\frac{\partial \dot{\mathfrak{A}}_x}{\partial z}\right)_- - \left(\frac{\partial \dot{\mathfrak{A}}_z}{\partial x}\right)_+ + \left(\frac{\partial \dot{\mathfrak{A}}_z}{\partial x}\right)_- = 2\dot{p}', \\ w_+ - w_- = \left(\frac{\partial \dot{\mathfrak{A}}_y}{\partial x}\right)_+ - \left(\frac{\partial \dot{\mathfrak{A}}_y}{\partial x}\right)_- - \left(\frac{\partial \dot{\mathfrak{A}}_x}{\partial y}\right)_+ + \left(\frac{\partial \dot{\mathfrak{A}}_x}{\partial y}\right)_- = 0. \end{cases}$$

Setzen wir

$$\sqrt{u_+^2 + v_+^2} = c_+^t, \quad \sqrt{u_-^2 + v_-^2} = c_-^t, \quad w_+ = c_+^n, \quad w_- = c_-^n$$

(die Indices t und n deuten auf die tangentielle resp. normale Lage hin), so haben wir

$$(117) \quad \begin{cases} c_+^t - c_-^t = 2\dot{p}', \\ c_+^n - c_-^n = 0, \end{cases}$$

d. h. die tangentiellen Geschwindigkeiten zu beiden Seiten einer Wirbelfläche sind ungleich, oder: Wirbelflächen sind Diskontinuitätsflächen, wie wir sie schon im vorhergehenden Kapitel eingehend untersucht haben.

Helmholtz hat alle in diesem Kapitel abgeleiteten Resultate in seiner Arbeit über Wirbelbewegung im Jahre 1858 gefunden; insbesondere hat er auch dort erkannt, daß, da die Wirbelflächen Diskontinuitätsflächen sind, Unstetigkeiten der tangentiellen Geschwindigkeitskomponenten mit den hydrodynamischen Gleichungen für eine ideale Flüssigkeit verträglich sind.

Zehn Jahre später (1868) erschien dann seine im vorigen Kapitel gewürdigte Arbeit über Strahlbildung, die auf dieser Erkenntnis beruht.

192. Bernoullisches Theorem.

Unter der Voraussetzung der Existenz eines Geschwindigkeitspotentials haben wir im vorigen Kapitel die Gleichung abgeleitet [Gleichung (40), XVII. Kap., pag. 778].

$$(118) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}c^2 + \int_0^P \frac{dP}{s} + \Omega = \text{Const},$$

die man als „Druckgleichung" bezeichnen kann. Für den stationären Zustand geht sie über in

$$(119) \quad \frac{1}{2}c^2 + \int_0^P \frac{dP}{s} + \Omega = \text{Const}.$$

Diese Gleichung gilt jedoch im stationären Falle auch dann — allerdings mit einer kleinen Modifikation —, wenn kein Geschwindigkeitspotential vorhanden ist. Wir wollen das Element einer Stromlinie mit ds bezeichnen und die Beschleunigung längs derselben berechnen. Ist die Geschwindigkeit c, so ist die Beschleunigung $\frac{Dc}{Dt}$, da ja die Richtung der Stromlinie mit der der Geschwindigkeit zusammenfällt. Nun ist aber gemäß der Bedeutung des Symbols $\frac{D}{Dt}$:

(120) $$\frac{Dc}{Dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial s}\frac{ds}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + c\frac{\partial c}{\partial s},$$

also für den stationären Zustand:

(121) $$\frac{Dc}{Dt} = c\frac{\partial c}{\partial s}.$$

Bilden wir nun die Eulerschen Gleichungen [Gleichungen (17), XVII. Kap. auf pag. 764] für die beliebige Richtung s mit dem Werte (121) für die Beschleunigung, so folgt:

(122) $$c\frac{\partial c}{\partial s} = -\frac{\partial}{\partial s}(U + \Omega) = -\frac{\partial}{\partial s}\int_0^P \frac{dP}{\varepsilon} - \frac{\partial \Omega}{\partial s},$$

oder wenn wir mit ds multiplizieren und längs der Stromlinie integrieren:

(123) $$\frac{1}{2}c^2 + \int_0^P \frac{dP}{\varepsilon} + \Omega = \text{Const.},$$

was die gesuchte Gleichung ist. Es ist jedoch zu beachten, daß insofern ein Unterschied besteht, als hier die Konstante sich nur auf die eine Stromlinie bezieht, und also im allgemeinen von Stromlinie zu Stromlinie variiert, während sie früher eine Konstante innerhalb der ganzen Flüssigkeit bedeutete.

Die Druckgleichung (123) ist für die technische Hydrodynamik von großem Interesse. Denn bei den schwierigen Problemen, die die Praxis stellt, und die mit den heutigen Mitteln der Analysis nicht bewältigt werden können, hat man sich — nach dem Vorgange von Daniel Bernoulli — eine angenäherte Theorie, die sogenannte „Stromlinientheorie" geschaffen. Diese besteht darin, daß man die stationäre Bahn eines jeden Flüssigkeitsteilchens als durch die Erfahrung gegeben annimmt und nach der obigen Gleichung (117) die Veränderung des Druckes resp. der Geschwindigkeit längs dieser Bahn untersucht. Nach dem Urheber dieser Theorie heißt (123) das Bernoullische Theorem; Leonhard Euler hat auf dieser Grundlage z. B. eine Theorie der Flüssigkeitsströmung in Turbinen gegeben. Doch muß bemerkt werden, daß diese Stromlinientheorie keine wissenschaftlich vollständige und auch für die Praxis bereits nicht mehr genügende ist.

Neunzehntes Kapitel.

Reibung von inkompressiblen Flüssigkeiten.

193. Ableitung der Differentialgleichungen für reibende inkompressible Flüssigkeiten.

Wir haben eine vollkommene Flüssigkeit dahin definiert, daß die Tangentialspannungen X_y, Y_z, Z_x sämtlich gleich 0 sein sollten. Alle Auseinandersetzungen des XVI., XVII. und XVIII. Kapitels sind nur unter dieser Voraussetzung abgeleitet. In Wirklichkeit jedoch zeigen alle realen Flüssigkeiten tangentiale Spannungen, die davon herrühren, daß benachbarte Flüssigkeitsteilchen infolge ihrer verschiedenen relativen Bewegung Reibungskräfte aufeinander ausüben. Wir wollen jetzt zur Betrachtung reibender Flüssigkeiten übergehen. Daher haben die im XVI. Kapitel erhaltenen Gleichungen:

$$X_x = Y_y = Z_z = P, \quad X_y = Y_z = Z_x = 0$$

keine Geltung mehr.

Wir haben vielmehr wieder von den allgemeinen elastischen Gleichungen auszugehen. Zunächst sind die Bewegungsgleichungen [Gleichung (7), X. Kapitel, pag. 484]:

$$(1) \qquad \begin{cases} \varepsilon\left(X - \frac{Du}{Dt}\right) = \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}, \\ \varepsilon\left(Y - \frac{Dv}{Dt}\right) = \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z}, \\ \varepsilon\left(Z - \frac{Dw}{Dt}\right) = \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}. \end{cases}$$

Zwischen den 9 Spannungskomponenten $X_x, \ldots Z_z$ bestehen die 3 Relationen [Gleichungen (9), X. Kapitel, pag. 486]:

$$(2) \qquad \begin{cases} X_y = Y_x, \\ Y_z = Z_y, \\ Z_x = X_z. \end{cases}$$

Ferner haben wir die Beziehungen [Gleichungen (10), X. Kapitel, pag. 488)]:

$$(3) \qquad \begin{cases} X_n = X_x \cos(nx) + X_y \cos(ny) + X_z \cos(nz) \\ Y_n = Y_x \cos(nx) + Y_y \cos(ny) + Y_z \cos(nz) \\ Z_n = Z_x \cos(nx) + Z_y \cos(ny) + Z_z \cos(nz) \end{cases}$$

Im XI. Kapitel haben wir diese Gleichungen dahin ergänzt, daß wir die Größen X_x, Y_y, Z_z, X_y, Y_z, Z_x als Funktionen der Deformationskomponenten x_x, y_y, z_z, ... darstellten. Die analoge Aufgabe ist auch hier zu lösen. Die Erfahrung lehrt, daß die Reibungskräfte zwischen zwei Teilchen Funktionen der relativen Geschwindigkeiten der beiden Teilchen sind. Nun sind aber die relativen Geschwindigkeiten δu, δv, δw zweier benachbarter Teilchen [nach Gleichung (4), Kapitel XVII, pag. 760] in der Form darstellbar:

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \delta u &= \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)dy + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)dz + 0\cdot dx \\ &\qquad - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)dy + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} \mp \frac{\partial w}{\partial x}\right)dz, \\ \left.\begin{aligned}\delta v &= \\ \delta w &= \end{aligned}\right\} &\text{ analog,} \end{aligned}\right.$$

oder in der Bezeichnungsweise der Gleichungen (7) und (8) des XVII. Kapitels:

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} \delta u &= \dot{x}_x\cdot dx + \dot{x}_y\cdot dy + \dot{x}_z\cdot dz + 0\cdot dx - \dot{r}\cdot dy + \dot{q}\cdot dz, \\ \delta v &= \dot{y}_x\cdot dx + \dot{y}_y\cdot dy + \dot{y}_z\cdot dz + \dot{r}\cdot dx + 0\cdot dy - \dot{p}\cdot dz, \\ \delta w &= \dot{z}_x\cdot dx + \dot{z}_y\cdot dy + \dot{z}_z\cdot dz - \dot{q}\cdot dx + \dot{p}\cdot dy + 0\cdot dz. \end{aligned}\right.$$

Darin stellen die je letzten drei Glieder eine infinitesimale Rotation des Teilchens vor, wobei es sich wie ein starrer Körper verhält. Bei der Rotation eines solchen treten aber erfahrungsgemäß keine Reibungskräfte der einzelnen Teilchen gegeneinander auf, also schließen wir, daß die Größen $X_x \ldots Z_x$ nicht von den Rotationskomponenten $\dot{p}$, $\dot{q}$, $\dot{r}$ abhängen können. Sie können demnach nur Funktionen der 6 Komponenten der Deformationsgeschwindigkeit $\dot{x}_x, \dot{y}_y, \dot{z}_z, \dot{x}_y, \dot{y}_z, \dot{z}_x$ sein. Wir haben also anzusetzen:

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} X_x &= f_1(\dot{x}_x, \dot{y}_y, \dot{z}_z, \dot{x}_y, \dot{y}_z, \dot{z}_x); & X_y &= f_4(\quad); \\ Y_y &= f_2(\quad); & Y_z &= f_5(\quad); \\ Z_z &= f_3(\quad); & Z_x &= f_6(\quad). \end{aligned}\right.$$

Wir wollen diese Funktionen f_1 bis f_6 in Maclaurinsche Reihen entwickeln: in erster Näherung für nicht zu große Geschwindigkeiten können wir dann schreiben:

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} X_x &= f_1(0) + \frac{\partial f_1}{\partial \dot{x}_x}\dot{x}_x + \frac{\partial f_1}{\partial \dot{y}_y}\dot{y}_y + \frac{\partial f_1}{\partial \dot{z}_z}\dot{z}_z + \frac{\partial f_1}{\partial \dot{x}_y}\dot{x}_y + \frac{\partial f_1}{\partial \dot{y}_z}\dot{y}_z + \frac{\partial f_1}{\partial \dot{z}_x}\dot{z}_x, \\ \left.\begin{aligned} Y_y &= f_2(0) + \\ Z_z &= f_3(0) + \\ X_y &= f_4(0) + \\ Y_z &= f_5(0) + \\ Z_x &= f_6(0) + \end{aligned}\right\} &\text{ analogen Gliedern.} \end{aligned}\right.$$

Ist die Flüssigkeit in Ruhe, so verschwinden die Größen $\dot{x}_x, \ldots \dot{z}_x$, so daß dann bleibt:

$$(8)\quad \begin{cases} X_x^0 = f_1(0); & Y_y^0 = f_2(0); & Z_z^0 = f_3(0); \\ X_y^0 = f_4(0); & Y_z^0 = f_5(0); & Z_x^0 = f_6(0). \end{cases}$$

Für eine ruhende Flüssigkeit aber ergibt die Erfahrung, daß sie sich so verhält, als ob sie wirklich gänzlich reibungslos wäre. Im Zustande der Ruhe müssen also für jede Flüssigkeit unsere alten Gleichungen gelten:

$$(9)\quad \begin{cases} X_x^0 = Y_y^0 = Z_z^0 = P = f_1(0) = f_2(0) = f_3(0), \\ X_y^0 = Y^0 \;= Z_x^0 = 0 \;= f_4(0) = f_5(0) = f_6(0). \end{cases}$$

Diese Gleichungen bestimmen die 6 Größen $f(0)$. Wir erhalten durch Einsetzen in (7):

$$(10)\quad \begin{cases} X_x = P + \frac{\partial f_1}{\partial \dot{x}_x}\dot{x}_x + \ldots; & X_y = \frac{\partial f_4}{\partial \dot{x}_x}\dot{x}_x + \ldots; \\ Y_y = P + \frac{\partial f_2}{\partial \dot{x}_x}\dot{x}_x + \ldots; & Y_z = \frac{\partial f_5}{\partial \dot{x}_x}\dot{x}_x + \ldots; \\ Z_z = P + \frac{\partial f_3}{\partial \dot{x}_x}\dot{x}_x + \ldots; & Z_x = \frac{\partial f_6}{\partial \dot{x}_x}\dot{x}_x + \ldots. \end{cases}$$

Setzen wir noch zur Abkürzung:

$$(11)\quad X_x - P = X_x'; \quad Y_y - P = Y_y'; \quad Z_z - P = Z_z',$$

so lehren die Gleichungen (10), daß die Größen X_x', Y_y', Z_z', X_y, Y_z, Z_x lineare homogene Funktionen der Komponenten der Deformationsgeschwindigkeit $\dot{x}_x$, $\dot{y}_y$, $\dot{z}_z$, $\dot{x}_y$, $\dot{y}_z$, $\dot{z}_x$ sind.

Es bleiben noch die 36 Koeffizienten der Gleichung (10) zu bestimmen. Wir tun das in der nämlichen Weise wie im XI. Kapitel bei dem analogen Problem, indem wir auch hier das Energieprinzip anwenden und seine Konsequenzen für die vorliegende Aufgabe verwerten. Das liefert eine Reduktion der 36 Konstanten auf nur 21. Beim Ansetzen des Energieprinzips ist hier zu berücksichtigen, daß die Reibungskräfte Wärme erzeugen. Bezeichnen wir die kinetische Energie mit L, die potentielle mit Φ, die von den äußeren Kräften geleistete Arbeit mit A, die erzeugte Wärme mit Q, so sagt das Energieprinzip aus, daß die pro Sekunde von den Kräften geleitete Arbeit $\frac{dA}{dt}$ gleich ist der Zunahme pro Zeiteinheit der lebendigen Kraft und der potentiellen Energie $\frac{dL}{dt} + \frac{d\Phi}{dt}$, vermehrt um die pro Sekunde erzeugte Wärme $\frac{dQ}{dt}$. Um die Rechnung möglichst zu vereinfachen, wollen wir annehmen, daß keine Massenkräfte auf die Flüssigkeit wirken; ferner

sei die Flüssigkeit inkompressibel. Dann ist $X = Y = Z = 0$, und ferner verschwindet die potentielle Energie Φ. Dann ist also:

(12) $$\frac{dA}{dt} = \frac{dL}{dt} + \frac{dQ}{dt}.$$

Die Arbeit $\frac{dA}{dt}$ wird nur von den Oberflächenkräften X_n, Y_n, Z_n geleistet und ist daher, wenn die Oberfläche des von der Flüssigkeit eingenommenen Raumes mit S bezeichnet wird:

(13) $$\frac{dA}{dt} = \int dS\{X_n u + Y_n v + Z_n w\}.$$

Die kinetische Energie ist

$$L = \int \frac{\varepsilon}{2}(u^2 + v^2 + w^2)\,d\tau.$$

Also die Zunahme pro Sekunde:

(14) $$\frac{dL}{dt} = \int \varepsilon \left\{u\frac{Du}{Dt} + v\frac{Dv}{Dt} + w\frac{Dw}{Dt}\right\} d\tau.$$

Wir haben also nach (12):

$$\int ds\{X_n u + Y_n v + Z_n w\} = \int \varepsilon\left(u\frac{Du}{Dt} + v\frac{Dv}{Dt} + w\frac{Dw}{Dt}\right)d\tau + \frac{dQ}{dt}.$$

Setzen wir nun in dieser Gleichung an Stelle von $\varepsilon\frac{Du}{Dt}$, ... die Werte aus den Bewegungsgleichungen (1) ein, wobei $X = Y = Z = 0$ genommen werden, so folgt:

(15) $$\left\{\begin{aligned} &\int dS\{X_n u + Y_n v + Z_n w\} \\ &= -\int\left[u\left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right) + v\left(\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z}\right)\right. \\ &\quad \left. + w\left(\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}\right)\right]d\tau + \frac{dQ}{dt}. \end{aligned}\right.$$

Auf der linken Seite wollen wir X_n, Y_n, Z_n durch die Werte nach Gleichung (8) ersetzen; dann folgt links:

(16) $$\left\{\begin{aligned} &\int dS\left\{\left(X_x\cos(nx) + X_y\cos(ny) + X_z\cos(nz)\right)u\right. \\ &\quad + \left(Y_x\cos(nx) + Y_y\cos(ny) + Y_z\cos(nz)\right)v \\ &\quad \left. + \left(Z_x\cos(nx) + Z_y\cos(ny) + Z_z\cos(nz)\right)z\right\}, \end{aligned}\right.$$

und hier wenden wir auf jedes Glied den Greenschen Satz an, demzufolge (16) wird:

$$(17)\quad \begin{cases} -\int d\tau \left\{\frac{\partial}{\partial x}(X_x u) + \frac{\partial}{\partial y}(X_y u) + \frac{\partial}{\partial z}(X_z u) \right. \\ \quad + \frac{\partial}{\partial x}(Y_x v) + \frac{\partial}{\partial y}(Y_y v) + \frac{\partial}{\partial z}(Y_z v) \\ \quad \left. + \frac{\partial}{\partial x}(Z_x w) + \frac{\partial}{\partial y}(Z_y w) + \frac{\partial}{\partial z}(Z_z w)\right\}. \end{cases}$$

Setzen wir nun (17) in die linke Seite von (15) ein, so vereinfacht sich diese Gleichung folgendermaßen:

$$\frac{dQ}{dt} = -\int d\tau \left\{X_x \frac{\partial u}{\partial x} + X_y \frac{\partial u}{\partial y} + X_z \frac{\partial u}{\partial z} + Y_x \frac{\partial v}{\partial x} + Y_y \frac{\partial v}{\partial y} + Y_z \frac{\partial v}{\partial z} \right.$$
$$\left. + Z_x \frac{\partial w}{\partial x} + Z_y \frac{\partial w}{\partial y} + Z_z \frac{\partial w}{\partial z}\right\},$$

oder, wenn man die Bezeichnungen $\frac{\partial u}{\partial x} = \dot{x}_x$ usw. einführt:

$$(18)\quad \frac{dQ}{dt} = -\int d\tau \{X_x \cdot \dot{x}_x + Y_y \cdot \dot{y}_y + Z_z \cdot \dot{z}_z + X_y \cdot \dot{x}_y + Y_z \cdot \dot{y}_z + Z_x \cdot \dot{z}_x\}.$$

Setzen wir darin noch nach (11) $X_x = X_x' + P$ usw., so kann man (18) schreiben:

$$(19)\quad \begin{cases} \frac{dQ}{dt} = -\int d\tau\, P(\dot{x}_x + \dot{y}_y + \dot{z}_z) \\ \qquad -\int d\tau \{X_x' \cdot \dot{x}_x + Y_y' \cdot \dot{y}_y + Z_z' \cdot \dot{z}_z + X_y \cdot \dot{x}_y + Y_z \cdot \dot{y}_z + Z_x \cdot \dot{z}_x\}. \end{cases}$$

Da aber die Flüssigkeit inkompressibel ist, so ist der Ausdruck $\dot{x}_x + \dot{y}_y + \dot{z}_z \equiv \Sigma = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$; also folgt weiter:

$$(20)\quad \frac{dQ}{dt} = -\int d\tau \{X_x' \cdot \dot{x}_x + Y_y' \cdot \dot{y}_y + Z_z' \cdot \dot{z}_z + X_y \cdot \dot{x}_y + Y_z \cdot \dot{y}_z + Z_x \cdot \dot{z}_x\}.$$

Darin sind die Größen $X_x', \ldots Z_x$ lineare homogene Funktionen von $\dot{x}_x$ bis $\dot{z}_x$. Der Klammerausdruck ist also eine homogene quadratische Funktion der Komponenten der Deformationsgeschwindigkeit $\dot{x}_x \ldots \dot{y}_z$. Nun ist die durch Reibung erzeugte Wärme stets positiv; nennen wir daher den negativen Klammerausdruck auf der rechten Seite $f(\dot{x}_x, \dot{y}_y, \ldots \dot{z}_x)$, so ist nach (20):

$$(21)\quad \frac{dQ}{dt} = \int f\, d\tau.$$

Nach dem Eulerschen Theorem über homogene Funktionen besteht aber die Gleichung:

$$(22)\quad 2f = \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_x}\dot{x}_x + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_y}\dot{y}_y + \frac{\partial f}{\partial \dot{z}_z}\dot{z}_z + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_y}\dot{x}_y + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_z}\dot{y}_z + \frac{\partial f}{\partial \dot{z}_x}\dot{z}_x;$$

also wird (21):

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{2}\int d\tau \left\{\frac{\partial f}{\partial \dot{x}_x}\dot{x}_x + \cdots\cdots\right\},$$

und durch Vergleich mit (20) folgt unter Berücksichtigung von (11):

$$
(23)\qquad \begin{cases}
X_x = P - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial \dot{x}_x}; & X_y = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial \dot{x}_y};\\
Y_y = P - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial \dot{y}_y}; & Y_z = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial \dot{y}_z};\\
Z_z = P - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial \dot{z}_z}; & Z_x = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial \dot{z}_x}.
\end{cases}
$$

Da eine homogene quadratische Funktion von 6 Variabeln 21 Koeffizienten besitzt, so stecken diese sämtlich in (23) drin; aber da die Flüssigkeit ein **i s o t r o p e r K ö r p e r** ist, so können wir wieder die nämlichen Symmetriebetrachtungen anstellen, wie bei dem elastischen Potential in Nummer 114 und erhalten schließlich analog der Gleichung (42) des XI. Kapitels (pag. 512), wenn λ' und μ' Konstanten sind:

$$
f = \frac{1}{2}\lambda'(\dot{x}_x + \dot{y}_y + \dot{z}_z)^2 + \mu'\left(\dot{x}_x^2 + \dot{y}_y^2 + \dot{z}_z^2 + \frac{1}{2}\dot{y}_z^2 + \frac{1}{2}\dot{z}_x^2 + \frac{1}{2}\dot{x}_y^2\right).
$$

Wegen der Inkompressibilität verschwindet das erste Glied; ersetzen wir ferner den Buchstaben μ', um Verwechselungen mit dem Torsionsmodul vorzubeugen, durch $2k$, so ist:

$$
(24)\qquad f = 2k\left\{\dot{x}_x^2 + \dot{y}_y^2 + \dot{z}_z^2 + \frac{1}{2}\left(\dot{y}_z^2 + \dot{z}_x^2 + \dot{x}_y^2\right)\right\}.
$$

Demnach sind die Spannungskomponenten nach (23):

$$
(25)\qquad \begin{cases}
X_x = P - 2k\dfrac{\partial u}{\partial x}; & Y_z = -k\left(\dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\right);\\
Y_y = P - 2k\dfrac{\partial v}{\partial y}; & Z_x = -k\left(\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\right);\\
Z_z = P - 2k\dfrac{\partial w}{\partial z}; & X_y = -k\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right).
\end{cases}
$$

Setzen wir diese Ausdrücke in (1) ein, so erhalten wir die folgenden, zuerst von **N a v i e r**, später von **S t o k e s** aufgestellten hydrodynamischen Gleichungen für reibende inkompressible Flüssigkeiten:

$$
(26)\qquad \begin{cases}
\varepsilon\left(X - \dfrac{Du}{Dt}\right) = \dfrac{\partial P}{\partial x} - k\,\Delta u,\\
\varepsilon\left(Y - \dfrac{Dv}{Dt}\right) = \dfrac{\partial P}{\partial y} - k\,\Delta v,\\
\varepsilon\left(Z - \dfrac{Dw}{Dt}\right) = \dfrac{\partial P}{\partial z} - k\,\Delta w,
\end{cases}
$$

wozu noch die Bedingung der Inkompressibilität:

$$
(26\text{a})\qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0
$$

hinzutritt.

Die Größe k nennt man den „Reibungskoeffizienten" oder genauer den „Koeffizienten der inneren Reibung", zum Unterschiede von der in der nächsten Nummer zu besprechenden „äußeren Reibung". Denkt man sich Gleichung (26) durch ε durchdividiert, so tritt rechts der Ausdruck $\frac{k}{\varepsilon}$ auf. Von diesem Verhältnis hängt der Verlauf der Erscheinungen ab. Diese Größe ist daher von Maxwell mit einer besonderen Bezeichnung belegt worden: „kinematischer Reibungskoeffizient".

Aus (25) ist zu entnehmen, daß $2k\frac{\partial u}{\partial x}$ die Dimension eines Druckes, nämlich $[ML^{-1}T^{-2}]$, hat. Da $\frac{\partial u}{\partial x}$ die Dimension $[T^{-1}]$ hat, so findet man für den Reibungskoeffizienten k die Dimension:

$$[k] = [ML^{-1}T^{-1}]. \tag{27}$$

194. Oberflächenbedingungen.

Zu den Gleichungen (26) treten noch Bedingungen für die Oberflächen hinzu, d. h. für diejenigen Flächen, in denen die Flüssigkeit an andere (feste oder flüssige) Körper angrenzt. Eine dieser Bedingungen kann sofort angegeben werden auf Grund der nämlichen Erwägungen, die in Nummer 172 angestellt wurden: Die Normalkomponenten der Geschwindigkeiten zu beiden Seiten der Fläche müssen gleich sein. Nennen wir die nach dem Innern der betrachteten Flüssigkeit gezogene Normale n, die Geschwindigkeitskomponenten zu beiden Seiten der Oberfläche resp. $u_1, u_2, v_1, v_2, w_1, w_2$, so muß sein:

$$u_1 \cos(nx) + v_1 \cos(ny) + w_1 \cos(nz) = u_2 \cos(nx) + v_2 \cos(ny) + w_2 \cos(nz),$$

was auch in der Form geschrieben werden kann:

$$\left\{ \begin{aligned} (\mathfrak{c}_1)_n - (\mathfrak{c}_2)_n \equiv (u_1 - u_2) \cos(ux) + (v_1 - v_2) \cos(ny) \\ + (w_1 - w_2) \cos(nz) = 0. \end{aligned} \right. \tag{28}$$

Diese Gleichung kann etwas anders interpretiert werden, was im folgenden benutzt wird. $u_1 - u_2$, $v_1 - v_2$, $w_1 - w_2$ sind offenbar die Komponenten der relativen Geschwindigkeit zweier Teilchen zu beiden Seiten der Oberfläche. Bedenkt man, daß diese Größen gleichzeitig proportional den Richtungskosinussen der relativen Geschwindigkeit sind, so ist (28) nichts anderes als die Orthogonalitätsbedingung für die Richtung der Normale n und der relativen Geschwindigkeit. Diese letztere ist also parallel der Fläche gerichtet.

Ferner läßt sich leicht zeigen, daß die Größen X_n, Y_n, Z_n stetig durch die Trennungsfläche hindurchgehen müssen. Denn wenn wir die Gleichung (1) mit $d\tau$ multiplizieren und über ein unendlich

kleines Gebiet integrieren, das zu beiden Seiten der Trennungsfläche liegt, so ist z. B. für die erste Gleichung (1):

$$\int \varepsilon \left(X - \frac{Du}{Dt}\right) d\tau = \int \frac{\partial X_x}{\partial x} d\tau + \int \frac{\partial X_y}{\partial y} d\tau + \int \frac{\partial X_z}{\partial z} d\tau \cdot$$

Wendet man auf die rechte Seite den Greenschen Satz an, so ist nach den Gleichungen (3):

$$\int \varepsilon \left(X - \frac{Du}{Dt}\right) d\tau = -\int X_n dS;$$

wo n die innere Normale des unendlich kleinen Raumes τ bedeutet. Unter diesen Umständen ist das Volumintegral links unendlich klein von höherer Ordnung, und es folgt:

$$\int X_n dS = 0 \cdot$$

Nun soll der Raum τ zu beiden Seiten der Trennungsfläche liegen, etwa wie die Fig. 239 andeutet:

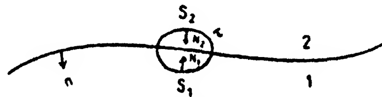


Fig. 239.

Bezeichnet man die aneinanderstoßenden Medien durch die Indices 1 und 2, so kann die letztere Gleichung ausführlicher geschrieben werden — das Integralzeichen darf fortgelassen werden, da die Oberfläche unendlich klein ist —:

$$X_{N_1} dS_1 + X_{N_2} dS_2 = 0 \,,$$

oder da $dS_1 = dS_2$ bis auf Größen höherer Ordnung ist:

$$X_{N_1} + X_{N_2} = 0 \,.$$

Beachtet man, daß die Normale N_1 der Normale n der Trennungsfläche entgegengerichtet, N_2 dagegen mit ihr gleichgerichtet ist, so kann man mit Hilfe der Normale n die letzte Gleichung auch schreiben:

(29) $$(X_n)_1 = (X_n)_2 \,,$$

wie zu beweisen war. Das gleiche gilt natürlich für Y_n und Z_n.

Diese Bedingungen reichen jedoch noch nicht aus, um die Bewegungen der Flüssigkeit völlig zu bestimmen. Die noch fehlende Bedingung kann vermittels einer Hypothese gewonnen werden, über deren Zulässigkeit natürlich nur die Erfahrung entscheiden kann. Die Kraft K_n, die auf ein Flächenelement dS mit der Normalrichtung n wirkt, hat die Kompo-

nenten X_n, Y_n, Z_n. Wir zerlegen sie in eine normale und in eine tangentielle Komponente. Die normale Komponente ist leicht zu bestimmen. Zunächst ist offenbar, wenn der obere Index (n) die Komponente nach der Normale bedeutet:

$$K_n^{(n)} = K_n \cos(n, K_n);$$

anderseits ist nach Definition der X_n, Y_n, Z_n:

$$X_n = K_n \cos(K_n, x),$$
$$Y_n = K_n \cos(K_n, y),$$
$$Z_n = K_n \cos(K_n, z).$$

Multipliziert man diese Gleichungen der Reihe nach mit $\cos(nx)$, $\cos(ny)$, $\cos(nz)$ und addiert, so folgt:

$$\begin{aligned} X_n \cos(nx) + Y_n \cos(ny) + Z_n \cos(nz) \\ = K_n\{\cos(K_n, x)\cos(nx) + \cos(K_n, y)\cos(ny) + \cos(K_n, z)\cos(nz)\} \\ = K_n \cos(K_n, n) = K_n^{(n)}. \end{aligned}$$

Also ist die linke Seite die gesuchte Normalkomponente der Kraft K_n. Multipliziert man diese Normalkomponente mit resp. $\cos(nx)$, $\cos(ny)$, $\cos(nz)$, so liefern die entstehenden Ausdrücke die Komponenten der Normalkomponente nach den Koordinaten, und zieht man diese letzteren Ausdrücke von resp. X_n, Y_n, Z_n, d. h. den Komponenten der gesamten Kraft K_n ab, so bilden die drei erhaltenen Differenzen die Komponenten der Tangentialkomponente $K_n^{(t)}$. Nun hatten wir aus (28) geschlossen, daß die relative Geschwindigkeit tangential zum Flächenelement dS steht. Ist dieselbe von Null verschieden, so gleiten hier Teilchen unter Reibung aneinander vorbei, die verschiedenen Substanzen angehören, während bei den bisher besprochenen Reibungsvorgängen nur Teilchen eines und desselben Körpers aneinander vorbeiglitten. Man nennt diesen Vorgang zum Unterschiede daher „äußere Reibung". Die Teilchen üben Kräfte aufeinander aus, die wir proportional ihrer Relativgeschwindigkeit annehmen. Dieser Kraft muß durch die tangentielle Komponente $K_n^{(t)}$ der Oberflächenkraft K_n das Gleichgewicht gehalten werden. Bezeichnen wir eine zweite Reibungskonstante mit k_2, die sogenannte „Konstante der äußeren Reibung", so haben wir folgende Bedingungen:

$$(30)\quad \begin{cases} X_n - \{X_n \cos(nx) + Y_n \cos(ny) + Z_n \cos(nz)\}\cos(nx) = k_2(u_1 - u_2), \\ Y_n - \{X_n \cos(nx) + Y_n \cos(ny) + Z_n \cos(nz)\}\cos(ny) = k_2(v_1 - v_2), \\ Z_n - \{X_n \cos(nx) + Y_n \cos(ny) + Z_n \cos(nz)\}\cos(nz) = k_2(w_1 - w_2). \end{cases}$$

In weitaus den meisten Fällen hat es sich gezeigt, daß man k_2 als unendlich groß annehmen kann. Gibt man dies zu, so folgt aus (30) spezieller:

$$(31)\quad u_1 = u_2; \quad v_1 = v_2; \quad w_1 = w_2;$$

d. h. zu beiden Seiten der Oberfläche befindliche Teilchen haben keine relative Geschwindigkeit zueinander, sie haften also aneinander fest. Sind im speziellen Fall die außerhalb der Fläche befindlichen Teilchen in Ruhe ($u_2 = v_2 = w_2 = 0$), so müssen die innerhalb es ebenfalls sein. Wir werden im folgenden stets die Voraussetzung unendlich großer äußerer Reibung machen.

195. Allgemeine Folgerungen.

Die Gleichungen (26) lassen sich zunächst in eine andere Form bringen, die aufs deutlichste den innigen Zusammenhang zwischen der Entstehung von Wirbelbewegungen und der Reibung zeigt. Schreibt man die substantiellen Differentialquotienten ausführlich, so lauten die Bewegungsgleichungen einer zähen Flüssigkeit:

$$
(32)\quad \left\{
\begin{aligned}
\varepsilon\left\{\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right\} &= \varepsilon X - \frac{\partial P}{\partial x} + k\Delta u,\\
\varepsilon\left\{\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right\} &= \varepsilon Y - \frac{\partial P}{\partial y} + k\Delta v,\\
\varepsilon\left\{\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right\} &= \varepsilon Z - \frac{\partial P}{\partial z} + k\Delta w.
\end{aligned}\right.
$$

Nun besteht, wie man leicht sieht, gemäß der Definition der Komponenten der Wirbelgeschwindigkeit, folgende Identität:

$$
v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = 2qw - 2rv + v\frac{\partial v}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial x},
$$

der sich noch zwei analoge anschließen. Setzt man diese in (32) ein so folgt:

$$
(33)\quad \left\{
\begin{aligned}
\varepsilon\left\{\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial x} + 2qw - 2rv\right\}&\\
= \varepsilon X - \frac{\partial P}{\partial x} + k\Delta u&,\\
\varepsilon\left\{\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial y} + 2ru - 2pw\right\}&\\
= \varepsilon Y - \frac{\partial P}{\partial y} + k\Delta v&,\\
\varepsilon\left\{\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial z} + v\frac{\partial v}{\partial z} + w\frac{\partial w}{\partial z} + 2pv - 2qu\right\}&\\
= \varepsilon Z - \frac{\partial P}{\partial z} + k\Delta w&.
\end{aligned}\right.
$$

Nehmen wir nun an, daß die äußeren Kräfte X, Y, Z sich aus einem Potential Ω ableiten, und führen wir die Funktion $U = \frac{P}{\varepsilon}$ wieder ein, so können diese Gleichungen geschrieben werden:

$$
(34)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} + 2\dot{q}w - 2\dot{r}v = -\frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{k}{s}\Delta u,\\
&\frac{\partial v}{\partial t} + 2\dot{r}u - 2\dot{p}w = -\frac{\partial \chi}{\partial y} + \frac{k}{s}\Delta v,\\
&\frac{\partial w}{\partial t} + 2\dot{p}v - 2\dot{q}u = -\frac{\partial \chi}{\partial z} + \frac{k}{s}\Delta w,
\end{aligned}
\right.
$$

wobei χ definiert ist durch:

$$
(35)\qquad \chi = \Omega + U + \tfrac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2).
$$

Differentiiert man die erste Gleichung (34) nach y, die zweite nach x und subtrahiert, so fällt χ heraus und man erhält die folgende Gleichung, wenn man berücksichtigt, daß $\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = -2\dot{r}$ ist:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \dot{r}}{\partial t} - \frac{\partial \dot{q}}{\partial y}w - \dot{q}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial \dot{r}}{\partial y}v + \frac{\partial v}{\partial y}\dot{r} + \frac{\partial \dot{r}}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial x}\dot{r}&\\
- \frac{\partial \dot{p}}{\partial x}w - \frac{\partial w}{\partial x}\dot{p} &= \frac{k}{s}\Delta \dot{r},
\end{aligned}
$$

und durch entsprechende Behandlung der übrigen Gleichungen (34) zwei analoge. Diese sind großer Vereinfachung fähig, wenn man die beiden Gleichungen berücksichtigt:

$$
(36)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,\\
&\frac{\partial \dot{p}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{q}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{r}}{\partial z} = 0;
\end{aligned}
\right.
$$

z. B. wird die letzte Gleichung nacheinander:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \dot{r}}{\partial t} + u\frac{\partial \dot{r}}{\partial x} + v\frac{\partial \dot{r}}{\partial y} - w\left(\frac{\partial \dot{p}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{q}}{\partial y}\right) - \left(\dot{p}\frac{\partial w}{\partial x} + \dot{q}\frac{\partial w}{\partial y}\right)&\\
+ \dot{r}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) &= \frac{k}{s}\Delta \dot{r},
\end{aligned}
$$

oder:

$$
\frac{\partial \dot{r}}{\partial t} + u\frac{\partial \dot{r}}{\partial x} + v\frac{\partial \dot{r}}{\partial y} + w\frac{\partial \dot{r}}{\partial z} = \dot{p}\frac{\partial w}{\partial x} + \dot{q}\frac{\partial w}{\partial y} + \dot{r}\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{k}{s}\Delta \dot{r}.
$$

Zwei analoge Gleichungen erhält man durch zyklische Vertauschung, denen man schließlich durch Einführung des Symbols $\frac{D}{Dt}$ der substantiellen Differentiation folgende Form geben kann:

$$
(37)\qquad \left\{
\begin{aligned}
\frac{D\dot{p}}{Dt} &= \dot{p}\frac{\partial u}{\partial x} + \dot{q}\frac{\partial u}{\partial y} + \dot{r}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{k}{s}\Delta \dot{p},\\
\frac{D\dot{q}}{Dt} &= \dot{p}\frac{\partial v}{\partial x} + \dot{q}\frac{\partial v}{\partial y} + \dot{r}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{k}{s}\Delta \dot{q},\\
\frac{D\dot{r}}{Dt} &= \dot{p}\frac{\partial w}{\partial x} + \dot{q}\frac{\partial w}{\partial y} + \dot{r}\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{k}{s}\Delta \dot{r}.
\end{aligned}
\right.
$$

Die Änderung der Rotationsgeschwindigkeit eines identischen Teilchens setzt sich nach diesen Gleichungen aus zwei Teilen zusammen, die wir mit $\frac{D_1}{Dt}$ und $\frac{D_2}{Dt}$ bezeichnen wollen. Unter $\frac{D_1}{Dt}$ verstehen wir:

$$(38)\quad \begin{cases} \frac{D_1 p}{Dt} = p\frac{\partial u}{\partial x} + q\frac{\partial u}{\partial y} + r\frac{\partial u}{\partial z}, \\ \frac{D_1 q}{Dt} = p\frac{\partial v}{\partial x} + q\frac{\partial v}{\partial y} + r\frac{\partial v}{\partial z}, \\ \frac{D_1 r}{Dt} = p\frac{\partial w}{\partial x} + q\frac{\partial w}{\partial y} + r\frac{\partial w}{\partial z}, \end{cases}$$

und unter $\frac{D_2}{Dt}$:

$$(39)\quad \frac{D_2 p}{Dt} = \frac{k}{\varepsilon}\Delta p, \quad \frac{D_2 q}{Dt} = \frac{k}{\varepsilon}\Delta q, \quad \frac{D_2 r}{Dt} = \frac{k}{\varepsilon}\Delta r.$$

Die Gleichungen (38) liefern die Zunahme der Rotationsgeschwindigkeit in einer reibungslosen Flüssigkeit, die Gleichungen (39) diejenige, die infolge der Reibung hinzukommt. Denn die Gleichungen (38) sind äquivalent denjenigen, aus denen im vorhergehenden Kapitel die Konstanz der Wirbelintensität gefolgert wurde. Für reibende Flüssigkeiten kann offenbar dieser Satz im allgemeinen nicht mehr gelten. Vielmehr ist das Entstehen und Vergehen von Wirbeln gerade auf die Reibung zurückzuführen. Nur in speziellen Fällen kann der Einfluß der Reibung allgemein verschwinden. Dies ist nach (26) offenbar der Fall, wenn:

$$(40)\quad \Delta u = \Delta v = \Delta w = 0.$$

Dagegen verschwindet der Einfluß der Reibung auf die Wirbelbewegung nach (37) und (39) bereits dann, wenn die Bedingung erfüllt ist:

$$(41)\quad \Delta p = \Delta q = \Delta r = 0.$$

Sind die Bedingungen (40) erfüllt, so sind natürlich auch die Gleichungen (41) befriedigt; aber das Umgekehrte braucht nicht der Fall zu sein.

196. Parallelströmung durch ein zylindrisches Rohr; Poiseuilles Gesetz.

Wegen ihrer komplizierten Natur sind die Gleichungen (26) nur in wenigen Fällen bisher integriert worden. Wir besprechen einige derselben, die entweder für die experimentelle Bestimmung der Reibungskonstanten oder für die Theorie von hervorragendem Interesse sind. Einer der einfachsten Fälle ist der folgende: Durch ein kreiszylindrisches Rohr ströme stationär Flüssigkeit hindurch; wir wollen annehmen, daß die Geschwindigkeit parallel der Achse des Zylinders sei; lassen wir die vertikale z-Achse, deren positive Richtung wir von unten nach oben nehmen, mit der Zylinderachse zusammenfallen, so heißt das, daß $u = v = 0$ sein sollen. Dann folgt aus der Inkompressibilitätsbedingung,

daß auch $\frac{\partial w}{\partial z} = 0$ sein muß; w ist also nur Funktion von x und y. Diese Forderung wollen wir noch dahin spezialisieren, daß w nur Funktion des Abstandes R des betreffenden Flüssigkeitsteilchens von der z-Achse sein soll. Nach dieser Annahme herrscht also axiale Symmetrie. Von äußeren Kräften wirke nur die Schwerkraft; wegen der bereits getroffenen Festsetzungen ist dann $X = Y = 0$, $Z = -g$.

Aus den Gleichungen (26) folgt dann zunächst $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 0$, und

(42) $$-g = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{k}{\varepsilon}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right).$$

Nun folgt, wenn die drei unverkürzten Gleichungen (26), in denen nur $X = Y = 0$, $Z = -g$ gesetzt ist, der Reihe nach nach x, y, z differentiiert werden und die Inkompressibilitätsbedingung berücksichtigt wird:

(43) $$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0,$$

die sich hier auf $\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0$ mit dem Integral

(44) $$P = az + b \quad (a,\ b \text{ Integrationskonstanten})$$

reduziert. Damit folgt aus (42), wenn A eine abkürzende Konstante ist:

(45) $$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial y^2} = \frac{\varepsilon}{k} g + \frac{a}{k} = A,$$

oder, wenn jetzt die Annahme achsialer Symmetrie eingeführt wird:

(46) $$\frac{d^2 w}{d R^2} + \frac{1}{R} \frac{d w}{d R} = \frac{1}{R} \frac{d}{d R}\left(R \frac{d w}{d R}\right) = A,$$

die das Integral hat:

(47) $$w = \frac{A}{4} R^2 + B \log R + C.$$

Da in der Achse ($R = 0$) w endlich bleiben muß, folgt einfacher mit $B = 0$:

(48) $$w = \frac{A}{4} R^2 + C,$$

wobei C durch die am Rande der Röhre, wo R den Wert R_1 annehmen möge, bestehenden Bedingungen zu bestimmen ist. Wir wollen hier ausnahmsweise die allgemeineren Bedingungen (30) zugrunde legen, indem wir einen endlichen Koeffizienten der äußeren Reibung k_2 annehmen; da die Röhrenwand in Ruhe ist, so ist $u_2 = v_2 = w_2 = 0$, ebenso nach den Bedingungen der Aufgabe $u_1 = v_1 = 0$. Ferner ist, da die Zylinderachse parallel der z-Richtung ist, $\cos(nz) = 0$; dann liefert die letzte Gleichung (30):

(49) $$Z_n = k_2 w_1,$$

wenn w_1 die Geschwindigkeit für $R = R_1$ an der Röhrenwand bedeutet. Nach Gleichung (8) und (25) ist aber mit (49) gleichbedeutend die Gleichung:

$$Z_x \cos(n x) + Z_y \cos(n y) = -k\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\cos(n x) + \frac{\partial w_1}{\partial y}\cos(n y)\right) = k_2 w_1 ,$$

oder auch, da die Richtung von n mit derjenigen von R zusammenfällt:

(50) $$\frac{d w_1}{d R} = -\frac{k_2}{k} w_1 .$$

Bildet man nach (48) $\left(\frac{d w}{d R}\right)_{R=R_1}$, so ist nach (50):

$$\left(\frac{d w}{d R}\right)_{R=R_1} = \frac{A}{2} R_1 = -\frac{k_2}{k} w_1 ,$$

und unter nochmaliger Benutzung von (48):

$$-\frac{k A}{2 k_2} R_1 = \frac{A}{4} R_1^2 + C .$$

Also ist die Konstante C endlich:

(51) $$C = -\frac{A}{4} R_1^2 - \frac{k A}{2 k_2} R_1 .$$

Demnach ist die Lösung nach (48) und (51):

(52) $$w = \frac{A}{4}(R^2 - R_1^2) - \frac{k A}{2 k_2} R_1 .$$

Für konstantes R ist also auch w konstant. Die Flüssigkeit zerfällt demnach in zylindrische Schichten konstanter Geschwindigkeit. Diese Art von Bewegung nennt man deshalb „Laminarbewegung". Man kann die Formel (52) einer genauen Prüfung dadurch unterwerfen, daß man das während einer bestimmten Zeit, etwa einer Sekunde, ausgeflossene Volumen Q bestimmt. Durch einen Kreisring von der Breite dR fließt pro Sekunde das Quantum $dQ = 2\pi w R\, dR$, also durch den ganzen Zylinder:

(53) $$Q = 2\pi \int_0^{R_1} w R\, d R ,$$

was nach (52) gibt:

(54) $$Q = -\frac{\pi A R_1^4}{8}\left\{1 + \frac{4 k}{k_2}\frac{1}{R_1}\right\} .$$

Nun wollen wir noch nach (45) den Wert von A durch experimentell bestimmbare Größen ersetzen. Nach (44) ist $a = \frac{\partial P}{\partial z}$ gleich dem Druckgradienten; also wenn wir den Druck zu Anfang des Zylinders mit P_1, am Ende durch P_2, und die Länge des Rohres durch l bezeichnen, so ist:

(55) $$a = -\frac{P_1 - P_2}{l},$$

und folglich A:

(56) $$A = -\frac{P_1 - P_2}{k\,l} + \frac{\varepsilon}{k} g.$$

Damit wird Gleichung (54):

(57) $$Q = \frac{\pi R_1^4}{8k}\left(1 + \frac{4k}{k_2}\frac{1}{R_1}\right)\left(\frac{P_1 - P_2}{l} - \varepsilon g\right).$$

In vielen Fällen kann man εg gegen $\frac{P_1 - P_2}{l}$ vernachlässigen, oder auch durch Horizontallegen der Röhre die Schwerkraft direkt ausschließen. Dann hat man statt (57):

(58) $$Q = \frac{\pi R_1^4 (P_1 - P_2)}{8\,k\,l}\left(1 - \frac{4k_2}{k_2}\frac{1}{R_1}\right).$$

Poiseuille hat nun in seinen Versuchen sehr genau das Gesetz bestätigt gefunden, das man aus (58) erhält, wenn man $k_2 = \infty$ setzt, d. h. er fand die Gleichung:

(59) $$Q = \frac{\pi R_1^4 (P_1 - P_2)}{8\,k\,l},$$

die nach ihm als das Poiseuillesche Gesetz benannt wird. Er fand namentlich bis zu sehr kleinen Werten R (etwa $= 1/_{1000}$ cm) des Röhrenhalbmessers Proportionalität von Q mit der vierten Potenz von R, wie es das abgekürzte Gesetz (59) verlangt. Würde k_2 einen endlichen Wert haben, so müßte das zweite Glied in (58) sich bemerkbar machen, was bei Flüssigkeiten nie beobachtet worden ist.[1]) Deshalb rechtfertigen die Versuche Poiseuilles die Annahme, daß bei Flüssigkeiten der Koeffizient der äußeren Reibung unendlich groß sei. An Stelle der Gleichung (30) tritt daher die einfachere Grenzbedingung mit $k_2 = \infty$. Nachdem dies festgestellt ist, bietet diese Poiseuillesche „Transpirationsmethode" das bequemste Mittel, um die Reibungskonstante k zu bestimmen. Die Tabelle (s. pag. 886) gibt in absoluten Einheiten eine Übersicht über die wichtigsten Resultate.

Es sei aber gleich hier bemerkt, daß das Poiseuillesche Gesetz bei gegebener Flüssigkeit und gegebener Kapillare nur so lange gilt, als die Geschwindigkeit unterhalb eines „kritischen" Wertes bleibt. Auf diese Abweichung kommen wir in Nummer 201 eingehend zurück.

---

[1]) Die einzige entgegenstehende Beobachtung von Helmholtz und Piotrowski ist nach einer neueren Nachprüfung durch R. Ladenburg (Ann. d. Phys. 27, pag. 157, 1908) als nicht beweisend anzusehen.

Stoff	k in gr cm^{-1} sec^{-1}	Temperatur
Quecksilber	0,016421	17° C
Wasser	0,01808	0
„	0,01008	20
„	0,00285	100
Methylalkohol	0,00813	0
Äthylalkohol	0,01770	0
Äthyläther	0,00286	0
Aldehyd	0,00267	0
Schwefelkohlenstoff	0,00429	0
Benzol	0,00902	0
Argon	0,0002104	0
Helium	0,0001891	0
Luft	0,0001733	0
Wasserstoff	0,0000857	0

Wir wollen jetzt noch etwas genauer den Bewegungszustand der Flüssigkeit untersuchen. Die Geschwindigkeitskomponenten sind, wenn wir in (52) $k_2 = \infty$ setzen:

(60) $$u = 0, \quad v = 0, \quad w = \frac{A}{4}\left(x^2 + y^2 - R_1^2\right).$$

Daraus folgt sofort, daß die Bewegung eine Wirbelbewegung ist. Denn es ist:

(61) $$\begin{cases} 2p = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{A}{2} y, \\ 2q = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{A}{2} x, \\ 2r = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Die resultierende Wirbelgeschwindigkeit ω ist also:

(62) $$\omega = \sqrt{p^2 + q^2} = \frac{A}{4} R,$$

sie nimmt also proportional mit dem Abstand von der Zylinderachse zu und erreicht den größten Wert am Rande ($R = R_1$), wo die Geschwindigkeit selbst gleich Null wird. Als Gleichung der Rotationsachse ergibt sich:

$$p : q = dx : dy = y : -x,$$

oder:

$$x^2 + y^2 = \text{Const.}$$

Die Wirbelachsen sind also **konzentrische Kreise** um die z-Achse. Die Rotation geht derartig vor sich, daß das rotierende Teilchen auf der Innenseite sich so bewegt, wie die Flüssigkeit strömt, dagegen auf

der Außenseite entgegengesetzt. Fig. 240, die einen Querschnitt durch die Rohrachse darstellt, soll dies erläutern:

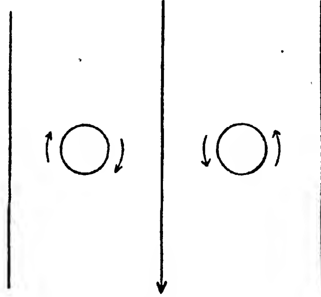


Fig. 240.

Von Interesse ist es noch, die Größe der Rotationsgeschwindigkeit in einem experimentell realisierbaren Falle zu bestimmen. Bei einem Versuche Poiseuilles war:

$$R_1 \cong 0{,}002\,\text{cm}; \quad l \cong 2{,}5\,\text{cm}; \quad P_1 - P_2 = 1\,\text{Atm.} \cong 10^6 \frac{\text{dyn}}{\text{cm}^2}.$$

Setzen wir in (62) für A den Wert aus (56), wobei $\frac{\varepsilon g}{k}$ vernachlässigt werden soll, so ist:

$$(63) \qquad \omega = \frac{P_1 - P_2}{4\,k\,l}.$$

Nehmen wir für Wasser $k \cong 0{,}01$, so ist:

$$\omega = \frac{10^6}{0{,}04 \cdot 2{,}5} R = 10^7 \cdot R\,\text{sec}^{-1}.$$

Nehmen wir für R den Wert 0,001, also in der Mitte zwischen der Achse und dem Rande, so ist:

$$\omega_{R=0{,}001} = 10^5\,\text{sec}^{-1}.$$

Dem entspricht die ungeheure Umlaufszahl $\frac{10^5}{2\pi}$ pro Sekunde.

Bei einem Rohre vom Radius 0,1 cm, 10 cm Länge und einer Druckdifferenz von etwa 0,04 Atmosphären würde man analog erhalten:

$$\omega = 10^5 R\,\text{sec}^{-1},$$

also am Rande ($R = 0{,}1$ cm):

$$\omega_{R=0{,}1} = 10^4\,\text{sec}^{-1},$$

was einer Umdrehungszahl von $\frac{10^4}{2\pi}$ pro Sekunde entspricht.

197. Stationäre Bewegung einer Kugel in einer reibenden Flüssigkeit.

Wir wollen jetzt den Fall behandeln, daß eine Kugel vom Radius R_1 sich mit der gleichförmigen Geschwindigkeit $-a$ in einer unendlich ausgedehnten Flüssigkeit bewegt. Dieser Aufgabe ist kinematisch gleichwertig — nämlich durch eine gleichmäßige Translation des Koordinatensystems mit der Flüssigkeit daraus hervorgehend — die andere, daß in eine in Parallelströmung von der Geschwindigkeit $+a$ begriffene Flüssigkeit die Kugel eingetaucht ist und durch geeignete Kräfte festgehalten wird. Wir legen den Koordinatenanfangspunkt in den Mittelpunkt der Kugel; die ungestörte Flüssigkeitsbewegung sei eine Parallelströmung parallel der z-Achse. Dieser Zustand wird in der Umgebung der Kugel gestört, aber im Unendlichen muß er sich wieder herstellen, so daß wir haben:

$$u_\infty = v_\infty = 0\,; \quad w_\infty = +a. \tag{64}$$

An der Oberfläche der Kugel wird die äußere Reibung auf Grund der in der vorigen Nummer besprochenen Versuche als unendlich angenommen: mithin gilt, wenn wir den Radiusvektor R einführen:

$$\text{für } R = R_1: \quad u = v = w = 0. \tag{65}$$

Endlich nehmen wir an, daß die Strömungsgeschwindigkeiten so klein sind, daß die quadratischen Glieder in den hydrodynamischen Gleichungen vernachlässigt werden können; ferner sollen auf die Flüssigkeit keine äußeren Kräfte wirken ($X = Y = Z = 0$).

Dann lauten die Bewegungsgleichungen nach (26) nebst Inkompressibilitätsbedingung:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= k\,\Delta u, \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= k\,\Delta v, \\ \frac{\partial P}{\partial z} &= k\,\Delta w, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &+ \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \end{aligned}\right. \tag{66}$$

Differentiiert man die drei Bewegungsgleichungen der Reihe nach nach x, y, z und addiert, so ist mit Rücksicht auf die vierte Gleichung:

$$\Delta P = 0. \tag{67}$$

Der Druck P ist gemäß dieser Gleichung zu bestimmen. Integrale der Laplaceschen Gleichung haben wir schon früher ausführlich besprochen; ein sehr wichtiges ist bekanntlich die Funktion $\frac{1}{R}$, welche der Gleichung (67) überall mit Ausnahme des Nullpunktes genügt. Dieses Integral würde völlige Symmetrie rings um den Punkt Null herum liefern.

was aber in unserem Falle, in dem die z-Richtung ausgezeichnet ist, da die ungestörte Flüssigkeitsbewegung parallel dieser Achse sein soll, nicht zutreffen kann. Wir werden vielmehr ein Integral nehmen müssen, das der z-Achse eine besondere Stellung zuweist. Nun ist klar, daß, wenn ψ eine Lösung von (67) ist, auch $\frac{\partial \psi}{\partial x}$, $\frac{\partial \psi}{\partial y}$, $\frac{\partial \psi}{\partial z}$ wie überhaupt alle Ableitungen von ψ, wieder Lösungen sind. Denn wenn wir haben:

$$\Delta \psi = 0,$$

so ist auch

$$\frac{\partial}{\partial z}(\Delta \psi) = 0,$$

und endlich

$$\Delta \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) = 0,$$

worin der Beweis für die Behauptung enthalten ist. Bei der Lösung $\frac{\partial \psi}{\partial z}$ ist nun die z-Achse bevorzugt; denn man kann schreiben:

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\partial \psi}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial \psi}{\partial R} \frac{z}{R} = \frac{\partial \psi}{\partial R} \cos(Rz).$$

Wir werden also als Integral von (67) versuchsweise nehmen:

(68) $$P = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\alpha}{R}\right),$$

wo α eine beliebige Konstante bedeutet.

Zur Lösung der Gleichung (66) setzen wir folgendermaßen (nach Stokes) unter Einführung zweier neuer unbekannter Funktionen φ und w_1 an:

(69) $$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + w_1.$$

Aus der Bedingung (64) im Unendlichen folgt dann, daß:

(70) $$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_\infty = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_\infty = 0, \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} + w_1\right)_\infty = a$$

sein müssen.

Die letzte dieser Gleichungen wollen wir dadurch erfüllen, daß wir nehmen:

(71) $$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_\infty = a; \quad (w_1)_\infty = 0.$$

Setzt man den Ansatz (69) in die Gleichungen (66) ein, so folgt zur Bestimmung der Größen φ und w_1:

(72) $$\begin{cases} \frac{1}{k} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\Delta \varphi), \\ \frac{1}{k} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\Delta \varphi), \\ \frac{1}{k} \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(\Delta \varphi) + \Delta w_1. \end{cases}$$

Durch Differentiation dieser Gleichung resp. nach x, y, z und Addition, und Berücksichtigung von (67) folgt:

$$\Delta(\Delta\varphi) + \Delta\left(\frac{\partial w_1}{\partial z}\right) = 0, \quad \text{oder} \quad \Delta\left\{\Delta\varphi + \frac{\partial w_1}{\partial z}\right\} = 0,$$

was wir durch die Annahme:

(73) $$\Delta\varphi = -\frac{\partial w_1}{\partial z}$$

erfüllen können. Nehmen wir endlich noch

(74) $$\Delta w_1 = 0,$$

so folgt aus (72) und (73) sofort:

(75) $$\frac{1}{k} P = \Delta\varphi = -\frac{\partial w_1}{\partial z}.$$

Setzen wir nun für P seinen Wert aus (68) ein, so folgt aus der letzten Gleichung:

$$\frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\alpha}{R}\right) = -\frac{\partial w_1}{\partial z},$$

woraus sofort

(76) $$w_1 = -\frac{1}{k}\frac{\alpha}{R},$$

ohne Hinzufügung einer Integrationskonstante, sich ergibt. Dieser Wert von w_1 verschwindet in der Tat im Unendlichen; er genügt nach (74) auch überall (mit Ausnahme des Anfangspunktes) der Laplaceschen Gleichung. Es bleibt noch φ zu bestimmen. Nach (73) und (76) ist:

(77) $$\Delta\varphi = \frac{\alpha}{k}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{R}\right);$$

außerdem hat φ noch den Bedingungen (70) und (71) im Unendlichen und ferner gewissen Bedingungen an der Kugeloberfläche ($R = R_1$) zu genügen, die wir jetzt formulieren wollen. w_1 nimmt an der Kugeloberfläche offenbar den Wert $-\frac{\alpha}{k}\frac{1}{R_1}$ an. Nach (69) und (65) gehorcht daher φ dort den Randbedingungen:

(78) $$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{R_1} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{R_1} = 0; \quad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_{R_1} = \frac{\alpha}{k}\frac{1}{R_1}.$$

Wir genügen allen Forderungen der Reihe nach, indem wir φ aus einzelnen Summanden zusammensetzen. Zunächst kann man der Bedingung im Unendlichen genügen, indem man in φ einen Summanden $\varphi_1 = az$ auftreten läßt; also ist

(79) $$\varphi_1 = az.$$

Ferner wird (77) erfüllt durch den Summanden φ_2:

(80) $$\varphi_2 = \frac{\alpha}{2k}\,\frac{\partial R}{\partial z}.$$

Denn es ist

$$\Delta\varphi_2 = \frac{\alpha}{2k}\,\frac{\partial}{\partial z}(\Delta R) = \frac{\alpha}{2k}\,\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{2}{R}\right) = \frac{\alpha}{k}\,\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{R}\right).$$

Mithin haben wir für φ aus (79) und (80):

$$\varphi = a z + \frac{\alpha}{2k}\,\frac{\partial R}{\partial z} + \ldots.$$

Mit diesem zweigliedrigen Werte von φ ist es aber noch unmöglich, die Gleichung (78) für die Kugeloberfläche zu erfüllen, wie man sich leicht überzeugen kann; man erhält nämlich z. B.

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{R_1} = \left[\frac{\alpha}{2k}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z}{R}\right)\right]_{R_1} = -\frac{\alpha}{2k}\left[\frac{z\,x}{R^3}\right]_{R_1} = 0,$$

was für beliebige Werte z und x auf der Kugelfläche nur durch $\alpha = 0$ erfüllt werden könnte, was aber die banale Lösung 0 liefern würde. Der Grund des Fehlschlages liegt darin, daß in dem benutzten zweigliedrigen Ausdrucke von φ zu wenig disponible Konstanten vorhanden sind. Wenn wir nun noch einen Summanden φ_3 zu φ hinzufügen, so darf er die bereits befriedigten Gleichungen (70) und (77) nicht verletzen; es muß daher sein:

$$\Delta\varphi_3 = 0; \quad (\varphi_3)_\infty = 0,$$

und es muß endlich die z-Achse bevorzugt werden. Allen Forderungen genügt der Ansatz mit der willkürlichen Konstanten β:

(81) $$\varphi_3 = \beta\,\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{R}\right),$$

so daß wir erhalten:

(82) $$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = a z + \frac{\alpha}{2k}\frac{\partial R}{\partial z} + \beta\,\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial z}.$$

Mit diesem Werte φ sind in der Tat die Randbedingungen (78) erfüllbar. Man erhält nämlich für u, v, w die Werte:

(83) $$\begin{cases} u = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = \dfrac{3\beta z x}{R^5} - \dfrac{\alpha}{2k}\,\dfrac{z x}{R^3}, \\[2ex] v = \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = \dfrac{3\beta z y}{R^5} - \dfrac{\alpha}{2k}\,\dfrac{z y}{R^3}, \\[2ex] w = \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} + w_1 = \dfrac{3\beta z^2}{R^5} - \dfrac{\alpha}{2k}\,\dfrac{z^2}{R^3} - \dfrac{\beta}{R^3} - \dfrac{\alpha}{2kR} + a. \end{cases}$$

Die Randbedingungen (65) liefern also (da x, y, z auf der Kugel beliebig variieren können):

$$\frac{3\beta}{R_1^5} = \frac{\alpha}{2k}, \quad \frac{\beta}{R_1^3} = a - \frac{\alpha}{2kR_1},$$

woraus für a und β die Werte folgen:

(84)
$$\begin{cases} \beta = \frac{a R_1^3}{4}, \\ \alpha = \frac{3}{2} k a R_1. \end{cases}$$

Damit erhalten wir endgültig für die Geschwindigkeitskomponenten:

(85)
$$\begin{cases} u = \frac{3}{4} a \frac{R_1^3}{R^3} \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{R_1^2} \right) z x, \\ v = \frac{3}{4} a \frac{R_1^3}{R^3} \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{R_1^2} \right) z y, \\ w = \frac{3}{4} a \frac{R_1^3}{R^3} \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{R_1^2} \right) z^2 - \frac{a R_1}{4 R} \left(\frac{R_1^2}{R^2} + 3 \right) + a. \end{cases}$$

Nunmehr können wir die Oberflächenkräfte X_n, Y_n, Z_n ausrechnen und aus ihnen die Kraft bestimmen, die notwendig ist, die Kugel an ihrer Stelle festzuhalten. Man erkennt schon aus Symmetriegründen, daß, wenn dS ein Element der Kugeloberfläche ist,

$$\int X_n \, dS = \int Y_n \, dS = 0$$

sein müssen. Dagegen ist $\int Z_n dS$ von Null verschieden. Dafür können wir schreiben:

$$\int Z_n \, dS = \int dS \left\{ Z_x \cos(n x) + Z_y \cos(n y) + Z_z \cos(n z) \right\},$$

oder auch, wenn x, y, z die Koordinaten eines Punktes der Kugeloberfläche bedeuten:

(86)
$$\int Z_n \, dS = \int \frac{dS}{R} \left\{ Z_x \cdot x + Z_y \cdot y + Z_z \cdot z \right\}.$$

Mit Hilfe von (25) und den eben aufgestellten Ausdrücken von u, v, w können Z_x, Z_y, Z_z berechnet und das Integral (86) ausgewertet werden. Eine etwas mühsame, aber elementare Rechnung liefert dann das Resultat für die Kraft $K = \int Z_n dS$:

(87)
$$K = -6 \pi k R_1 a.$$

Diese Gleichung ist von Stokes gefunden worden, der überhaupt als erster die Formeln für die reibenden Flüssigkeiten einer systematischen Untersuchung unterzogen hat.

Man kann dies Resultat auch so ausdrücken: Wenn auf eine in einer unendlich ausgedehnten ruhenden reibenden Flüssigkeit eingebettete Kugel eine beschleunigende Kraft K wirkt, so erlangt sie schließlich die aus der obigen Gleichung zu berechnende konstante Geschwindigkeit $(-a)$.

Gleichung (87) ist mehrfach benutzt worden, um den Reibungskoeffizienten experimentell zu bestimmen. Es folgt, wenn wir die Schwerkraft als wirkende Kraft entgegen der positiven z-Richtung annehmen: $K = -(M' - M)g$, wenn M' das Gewicht der Kugel in Luft, M das der verdrängten Flüssigkeit ist. Dann ist

$$(M' - M)g = 6\pi k R_1 a,$$

oder

(88) $$k = \frac{(M' - M)g}{6\pi R_1 a}.$$

Nennt man ε' das spezifische Gewicht der Kugel, ε das der Flüssigkeit, so ist

$$M' = \frac{4}{3} R_1{}^3 \pi \varepsilon', \quad M = \frac{4}{3} R_1{}^3 \pi \varepsilon.$$

Damit geht die letzte Formel über in:

(88a) $$k = \frac{2}{9} \frac{R_1{}^2(\varepsilon' - \varepsilon)}{a},$$

die auch umgekehrt bei bekannter Reibungskonstante dazu dienen kann, um aus der beobachteten Endgeschwindigkeit a den Radius R der Kugel zu finden. Diese letztere Anwendung spielt in der Elektrizitätslehre eine große Rolle. Die mit (87) erhaltenen Resultate sind bei Berücksichtigung des Umstandes,[1]) daß beim Experiment die Flüssigkeit nie unendlich ausgedehnt, sondern durch Wände begrenzt ist, in guter Übereinstimmung mit dem nach der Poiseuilleschen Methode gewonnenen.

Man erkennt übrigens leicht aus (85), daß die Wirbelkomponenten folgende Werte haben:

(89) $$p = \frac{3}{4} \frac{a R_1 y}{R^3}, \quad q = -\frac{3}{4} \frac{a R_1 y}{R^3}, \quad r = 0.$$

Die Wirbelachsen sind also Kreise parallel der xy-Ebene, die resultierende Rotationsgeschwindigkeit ist:

(89a) $$\omega = \frac{3}{4} a \frac{R_1}{R^3} \sqrt{x^2 + y^2}.$$

sie nimmt also sehr rasch mit wachsendem R ab.

198. Kleine Transversalschwingungen.

In einer reibungslosen inkompressiblen Flüssigkeit sind weder longitudinale Dilatationswellen, noch transversale Rotationswellen möglich. Ersteres folgt unmittelbar daraus, daß die Dilatation stets den Wert Null hat, letzteres haben wir z. B. in Nummer 167 ausführlich be-

[1]) Vgl. hierzu R. Ladenburg, Ann. d. Phys. 23, pag. 447, 1907.

sprochen. Dagegen sind in reibenden inkompressiblen Flüssigkeiten transversale Wellen möglich, zu deren Untersuchung wir jetzt übergehen wollen.

Wenn wir nur kleine Flüssigkeitsgeschwindigkeiten ins Auge fassen, so können wieder die quadratischen Glieder vernachlässigt werden und wir erhalten unter Ausschluß äußerer Kräfte nach (26) unter Hinzunahme der Inkompressibilitätsbedingung:

$$(90) \quad \begin{cases} \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x} + k\,\Delta u, \\ \varepsilon \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial y} + k\,\Delta v, \\ \varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial z} + k\,\Delta w, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

Nehmen wir z. B. der Einfachheit halber an, daß $v = w = 0$ und u außer von t nur noch von der y-Koordinate abhängig ist, so geben diese Gleichungen:

$$(91) \quad \begin{cases} \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x} + k \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

Die erste dieser Gleichungen kann geschrieben werden:

$$\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} - k \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial P}{\partial x},$$

und da die linke Seite nach Voraussetzung eine Funktion von t und y, die rechte Seite nach der zweiten Gleichung (91) nur Funktion von x ist, so müssen sowohl die linke als auch die rechte Seite gleich einer Konstanten (oder Funktion von t) sein, die wir, ohne der Allgemeinheit zu nahe zu treten, gleich 0 nehmen dürfen. Wir haben also:

$$(92) \quad \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = 0, \\ \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} - k \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \end{cases}$$

Aus der ersten Gleichung folgt, daß P höchstens eine Funktion von t allein sein kann; die letzte Gleichung zeigt an, daß eine besondere Art von Wellen möglich ist. Betrachten wir zeitlich rein periodische Vorgänge, so haben wir zu setzen:

$$(93) \quad u = e^{int}\,\varphi(y),$$

was liefert:

$$(94) \quad \frac{d^2\varphi}{dy^2} - \frac{\varepsilon n i}{k}\,\varphi(y) = 0.$$

Machen wir zur Integration den Ansatz:

(95) $$\varphi(y) = e^{\sigma y},$$

wo σ eine geeignet zu bestimmende Konstante ist, so folgt:

(96) $$\sigma = \pm \sqrt{\frac{\varepsilon n i}{k}}.$$

Nun ist aber

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}}, \quad \text{also} \quad \sqrt{i} = e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}}(1+i);$$

also nach (96):

(96a) $$\sigma = \pm \sqrt{\frac{\varepsilon n}{2k}}(1+i).$$

Nach (93) und (95) folgt dann für u:

$$u = e^{int}\, e^{\pm\sqrt{\frac{\varepsilon n}{2k}}(1+i)y},$$

oder mit zwei willkürlichen Konstanten A und B:

$$u = A e^{i\left(nt - \sqrt{\frac{\varepsilon n}{2k}}y\right)} e^{-\sqrt{\frac{\varepsilon n}{2k}}y} + B e^{i\left(nt + \sqrt{\frac{\varepsilon n}{2k}}y\right)} e^{+\sqrt{\frac{\varepsilon n}{2k}}y},$$

oder unter Beschränkung auf den reellen Teil:

(97) $$u = A e^{-\sqrt{\frac{\varepsilon n}{2k}}y} \cos\left(nt - \sqrt{\frac{\varepsilon n}{2k}}\,y\right) + B e^{\sqrt{\frac{\varepsilon n}{2k}}y} \cos\left(nt + \sqrt{\frac{\varepsilon n}{2k}}\,y\right).$$

Dieser Ausdruck stellt Wellen dar, die sich längs der y-Achse mit variabler Amplitude fortpflanzen; die Richtung der Geschwindigkeit u steht senkrecht zur Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen; es sind also Transversalwellen. Ist das Medium unbegrenzt, so muß $B = 0$ genommen werden, weil sonst u im Unendlichen über alle Grenzen wachsen würde. Dann ist einfacher:

(97a) $$u = A e^{-\sqrt{\frac{\varepsilon n}{2k}}y} \cdot \cos\left(nt - \sqrt{\frac{\varepsilon n}{2k}}\,y\right).$$

Man erkennt aus (97a) leicht folgendes: Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c der Störung hat den Wert:

(98) $$c = \sqrt{\frac{2kn}{\varepsilon}},$$

die räumliche Dämpfung δ:

(99) $$\delta = \sqrt{\frac{\varepsilon n}{2k}}.$$

Man erkennt, daß letztere um so größer ist, je größer die Frequenz n, also je kleiner die Wellenlänge ist. Ebenso verhält sich die Fort-

pflanzungsgeschwindigkeit. Haben wir es also mit einer Übereinanderlagerung mehrerer Wellen von der Form (97a) zu tun, also etwa mit dem Ansatz:

$$u = \sum_{\nu} A_{\nu} e^{-\sqrt{\frac{\varepsilon n_{\nu}}{2k}}\,y} \cdot \cos\left(n_{\nu} t - \sqrt{\frac{\varepsilon n_{\nu}}{2k}}\, y\right), \tag{100}$$

so muß erstens beim Fortschreiten der Wellen sich die Gestalt von u permanent ändern, und ferner ist nach Zurücklegung einer hinreichend großen Strecke praktisch nur noch die am schwächsten gedämpfte Welle, also diejenige mit der größten Wellenlänge, vorhanden.

Es sei gleich hier bemerkt, daß die Wärmeleitung in einem Stabe ebenfalls einer Gleichung von der Gestalt der zweiten Gleichung (92) gehorcht; dort treten also formal dieselben Verhältnisse auf.

199. Vernichtung einer Unstetigkeitsfläche durch Reibung.

Wir wollen eine Flüssigkeitsbewegung betrachten, die den Gleichungen (91) entspricht; d. h. es soll sein

$$v = w = 0, \quad u \text{ nur Funktion von } y \text{ und } t,$$

also der Differentialgleichung gehorchend:

$$\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \tag{101}$$

Um das Problem zu einem eindeutig bestimmten zu machen, wollen wir jetzt noch Rand- und Anfangsbedingungen hinzufügen: Die Flüssigkeitsströmung gehe vor sich in einem Streifen, der zwischen den Ebenen $y = 0$ und $y = 1$ eingeschlossen sei; und es sei an den Grenzen

$$u(0) = 0; \quad u(1) = 1. \tag{102}$$

Für $t = 0$ reduziert sich u auf eine Funktion von y allein, die wir folgendermaßen festsetzen wollen:

$$u_{t=0} = f(y) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leqq y \leqq \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{für } \frac{1}{2} \leqq y \leqq 1. \end{cases} \tag{103}$$

Es existiert also an der Stelle $y = 1/2$ eine Helmholtzsche Unstetigkeitsfläche, da die tangentiellen Geschwindigkeiten zu beiden Seiten die Differenz 1 haben. In Fig. 241 ist der Anfangszustand graphisch dargestellt. Die anfängliche Strömung ist also mit Ausnahme der unendlich dünnen Wirbelfläche $y = 1/2$ wirbelfrei. Wir wollen nun die Ausbreitung dieses „Flächenwirbels" mit der Zeit verfolgen.

Um die Randbedingungen etwas bequemer zu machen, setzen wir an:

$$u = y + e^{-\alpha t} \cdot \varphi(y), \tag{104}$$

wo a eine zu bestimmende Konstante ist. Setzen wir

$$u' = u - y,$$

so erfüllt u' nach (102) die Randbedingungen:

(105) $$u'(0) = u'(1) = 0.$$

Das Einsetzen von (104) in die gegebene Differentialgleichung (101) liefert:

(106) $$\frac{d^2\varphi}{dy^2} + \lambda\varphi(y) = 0; \quad \lambda = \frac{\varepsilon a}{k},$$

wozu nach (105) noch die Randbedingungen hinzutreten:

(106a) $$\varphi(0) = \varphi(1) = 0.$$

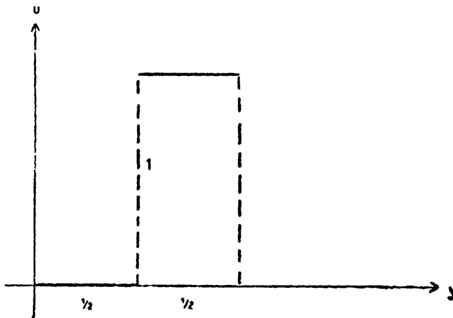


Fig. 241.

Das allgemeine Integral von (106) ohne Rücksicht auf die Randbedingungen ist:

(107) $$\varphi(y) = A\cos\sqrt{\lambda}\cdot y + B\sin\sqrt{\lambda}\cdot y.$$

Die Randbedingungen liefern für A und λ die Werte:

(108) $$A = 0; \quad \sqrt{\lambda} = \nu\pi; \quad B \text{ willkürlich.}$$

Also sind die Eigenfunktionen unseres Problems:

$$\varphi_\nu(y) = B\sin\nu\pi y,$$

oder, wenn wir normieren:

(109) $$\varphi_\nu(y) = \sqrt{2}\sin\nu\pi y.$$

Die Eigenwerte λ_ν, für die das Problem lösbar ist, sind ebenso:

(110) $$\lambda_\nu = \nu^2 \pi^2 .$$

Zu jedem Werte λ_ν gehört nach (106) ein Wert α_ν:

(111) $$\alpha_\nu = \frac{k}{\varepsilon} \lambda_\nu = \frac{k}{\varepsilon} \nu^2 \pi^2 .$$

Bezeichnen wir daher noch unbestimmte Konstanten mit A_ν, so können wir nach (104) die allgemeine Lösung unseres Problems schreiben:

(112) $$u = y + \sqrt{2} \sum_{\nu}^{1,\infty} A_\nu e^{-\frac{k}{\varepsilon} \nu^2 \pi^2 t} \cdot \sin \nu \pi y ,$$

und die Konstanten A_ν sind so zu bestimmen, daß zur Zeit $t = 0$ der Ausdruck (112) für u in den gegebenen Anfangszustand $u_{t=0} = f(y)$ nach (103) übergeht. Setzen wir zur Abkürzung $f(y) - y = F(y)$, so muß für $t = 0$ sein:

(113) $$F(y) = \sqrt{2} \sum_{\nu}^{1,\infty} A_\nu \cdot \sin \nu \pi y .$$

Wegen der Normierung und Orthogonalität der Eigenfunktionen haben wir die Fouriersche Konstantenbestimmung:

$$A_\nu = \sqrt{2} \int_0^1 F(y) \sin \nu \pi y \cdot dy = \sqrt{2} \int_0^1 [f(y) - y] \sin \nu \pi y \cdot dy ,$$

wobei wegen der verschiedenen Definition von $f(y)$ unterhalb und oberhalb von $y = 1/2$ das Intervall der Integration zu teilen ist. Wir erhalten:

$$A_\nu = -\sqrt{2} \int_0^{+1/2} y \cdot \sin \nu \pi y \cdot dy + \sqrt{2} \int_{1/2}^{+1} (1 - y) \sin \nu \pi y \cdot dy ,$$

und das liefert folgende Werte für A_ν:

(114) $$A_\nu = \begin{cases} 0 \text{ für ungerade Werte von } \nu, \\ -\frac{\sqrt{2}}{\nu \pi} \text{ für gerade Werte } \nu, \text{ aber ungerade Werte } \frac{\nu}{2}, \\ +\frac{\sqrt{2}}{\nu \pi} \text{ für gerade Werte } \nu \text{ und gerade Werte } \frac{\nu}{2}. \end{cases}$$

Wir erhalten also z. B.

(115) $$\begin{cases} A_1 = 0; \quad A_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2\pi}; \quad A_3 = 0; \quad A_4 = +\frac{\sqrt{2}}{4\pi}; \\ A_5 = 0; \quad A_6 = -\frac{\sqrt{2}}{6\pi} \text{ u. s. f.,} \end{cases}$$

und somit für u nach (112) die Reihe:

$$(116)\quad \begin{cases} u = y - \frac{1}{\pi}\left\{e^{-\frac{4\pi^2 k}{\varepsilon}t}\sin 2\pi y - \frac{1}{2}e^{-\frac{16\pi^2 k}{\varepsilon}t}\cdot\sin 4\pi y \right. \\ \qquad \left. + \frac{1}{3}e^{-\frac{36\pi^2 k}{\varepsilon}t}\cdot\sin 6\pi y + \ldots\right\}, \end{cases}$$

die für $t=0$ in die folgende übergeht:

$$(116\text{a})\quad \begin{cases} \underset{t=0}{u} = f(y) = y - \frac{1}{\pi}\left\{\sin 2\pi y - \frac{1}{2}\sin 4\pi y + \frac{1}{3}\sin 6\pi y \right. \\ \qquad \left. - \frac{1}{4}\sin 8\pi y \ldots\right\}, \end{cases}$$

deren Konvergenz allerdings noch zu beweisen wäre. Unsere früheren Untersuchungen über Entwickelung willkürlicher Funktionen nach Eigenfunktionen reichen hierzu nicht aus, da hier die darzustellende Funktion $f(y)$ beim Werte $y=1/2$ eine Unstetigkeit aufweist und wir bisher immer Stetigkeit der zu entwickelnden Funktion vorausgesetzt haben. Es ist jedoch möglich, diesen Beweis zu erbringen. Am einfachsten wieder auf Grund der Theorie der linearen Integralgleichungen. Diese Konvergenzuntersuchung überschreitet jedoch den Rahmen dieses Buches; der Leser sei auf das Werk von A. Kneser über Integralgleichungen verwiesen; hier setzen wir die Konvergenz als gesichert voraus.

Bevor wir eine Anwendung von (116) auf unser Problem machen, wird es gut sein, einige elementare Betrachtungen darüber anzustellen, in welcher Weise die Reihe (116a) die unstetige Funktion darstellt. Wenn wir von einem Wert y unterhalb $1/2$ ausgehen, und dann y sich dem Werte $1/2$ nähern lassen, so nähert sich die Reihe dem Werte Null an. Umgekehrt, wenn wir von einem Werte y größer als $1/2$ ausgehend uns von oben her dem Werte $y=1/2$ nähern, so nähert sich die Reihe dem Werte 1 an. Für $y=1/2$ jedoch erkennt man, daß die Sinus alle gleich 0 werden; mithin nimmt die Reihe den Wert $1/2$ an. Für die Unstetigkeitsstelle $y=1/2$ stellt also die Reihe den Mittelwert zwischen den beiden Funktionswerten 0 und 1 dar. Dies ist allgemein bei Reihen der Fall, die unstetige Funktionen darstellen. Es ist interessant, sich graphisch klar zu machen, in welcher Weise die unstetige Funktion $f(y)$ von der Reihe (116a) dargestellt wird. Zu dem Zwecke sind in der folgenden Figur Kurven dargestellt, die man erhält, wenn man statt der unendlichen Reihe nur einige der ersten Glieder nimmt.

Setzen wir in (116a) $2\pi y=\xi$, so läßt sich (116a) schreiben:

$$(116\text{b})\qquad u = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{\xi}{2} - \sin\xi + \frac{1}{2}\sin 2\xi - \frac{1}{3}\sin 3\xi + \frac{1}{4}\sin 4\xi \ldots\right\},$$

und es genügt, die Klammer zu betrachten. In den Figuren 242a—242f stellen die einzelnen Kurven folgende Gleichungen dar:

Kurve 1, Fig. 242a: $u = \frac{\xi}{2}$;

„ 2, „ 242b: $u = \frac{\xi}{2} - \sin\xi$;

„ 3, „ 242c: $u = \frac{\xi}{2} - \sin\xi + \frac{1}{2}\sin 2\xi$;

„ 4, „ 242d: $u = \frac{\xi}{2} - \sin\xi + \frac{1}{2}\sin 2\xi - \frac{1}{3}\sin 3\xi$;

„ 5, „ 242e: $u = \frac{\xi}{2} - \sin\xi + \frac{1}{2}\sin 2\xi - \frac{1}{3}\sin 3\xi + \frac{1}{4}\sin 4\xi$, .

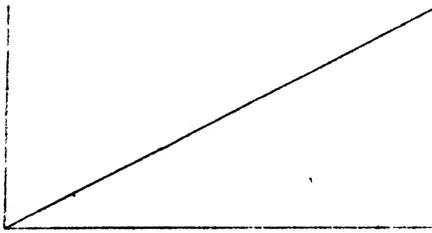


Fig. 242a.

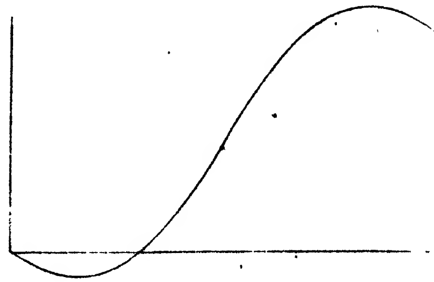


Fig. 242b.

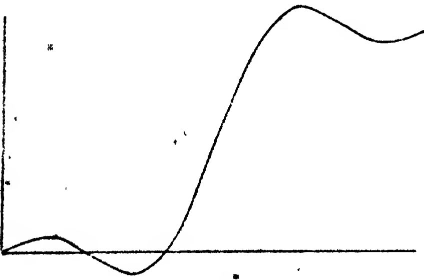


Fig. 242c.

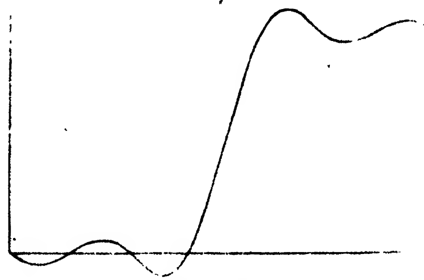


Fig. 242d.

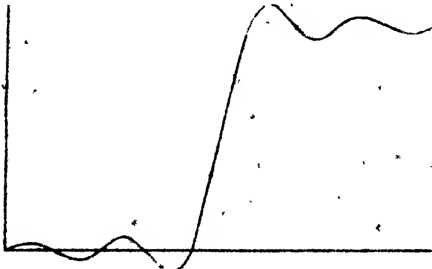


Fig. 242e.

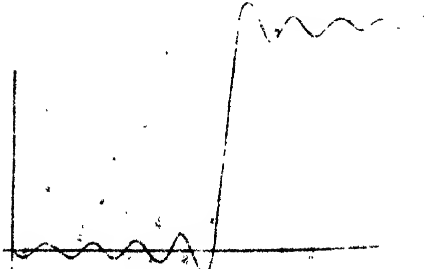


Fig. 242f.

während in Fig. 242f die Kurve die Reihe (116b) bis zum Gliede $-\frac{1}{9}\sin 9\xi$ einschließlich darstellt. Man erkennt aus diesen Figuren, wie immer mehr die aufeinanderfolgenden Kurven sich dem gebrochenen Linienzug anschmiegen, den die unendliche Reihe darstellen soll. Man sieht ferner, daß für $y = \frac{1}{2}$ stets der Mittelwert $\frac{1}{2}$ dargestellt wird. Auf diese Weise kann man sich gewissermaßen experimentell davon überzeugen, daß unsere Reihe (116a) wirklich den geforderten Anfangszustand darstellt.

Wie ist nun, um zu unserem Problem der Zerstörung einer Diskontinuitätsfläche durch Reibung zurückzukehren, der zeitliche Verlauf der Strömung?

Man erkennt zunächst, daß jedes Glied der Reihe (116a) — mit Ausnahme des ersten von der Zeit unabhängigen Summanden y — in der für alle Zeiten geltenden Gleichung (116) mit einem Exponentialfaktor behaftet auftritt, der mit wachsender Zeit t rasch abnimmt, um so rascher, je höher die Ordnungszahl des betreffenden Gliedes ist. Um sich klar zu machen, wie stark mit wachsender Zeit die höheren Glieder der Reihe an Bedeutung immer mehr hinter den ersten zurücktreten, wollen wir den Fall des Wassers nehmen, für den $\frac{k}{\varepsilon} \cong 0{,}01$ ist. Dann werden die Amplitudenfaktoren der aufeinanderfolgenden Glieder folgende relativen Werte annehmen:

$$e^{-\frac{4\pi^2}{100}t}, \quad \frac{1}{2}e^{-\frac{16\pi^2}{100}t}, \quad \frac{1}{3}e^{-\frac{36\pi^2}{100}t}, \quad \frac{1}{4}e^{-\frac{64\pi^2}{100}t}, \quad \ldots.$$

In der folgenden Tabelle sind für verschiedene Werte der Zeit die ungefähren Werte dieser Amplitudenfaktoren zusammengestellt:

t in sec	$e^{-\frac{4\pi^2 t}{100}}$	$\frac{1}{2}e^{-\frac{16\pi^2 t}{100}}$	$\frac{1}{3}e^{-\frac{36\pi^2 t}{100}}$	$\frac{1}{4}e^{-\frac{64\pi^2 t}{100}}$	$\frac{1}{5}e^{-\pi^2 t}$
0	1	0,5	0,33	0,25	0,20
1	0,67	0,10	0,01	< 0,0005	—
2	0,45	0,02	—	—	—
3	0,30	0,004	—	—	—
5	0,14	—	—	—	—

Man sieht aus dieser Tabelle deutlich, wie rapide der Einfluß der höheren Glieder verschwindet. Nach sehr kurzer Zeit bereits braucht nur noch der einfache Ausdruck

$$(117) \qquad u = y - \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{k}{\varepsilon}4\pi^2 t} \sin 2\pi y$$

berücksichtigt zu werden, und auch dieser reduziert sich rasch auf y. Der Endzustand der Flüssigkeit ist also:

$$(117a) \qquad u = y.$$

Graphisch sehen die aufeinanderfolgenden Zustände etwa so aus, wie sie in Fig. 243 dargestellt sind. Die Diskontinuitätsfläche verschwindet momentan, dafür aber ist die vorher wirbelfreie Flüssigkeitsströmung zu einer Wirbelbewegung geworden: Die zu Anfang auf die Ebene $y = 1/2$ beschränkten Flächenwirbel haben sich von da aus durch die ganze Flüssigkeit verbreitet. Man hat nach

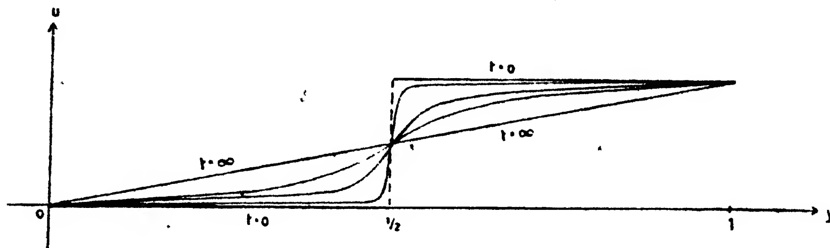


Fig. 243.

Ablauf einiger Sekunden, wenn man mit genügender Genauigkeit die Gleichung (117) für u anwenden kann, für die Komponenten der Rotationsgeschwindigkeit:

$$\dot p = 0, \quad \dot q = 0; \quad \dot r = -\frac{1}{2}\left\{1 - e^{-\frac{4\pi^2 k t}{\varepsilon}} \cos 2\pi y\right\} \tag{118}$$

und das wird bald zu:

$$\dot p = \dot q = 0, \quad \dot r = -\frac{1}{2}. \tag{118a}$$

Man erkennt aus den Darlegungen dieser Nummer, daß Diskontinuitätsflächen zwar als Anfangszustand möglich sind, daß sie aber sofort in einer reibenden Flüssigkeit vernichtet werden. Ebenso ist auch ein wirbelfreier Strömungszustand nur als Anfangszustand denkbar; denn die stets, entweder an einer anfänglichen Diskontinuitätsfläche oder an den begrenzenden Wänden vorhandenen Wirbel breiten sich schließlich durch die ganze Flüssigkeit aus. Darin liegt der Grund, weshalb die Betrachtung stationärer wirbelfreier Strömungen so häufig der Erfahrung direkt widersprechende Resultate liefert. Solche Strömungen sind in natura nicht möglich.

Es erhellt auch aus dem Obigen, daß die Helmholtzsche Theorie der Diskontinuitätsflächen, so geistvoll sie ist, doch keine befriedigende Theorie des hydrodynamischen Widerstandes zu liefern vermag, weil eben die Diskontinuitäten in reibenden Flüssigkeiten nicht bestehen bleiben können.

200. Mechanische Ähnlichkeit von Flüssigkeitsbewegungen.

Es ist für viele Probleme von Wichtigkeit, daß man aus Modellversuchen in kleinem Maßstabe und mit bestimmter Flüssigkeit Schlüsse ziehen kann auf die Flüssigkeitsbewegungen, die in dem Modell ähnlichen Systemen eventuell auch mit anderen Flüssigkeiten sich einstellen müssen. Auf eine derartige Verwendungsmöglichkeit der hydrodynamischen Gleichungen hat zuerst Helmholtz[1]) aufmerksam gemacht.

Wir gehen aus von den hydrodynamischen Gleichungen für reibende Flüssigkeiten, von denen es genügt, die erste hinzuschreiben, wobei äußere Kräfte der Einfachheit halber fortgelassen sind:

$$(119) \qquad + \varepsilon\left\{\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right\} = -\frac{\partial P}{\partial x} + k\Delta u.$$

Es sei nun eine Lösung u_1, v_1, w_1, P_1 der hydrodynamischen Gleichung gegeben; die Dichte der betreffenden Flüssigkeit sei ε_1, der Reibungskoeffizient k_1. Wir betrachten den Zustand an einer beliebigen Stelle (x_1, y_1, z_1) des Raumes zu einer beliebigen Zeit t_1. Setzt man die Größen mit dem Index 1 in (119) ein, so verwandelt sich nach Voraussetzung diese Gleichung in eine Identität. Nunmehr betrachten wir ein ähnliches System, d. h. ein System, welches wir durch passende Veränderung des Maßstabes für die räumlichen Dimensionen und die Zeit aus dem ersten erhalten. Dann entspricht jedem Punkte (x_1, y_1, z_1) zur Zeit t_1 im ersten System ein Punkt (x_2, y_2, z_2) zur Zeit t_2 im zweiten System. Diese Punkte und Zeiten nennt man korrespondierend. Wir wollen setzen:

$$(120\text{a}) \qquad \left\{\begin{array}{l} x_2 = l_0 x_1; \quad y_2 = l_0 y_1; \quad z_2 = l_0 z_1; \\ \qquad t_2 = t_0 \cdot t_1, \end{array}\right.$$

also, wenn l_2 und l_1 beliebige korrespondierende lineare Abmessungen bedeuten, allgemein:

$$(120\text{b}) \qquad l_2 = l_0 \cdot l_1.$$

l_0 ist also die Vergrößerungszahl für die räumlichen, t_0 für die zeitlichen Dimensionen. Wir fragen nach dem Zustande u_2, v_2, w_2, P_2, der zur Zeit t_2 im Punkte (x_2, y_2, z_2) herrscht, wenn wir im zweiten System eine Flüssigkeit von der Dichte ε_2 und der Zähigkeit k_2 annehmen. Zunächst ist durch die Aufgabe gegeben:

$$(121) \qquad \left\{\begin{array}{l} \varepsilon_2 = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_1, \\ k_2 = k_0 \cdot k_1, \end{array}\right.$$

wo ε_0, k_0 zwei Proportionalitätsfaktoren sind, die angeben, um wieviel größer Dichte und Zähigkeit des zweiten Systems sind als die entsprechenden Größen des ersten. Setzen wir ebenso:

[1]) H. v. Helmholtz, Wiss. Abh. I, 158.

$$(122\text{a})\qquad \begin{cases} u_2 = c_0 \cdot u_1\,, \\ v_2 = c_0 \cdot v_1\,, \\ w_2 = c_0 \cdot w_1\,, \\ P_2 = P_0 \cdot P_1\,, \end{cases}$$

also, wenn c_2 resp. c_1 resultierende korrespondierende Geschwindigkeiten sind:

$$(122\text{b})\qquad c_2 = c_0 \cdot c_1\,,$$

so sind die unbekannten Koeffizienten c_0 und P_0 zu bestimmen. Es sollen nun aber u_2, v_2, w_2, P_2 als Funktionen von x_2, y_2, z_2, t_2 Lösungen der hydrodynamischen Gleichungen (119) sein, diese also durch Einsetzen erfüllt werden. Setzt man nach (120 bis 122) für die Größen mit dem Index (2) die Werte ein, so ist:

$$\varepsilon_0\,\varepsilon_1 \left\{ \frac{c_0}{t_0} \frac{\partial u_1}{\partial t_1} + \frac{c_0^2}{l_0} u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{c_0^2}{l_0} v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y_1} + \frac{c_0^2}{l_0} w_1 \frac{\partial u_1}{\partial z_1} \right\}$$
$$= - \frac{P_0}{l_0} \frac{\partial P_1}{\partial x_1} + \frac{k_0 c_0}{l_0^2} \Delta u_1\,.$$

Da auch die Gleichung besteht:

$$\varepsilon_1 \left\{ \frac{\partial u_1}{\partial t_1} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y_1} + w_1 \frac{\partial u_1}{\partial z_1} \right\} = - \frac{\partial P_1}{\partial x_1} + k_1 \Delta u_1\,,$$

so erkennt man durch Vergleich der beiden Formeln, daß folgende Relationen bestehen müssen:

$$(123)\qquad \frac{\varepsilon_0 c_0}{t_0} = \frac{\varepsilon_0 c_0^2}{l_0} = \frac{P_0}{l_0} = \frac{k_0 c_0}{l_0^2}\,.$$

Daraus ergibt sich folgendes für c_0 und P_0:

$$(124)\qquad \begin{cases} \varepsilon_0 c_0 = \dfrac{k_0}{l_0}\,; \quad c_0 = \dfrac{k_0}{\varepsilon_0 l_0}\,; \\ P_0 = \dfrac{k_0 c_0}{l_0} = \dfrac{k_0^2}{l_0^2 \varepsilon_0}\,. \end{cases}$$

Ferner ergibt sich für die Vergrößerungszahl t_0 der Zeit:

$$(125)\qquad t_0 = \frac{\varepsilon_0 l_0^2}{k_0}\,.$$

Es bestehen also nach (124) und (125) folgende Proportionen für:

korrespondierende Geschwindigkeiten: $c_2 : c_1 = \dfrac{k_2}{\varepsilon_2 l_2} : \dfrac{k_1}{\varepsilon_1 l_1}\,.$

„ Drucke: $P_2 : P_1 = \dfrac{k_2^2}{l_2^2 \varepsilon_2} : \dfrac{k_1^2}{l_1^2 \varepsilon_1}\,,$

„ Zeiten: $t_2 : t_1 = \dfrac{\varepsilon_2 l_2^2}{k_2} : \dfrac{\varepsilon_1 l_1^2}{k_1}\,,$

oder, wenn A, B, C dimensionslose Konstanten sind, erhält man für die Geschwindigkeit c, den Druck P, die Zeit t, wobei die Indices jetzt fortgelassen sind:

$$(126) \qquad \begin{cases} c = A\dfrac{k}{\varepsilon l}, \\ P = B\dfrac{k^2}{l^2 \varepsilon}, \\ t = C\dfrac{\varepsilon l^2}{k}, \end{cases}$$

Diese Gleichungen stellen c, P, t dar als Funktion der das System bestimmenden Größen ε, l, k. In dem besonderen Falle, daß $l=1$ ist, d. h. das zweite System mit dem ersten geometrisch kongruent ist, erhält man spezieller:

$$(126a) \qquad \begin{cases} c = A\dfrac{k}{\varepsilon}, \\ P = B\dfrac{k^2}{\varepsilon}, \\ t = C\dfrac{\varepsilon}{k}. \end{cases}$$

Diese hier angewandte Methode, die man das „Prinzip der dynamischen Ähnlichkeit" nennt, werden wir in der nächsten Nummer zu wichtigen Schlußfolgerungen verwenden.

201. Turbulenz.

Bereits in Nr. 196 ist hervorgehoben worden, daß das Poiseuillesche Gesetz für gegebene Rohre und Flüssigkeiten nur unterhalb einer „kritischen" Geschwindigkeit gilt. Wird diese überschritten, so treten ganz andere Bewegungszustände auf, die wir jetzt untersuchen müssen.

Bezeichnen wir mit Q, nicht wie in Gleichung (59) das pro Sekunde ausfließende Volumen, sondern das in der Zeit t ausfließende, so kann man diese Formel schreiben:

$$Q = \frac{\pi R_1^4 (P_1 - P_2)}{8 k l} t,$$

oder:

$$(127) \qquad \Pi = A_P \frac{1}{t},$$

wobei Π und A_P folgende Abkürzungen bedeuten:

$$(128) \qquad \begin{cases} \Pi = P_1 - P_2; \\ A_P = \dfrac{8 Q k l}{\pi R_1^4}. \end{cases}$$

Der Index P deutet darauf hin, daß wir es mit dem Poiseuilleschen Zustande zu tun haben; A_P ist unter gleichen Umständen proportional dem Reibungskoeffizienten k.

Sobald nun eine gewisse Geschwindigkeit überschritten ist, treten ganz andere Gesetzmäßigkeiten auf, die namentlich von Osborne Reynolds und später von Couette und Bose nebst Mitarbeitern untersucht worden sind. Diese Arbeiten haben an Stelle von (127) das kompliziertere Gesetz ergeben:

$$\Pi = A_T \left(\frac{1}{t}\right)^n , \tag{129}$$

wo A_T eine Konstante und n eine Zahl bedeutet, die von den verschiedenen Beobachtern zwischen 1,6 und 1,95 gefunden wurde.

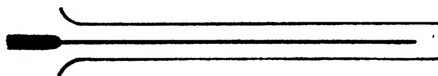


Fig. 244.

Man bezeichnet diese Art von Strömung im Gegensatz zur Laminarbewegung Poisseuilles als „Turbulenz", weil Reynolds im Jahre 1883 experimentell gezeigt hat, daß die Stromlinien nicht mehr Geraden parallel der Rohrachse sind, sondern höchst komplizierte Kurven darstellen. Reynolds färbte den mittleren Teil des durch die Röhre strömenden Wassers und erhielt im Falle der Laminarbewegung einen geradlinigen dünnen Faden längs der ganzen Ausdehnung des Rohres (Fig. 244).



Fig. 245.

Nachdem die Turbulenz eingetreten war, ergab sich das Bild der Fig. 245, in dem von einer bestimmten Stelle an der gefärbte Faden abbricht und das ganze Rohr gefärbt erscheint.

Betrachtete man dasselbe Rohr beim kurzdauernden Lichte des elektrischen Funkens, so erschien der gefärbte Teil des Rohres als ein unentwirrbarer Knäuel verschlungener Stromfäden. Dies legt die Vorstellung nahe, daß die turbulente Bewegung durch das Auftreten unregelmäßiger Wirbel in der Flüssigkeit charakterisiert ist. Der Nachdruck liegt dabei auf dem Worte „unregelmäßig", da wir ja früher bereits gezeigt haben, daß auch die Laminarbewegung eine Wirbelbewegung im Helmholtzschen Sinne, aber eine regelmäßige, ist.

Es ist einigermaßen schwierig zu verstehen, weshalb bei Überschreitung einer gewissen Geschwindigkeit die Laminarbewegung zu bestehen aufhört, da wir bei Ableitung des Poiseuilleschen Gesetzes keineswegs die Beschränkung auf kleine Geschwindigkeiten machen mußten. Stokes war wohl der erste, der die Meinung äußerte, daß die für (alle Geschwindigkeiten mögliche) Poiseuille-Bewegung bei großen Geschwindigkeiten labil werden kann, so daß die unvermeidlichen kleinen Störungen eine völlige Abänderung des Strömungsvorganges herbeiführen können. Reynolds' sorgfältige Versuche haben diesen Gesichtspunkt sehr wahrscheinlich gemacht.

Die erste Frage, die wir beantworten müssen, ist die nach den Faktoren, von denen die Größe der kritischen Geschwindigkeit abhängt, oberhalb der die Poiseuillesche Bewegung aufhört stabil zu sein. Wir können die Antwort auf diese Frage, die zuerst Reynolds gegeben hat, auf Grund der Betrachtungen der vorhergehenden Nummer unmittelbar gewinnen. Es verhalten sich korrespondierende Geschwindigkeiten wie die Größen $\frac{k}{\varepsilon l}$; die kritischen Geschwindigkeiten sind aber korrespondierend, also muß die kritische Geschwindigkeit $c_\varkappa$ nach der ersten Gleichung (126) gegeben sein durch:

$$c_\varkappa = A \frac{k}{\varepsilon l}, \tag{130}$$

wo l eine geeignet gewählte lineare Dimension des Rohres bedeutet. Diese Gleichung hat Reynolds experimentell geprüft und gefunden, daß die dimensionslose Konstante A den Wert 1000 hat, wenn man für l den Radius R des Rohres nimmt. Die Gleichung

$$c_\varkappa = 1000 \frac{k}{\varepsilon R} \tag{131}$$

wird als „Reynoldssches Gesetz", und das dimensionslose Aggregat

$$\frac{c_\varkappa \varepsilon R}{k} \tag{132}$$

als „Reynoldsscher Parameter" bezeichnet.

Reynolds hat nur Versuche mit Wasser gemacht, wobei die Variation von k durch verschiedene Temperaturen erzielt wurde. Aber in größerem Umfange ist (131) durch Versuche von Bose und Mitarbeitern bestätigt worden, auf die wir jetzt eingehen werden.

Die Gleichungen (127) und (129) stellt man am besten graphisch dar, wenn man als Abszissen die Größen $\log \Pi$ und als Ordinaten die Größen $\log\left(\frac{1}{t}\right)$ wählt. Dann erhält man aus den genannten Gleichungen:

$$(133)\quad \begin{cases} \text{für die Poiseuille-bewegung} & \log\left(\frac{1}{t}\right) = -\log A_P + \log \Pi, \\ \text{für die Turbulenz-bewegung} & \log\left(\frac{1}{t}\right) = -\log (A_T)^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n}\log \Pi. \end{cases}$$

Das sind in dem gewählten Koordinatensystem gerade Linien, und zwar ist die Poiseuillebewegung durch eine unter 45° gegen die Abszissenachse geneigte Gerade dargestellt, während die Turbulenzgerade mit dieser Achse einen Winkel α bildet, dessen trigonometrische Tangente den Wert $\left(\frac{1}{n}\right)$ hat (Fig. 246). Der Schnittpunkt beider Geraden ist der kritische Punkt, der mit ziemlicher Genauigkeit bestimmbar ist. Bose[1]) hat nun

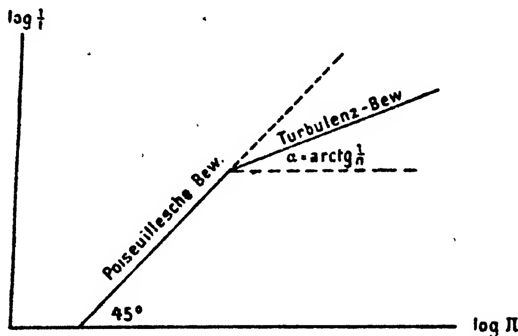


Fig. 246.

für neun Substanzen die obigen Gleichungen (133) experimentell festgestellt. Die erhaltenen Werte sind in der folgenden Tabelle niedergelegt. In der vierten Kolumne sind die relativen oder spezifischen Zähigkeiten k_P, bezogen auf Wasser gleich 1, angegeben; das sind einfach die Quotienten $\frac{A_P}{A_P^{\text{Wasser}}}$, die gemäß Gleichung (128) gleich $\frac{k}{k^{\text{Wasser}}}$ sind, wenn der Apparat (l, R) und die Ausflußmenge (Q) bei den verschiedenen Substanzen konstant gehalten werden. Der Index P dient zur Unterscheidung von der gewöhnlichen Reibungskonstanten k und zur Bezeichnung des Poiseuilleschen Zustandes. Bose definiert ganz analog $\left(\frac{A_T}{A_T^{\text{Wasser}}}\right)^{\frac{1}{n}}$, d. h. die Konstante der Turbulenzgeraden, als „spezifische Zähigkeit im turbulenten Zustande", die wir mit dem Buchstaben k_T bezeichnen. Statt dessen könnte auch eine beliebige Funktion von $\left(\frac{A_T}{A_T^{\text{Wasser}}}\right)$ als spezifische Zähigkeit im turbulenten Zustande

[1]) Physik. Zeitschrift 10, pag. 406; 1909; 12, pag. 126; 1911.

definiert werden, ohne daß Wesentliches sich änderte. Zur Unterscheidung von der spezifischen Zähigkeit im Poiseuille'schen Zustande ist hier der Index T (Turbulenz) hinzugefügt. Diese Größen k_T sind

Substanz	Poiseuille-Bew. $\log\left(\frac{1}{t}\right) = -\log A_P + \log \Pi$	Turbulenz-Bew. $\log\left(\frac{1}{t}\right) = -\frac{1}{n}\log A_T + \frac{1}{n}\log \Pi$	k_P	k_T	$\frac{k_T}{k_P}$	Reynolds' Parameter $c_\varkappa \frac{s}{k}$
	$\log\left(\frac{1}{t}\right) =$	$\log\left(\frac{1}{t}\right) =$				
Wasser	$-0{,}93250 + \log \Pi$	$-1{,}52834 + 0{,}61728 \log \Pi$	1,000	1,000	1,000	1,000
Äthylalkohol	$-0{,}99329 +$ „ „	$-1{,}50257 + 0{,}61728$ „ „	1,150	0,448	0,818	1,020
Äthylazetat	$-0{,}81690 +$ „ „	$-1{,}47826 + 0{,}61728$ „ „	0,766	0,891	1,164	1,040
Benzol	$-0{,}69984 +$ „ „	$-1{,}46853 + 0{,}61728$ „ „	0.585	0,875	1,496	0,887
Toluol	$-0{,}67713 +$ „ „	$-1{,}45343 + 0{,}61728$ „ „	0,555	0,842	1,536	0,964
Azeton	$-0{,}39685 +$ „ „	$-1{,}37252 + 0{,}61728$ „ „	0,291	0,699	2,404	0,911
Chloroform	$-0{,}63114 +$ „ „	$-1{,}53504 + 0{,}61728$ „ „	0,500	1,016	2,032	0,904
Bromoform	$-1{,}19551 +$ „ „	$-1{,}76314 + 0{,}61728$ „ „	1,832	1,717	0,937	1,000
Quecksilber	$-1{,}08110 +$ „ „	$-0{,}99365 + 0{,}61728$ „ „	1,408	2,920	2,074	1.020
						0,975 ± 0,06 als Mittelwert

in die fünfte Kolumne eingestellt und in die sechste der Quotient $\frac{k_T}{k_P}$. Es scheint danach zwischen beiden Zähigkeitskonstanten keinerlei Zusammenhang zu bestehen, so daß man geneigt sein könnte, darin einen Beweis dafür zu erblicken, daß die hydrodynamischen Gleichungen zur Beschreibung der turbulenten Bewegung nicht mehr ausreichen. Denn wenn sie auch hierfür gelten, müßte man natürlich verlangen, daß alle die Turbulenz betreffenden Größen aus solchen berechenbar sind, die in den hydrodynamischen Gleichungen vorkommen. Wir kommen auf diesen Punkt eingehend zurück.

In der letzten Kolumne endlich ist für die untersuchten Substanzen der Reynoldssche Parameter (132) — da der Apparat unverändert blieb, ist R fortgelassen — aufgeführt, der für Wasser willkürlich gleich 1 gesetzt worden ist.

Die Tabelle lehrt zunächst folgendes: Für alle untersuchten Substanzen hat (wenigstens in erster Annäherung) n den gleichen Wert $\frac{1}{0{,}61728} = 1{,}620$, ähnlich dem von Reynolds gefundenen Werte 1,722. Der Unterschied beider Zahlen beruht auf der Verschiedenheit der Apparatur und ist für uns unwesentlich. Ferner zeigt die letzte Kolumne, daß bis auf einige Prozente das Reynoldssche Gesetz (131) erfüllt ist. Da dasselbe die Gültigkeit der hydrodynamischen Gleichungen voraussetzt, so ist die Bestätigung desselben

ein erstes Argument für die Richtigkeit der hydrodynamischen Gleichungen auch für die Turbulenz.

Wie steht es aber mit den Größen k_T, die doch anscheinend gar nicht mit k_P zusammenhängen? Um diese Frage zu entscheiden, wenden wir nach von Kármán[1]) das Prinzip der dynamischen Ähnlichkeit an. Danach sollten die die Turbulenz bestimmenden Größen nur abhängig sein von den in den hydrodynamischen Gleichungen vorkommenden Größen, nämlich von ε, k, l, t. Wir wollen also einmal annehmen, daß wir den „Triebdruck" Π in Gleichung (129) in der Form ansetzen können:

(134) $$\Pi = \varepsilon^x k^y l^z \left(\frac{1}{t}\right)^n.$$

Diese Gleichung spricht eben die Forderung aus, daß die hydrodynamischen Gleichungen ihre Gültigkeit behalten. Setzen wir die Dimensionen ein, so folgt:

$$M L^{-1} T^{-2} = (M L^{-3})^x (M L^{-1} T^{-1})^y L^z T^{-n}.$$

Das liefert folgende Beziehungen:

(135) $$\begin{cases} 1 = x + y, \\ -1 = -3x - y + z, \\ -2 = -y - n; \end{cases}$$

daraus ergibt sich:

(136) $$\begin{cases} x = n - 1, \\ y = 2 - n, \\ z = 2n - 2, \end{cases}$$

während n unbestimmt bleibt. Der Vergleich von (129) und (134) ergibt demgemäß für A_T die Dimension:

(137) $$[A_T] = [\varepsilon^{n-1} k^{2-n} l^{2n-2}];$$

also erhält man für k_T die spezifische Zähigkeit im turbulenten Zustande:

(138) $$k_T = \left(\frac{A_T}{A_T^{\text{Wasser}}}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{\text{Wasser}}}\right)^{1-\frac{1}{n}} \left(\frac{k}{k_{\text{Wasser}}}\right)^{\frac{2}{n}-1},$$

da die Dimension l^{2n-2} fortfällt, weil der Apparat bei den verschiedenen Versuchen unverändert blieb. Nun ist aber $\left(\frac{k}{k_{\text{Wasser}}}\right)$ nichts anderes als k_P, die spezifische Zähigkeit im Poiseuilleschen Zustande; also folgt als Beziehung zwischen k_T und k_P:

---

[1]) v. Kármán, Physik. Zeitschrift Bd. 12, pag. 283; 1911.

$$k_T = \varepsilon^{1-\frac{1}{n}} k_P^{\frac{2}{n}-1},$$

wo für n der Bosesche Wert 1,620 zu nehmen ist. In der folgenden Tabelle sind die beobachteten und die nach dieser Formel berechneten Werte k_T zusammengestellt.

Substanz	k_P	k_T beobachtet	k_T berechnet
Äthylalkohol	1,150	0,942	0,944
Äthylazetat	0,766	0,891	0,900
Benzol	0,585	0,875	0,844
Toluol	0,555	0,842	0,833
Azeton	0.191	0,699	0,685
Chloroform	0,500	1,016	0,991
Bromoform	1,832	1,717	1,[illegible]3
Quecksilber	1,408	2,920	2,937

Man erkennt, daß die Übereinstimmung vorzüglich ist. Es liegt nach alle dem kein Grund vor, an der Gültigkeit der hydrodynamischen Gleichungen zu zweifeln.

Anderseits ist es den Bemühungen der hervorragendsten Theoretiker (Reynolds, Lorentz, Sommerfeld, Hamel, Boussinesq) bis jetzt nicht gelungen, eine befriedigende Theorie der turbulenten Strömung zu liefern, deren Aufgabe es vor allen Dingen sein müßte, auf Grund einer klaren Erkenntnis des wirklichen Strömungsvorganges die experimentell gefundene Gleichung der Turbulenz (129) abzuleiten. Es muß als eines der wichtigsten Ziele der Hydrodynamik betrachtet werden, dieses Problem zu lösen.

202. Mechanismus des hydrodynamischen Widerstandes.

Zum Schlusse wollen wir uns noch ganz kurz mit dem Mechanismus des hydrodynamischen Widerstandes beschäftigen, und zwar in dem Grenzfalle, der in der Praxis meistens vorliegt, daß derselbe dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional ist. Die Hydrodynamik reibungsloser Flüssigkeiten liefert, wie wir gesehen haben, solange man die stetige Potentialströmung betrachtet, überhaupt keinen Widerstand, während allerdings die von Helmholtz entdeckte unstetige Potentialströmung einen Widerstand proportional dem Quadrate der Geschwindigkeit liefert, der aber, wie wir in Nr. 179 betonten, zu klein gegenüber dem Experiment ausfällt. Wir wollen uns speziell an das Problem der Nr. 179, „Bewegung einer ebenen Lamelle" von der Breite h und unendlich großer Länge, anschließen. Die Helmholtzsche Theorie liefert dann das Resultat, daß hinter der Lamelle ein von dieser

und der Unstetigkeitsfläche begrenzter Raum von „Totwasser" auftrit Denken wir uns die Flüssigkeit in Ruhe, die Lamelle durch dieselbe m der Geschwindigkeit c_0 hindurchbewegt, so würde sich dieser Totwasse bereich wie ein starrer Körper mit der Lamelle mitbewegen, oder ande ausgedrückt: Legt man in der Lamelle ein (sich also mit der Geschwindi keit c_0 derselben bewegendes) Koordinatensystem fest, so müßte i

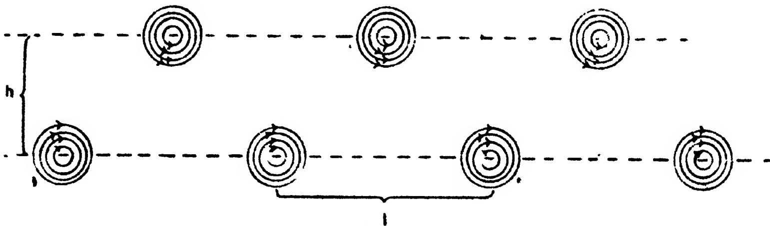


Fig. 247.

Bezug auf dieses der Vorgang stationär sein. Allein dies is in Wirklichkeit keineswegs der Fall; es bildet sich gar kein Tot wasser, das sich wie ein starrer Körper mitbewegt, sonder nach Ausweis des Experiments ist hinter der Platte di Flüssigkeit in lebhafter Bewegung begriffen. Man kann dies

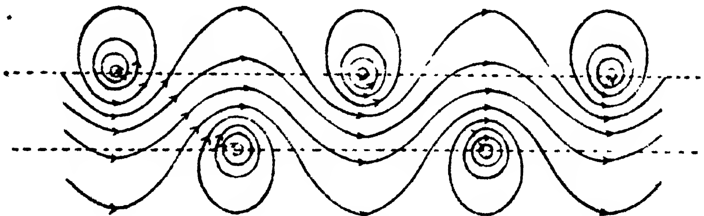


Fig. 248.

am besten dadurch charakterisieren, daß man sagt, daß abwechselnd einmal links, einmal rechts, dann wieder links und so weiter sich Wirbel mit entgegengesetztem Rotationssinne von der Kante der Lamelle lo- lösen, so daß man das Bild der Fig. 247 erhält.

Das ist gewissermaßen eine Allee von der Breite h von geradlinigen Wirbeln, die, einander in dem bestimmten Abstande l folgend, auf den beiden Seiten gegeneinander um $^1/_2 l$ versetzt sind. Das Bild der Strom- linien ist etwa das in Fig. 248 gezeichnete.

Dieses System von Wirbeln bewegt sich, ebenfalls nach Ausweis der Erfahrung, keineswegs mit der Geschwindigkeit c_0 der Lamelle weiter,

sondern mit der kleineren Geschwindigkeit c_1, so daß ein bestimmtes Wirbelpaar immer weiter hinter der Platte zurückbleibt. Aber dafür bilden sich, abwechselnd links und rechts, neue Wirbel aus, sobald der letzte Wirbel in eine Entfernung l von der Platte gelangt ist. Der Vorgang ist also stationär in Bezug auf ein mit der Geschwindigkeit c_1 in Richtung der Plattenbewegung fortschreitendes Koordinatensystem.

Diese Erscheinung erklärt deutlich, weshalb nach der Helmholtzschen Theorie der Widerstand zu klein ausfallen muß. Denn nach dieser kommt der Überdruck gewissermaßen nur durch den Aufprall des Wassers auf der Vorderseite der Platte zustande; die Rückseite liefert keinen Beitrag dazu, da sie sich nach dieser Theorie wie ein starrer Körper mitbewegt. In Wirklichkeit aber strömt auf der Rückseite die Flüssigkeit von der Platte fort mit der relativen Geschwindigkeit $(c_0 - c_1)$, es tritt also eine „Saugwirkung" von hinten additiv zu der Druckwirkung von vorne hinzu. Die Existenz dieser Saugwirkung ist schon vor längerer Zeit (1894) von Lord Kelvin[1]) an Versuchen von Dines festgestellt und nachdrücklich gegen die Anschauung ins Feld geführt worden, daß die Helmholtzsche unstetige Potentialbewegung den Flüssigkeitswiderstand erklären könne. Auch die abwechselnde Ablösung der Wirbel von der Platte ist schon öfters[2]) beobachtet, aber meistens als störender Nebenumstand aufgefaßt worden. Erst von Kármán[3]) und Mitarbeiter haben durch Versuche festgestellt, daß sich das Flüssigkeitsbild der Fig. 248 stets mit überraschender Genauigkeit herstellt und daraus den Schluß gezogen, daß gerade darauf die Theorie des Widerstandes in diesem Falle zu gründen sei. Kármáns Gedankengang, den wir nur kurz skizzieren können, ist etwa der folgende:

1. Weshalb stellt sich nicht die Helmholtzsche Unstetigkeitsfläche ein?

Einen Grund haben wir schon in der Reibung erkannt, die jede Unstetigkeitsfläche vernichtet; ein zweiter Grund, der auch für eine nicht reibende Flüssigkeit gilt, ist der Umstand, den schon Helmholtz, Kelvin und Rayleigh betonten, daß eine solche Diskontinuitätsfläche stets labil ist, d. h. durch stets vorhandene, unvermeidliche kleine Störungen vernichtet wird. Und zwar in der Weise, daß die Wirbelintensität der Diskontinuitätsfläche zwar in toto erhalten bleibt, aber sich an einzelnen Punkten konzentriert. Bedeutet also in Fig. 249 WW die ursprüngliche Wirbelschicht, so löst sich dieselbe in eine Reihe von gleichsinnig rotierenden Wirbeln auf, deren jedem eine solche Wirbelstärke J zukommt, wie sie vorher das

[1]) Kelvin, Math. and physical papers, Bd. IV, p. 227 ff.

[2]) Z. B. v. d. Borne, Zeitschrift f. Flugtechnik u. Motorluftschiffahrt, p. 30, 1912.

[3]) v. Kármán und Rubach, Phys. Zeitschr. 13, p. 49, 1912.

Stück von der Länge l der Diskontinuitätsfläche hatte. In unserem Falle ist dies nach der Theorie die Größe $c_0 l$; also würde für jeden Einzelwirbel zu setzen sein:

$$J = c_0 \cdot l. \tag{139}$$

2. Man sollte nach dem Obigen erwarten, daß von beiden Seiten der Lamelle links und rechts gleichzeitig sich Wirbel ablösen würden, so daß statt der Wirbelallee der Fig. 247 mit gegeneinander versetzten Wirbeln eine Allee mit einander direkt gegenüberliegenden Wirbeln entstünde. Weshalb tritt dies nicht ein? Deshalb nicht,



Fig. 249.

weil, wie Kármán feststellte, eine derartige Wirbelanordnung, ebenso wie die einreihige der Fig. 249, nicht stabil ist. Dagegen ist unter gewissen Umständen die zweireihige unsymmetrische Anordnung der Figur 247 stabil. Nämlich, wie die ausführliche Rechnung zeigt, dann, wenn das Verhältnis der Breite h der Allee zum Abstande l der Wirbel den Wert

$$\frac{h}{l} = 0{,}283 \tag{140}$$

besitzt. Das ist offenbar der Grund, weshalb die Wirbel abwechselnd links und rechts auftreten, weil nur so eine stabile Anordnung sich bildet. *Das Experiment ergibt in der Tat den theoretischen Wert 0,283 mit überraschender Genauigkeit. Ferner ergibt eine einfache Berechnung nach Art der in Nr. 188 angestellten, daß die Geschwindigkeit c_1, mit der das ganze Wirbelsystem fortschreitet, den Wert hat:*

$$c_1 = \frac{J}{l\sqrt{8}}, \quad \text{oder auch } c_1 = \frac{c_0}{\sqrt{8}}. \tag{141}$$

Die relative Geschwindigkeit, mit der das Wirbelsystem hinter der Lamelle zurückbleibt, ist also

$$c_0 - c_1 = c_0\left(1 - \frac{1}{\sqrt{8}}\right),$$

und da jedesmal, wenn der letzte Wirbel den Abstand l von der Lamelle erreicht hat, ein neuer Wirbel sich von der letzteren loslöst, so folgt, daß pro Sekunde in jeder Reihe sich $\frac{c_0 - c_1}{l}$ neue Wirbelfäden bilden, also im ganzen $\frac{c_0 - c_1}{l}$ Wirbelpaare. Es ist nicht schwer, die Bewegungs-

größe oder den Impuls eines solchen Wirbelpaares auszurechnen. Man erhält durch eine Rechnung, die der über kinetische Energie von Wirbeln in Nummer 186 ganz analog ist, für den Impuls eines Wirbelpaares:

$$\varepsilon \cdot h \cdot J .$$

Da nun pro Sekunde $\frac{c_0 - c_1}{l}$ neue Wirbelpaare erzeugt werden, so nimmt der Gesamtimpuls $\mathfrak{Q}$ pro Sekunde um den Betrag

$$\left|\frac{d\mathfrak{Q}}{dt}\right| = \varepsilon h J \frac{c_0 - c_1}{l} \tag{142}$$

zu.[1]) Nach den Newtonschen Bewegungsgesetzen ist aber diese Größe gleich dem Betrage der wirkenden Kraft, und da der Widerstand W gleich, aber entgegengerichtet derselben ist, so erhalten wir für den Widerstand die Formel:

$$W = \varepsilon J h \frac{c_0 - c_1}{l}, \tag{143}$$

oder unter Einsetzung der aus den Gleichungen (139) und (140) folgenden Werte:

$$W = \frac{\sqrt{8} - 1}{\sqrt{8}} \varepsilon h \cdot c_0^2 , \tag{144}$$

also proportional dem Quadrate der Geschwindigkeit. Diese Formel stimmt auch dem Betrage nach mit der Erfahrung gut überein.

Die obige Darstellung soll natürlich nur eine Skizze des Gedankenganges sein, wie nach der modernen Auffassung der hydrodynamische Widerstand entsteht; die ganze Theorie ist auch noch in den Anfängen und in mehrfacher Hinsicht entwickelungsbedürftig, aber allem Anschein nach auch entwickelungsfähig.

Ein Einwand ist noch zu beseitigen, der gleichzeitig ein Licht auf die grundsätzliche Stellung der Hydrodynamik der reibungslosen Flüssigkeiten wirft, resp. ihre Einflußsphäre umgrenzt.

Bei der obigen Ableitung sind einerseits die Wirbelsätze benutzt worden, die der Mechanik reibungsloser Flüssigkeiten angehören, und anderseits haben wir — an der Kante der Lamelle — neue Wirbel entstehen lassen, im Gegensatze zu den Erhaltungssätzen. Wie vereinigt sich dies?

Betrachten wir die Gleichungen (25), die die Normal- und Tangentialspannungen für eine reibende Flüssigkeit angeben, so erkennt man, daß der Einfluß der Reibung um so geringer ist, je kleiner k und je kleiner die räumliche Variation der Geschwindigkeit, oder kurz der Gradient der Geschwindigkeit ist. Man kann daher stets bei Flüssigkeiten mit

---

[1]) Diese Anwendung des Impulssatzes ist nicht ganz exakt; v. Kármán hat dieselbe später verbessert; wir benutzen seine ursprüngliche Darstellung, da es uns nur auf den Gedankengang ankommt.

kleinem Reibungskoeffizienten k den Einfluß der Reibung da vernachlässigen, wo der Gradient der Geschwindigkeit klein ist. Dies ist jedoch nie an solchen Stellen der Flüssigkeit der Fall, wo sie an einen festen Körper angrenzt. Beurteilen wir die Geschwindigkeit der Flüssigkeit von einem im Körper festen Koordinatensystem aus, so ist an der Körperoberfläche dieselbe stets gleich Null wegen der unendlich großen äußeren Reibung, um von da in Richtung der Normale rasch zu von Null verschiedenen Werten anzuwachsen. Es ist also in Richtung der Normale vom Körper fort ein im allgemeinen beträchtlicher Geschwindigkeitsgradient vorhanden $\left(\text{d. h. die Größen } \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial x} \ldots\right)$ sind nicht mehr als klein zu betrachten); es ist also in der dem Körper anliegenden Grenzschicht stets ein Einfluß der Reibung anzunehmen, während man in einiger Entfernung vom Körper denselben vernachlässigen kann. Dieser Gedanke ist zum ersten Male in voller Klarheit von L. Prandtl[1]) ausgesprochen worden. Dem entspricht auch unsere obige Darlegung. In großer Entfernung von der Lamelle gilt die Hydrodynamik der reibungslosen Flüssigkeiten, d. h. die Helmholtzschen Wirbelsätze; an der Kante der Lamelle wirkt die Reibung und erzeugt neue Wirbel, gemäß den Gleichungen (39). Es ist also die reibungslose Hydrodynamik stets zu ergänzen durch eine Untersuchung der Grenzschicht, die den in die Flüssigkeit eintauchenden Körpern anliegt; in dieser gehen die für den Widerstand fundamentalen Vorgänge vor sich, was Prandtl und seine Schüler[2]) an mehreren Beispielen gezeigt haben, und wie auch aus unserer obigen Darstellung hervorgeht.

Hier muß dieser kurze Hinweis auf diese für die Entwickelung der Hydrodynamik und die Praxis in gleicher Weise bedeutungsvollen Arbeiten genügen.

---

[1]) L. Prandtl, Verhandl. des Intern. Mathem. Kongresses, Heidelberg 1904, pag. 484.

[2]) Boltze, Gött. Diss. 1908; Blasius, Gött. Diss. 1908; Hiemenz, Gött. Diss. 1911.

Register.